Mémoire de DEA

Denis Conduché

5 novembre 2004

On étudie ici les droites sur les hypersurfaces de $\mathbb{P}^N$, à partir du chapitre 2.4. de [Deb01]. La première partie étudie le cas général, en se basant sur [BVdV78]. Puis, à l'aide des propriétés trouvées, on étudie le cas des hypersurfaces de Fermat.

Dans toute la suite, on travaille sur un corps k algébriquement clos. Tous les sous-schémas considérés sont des sous-schémas fermés.

1 Préliminaires

On se place dans un premier temps dans un cadre général.

Notation 1.0.1. Dans toute cette partie, on note G un polynôme homogène de degré $d > 0$ fixé, et X l'hypersurface de $\mathbb{P}^N$ définie par G.

1.1 Notations et définitions

On suit dans cette partie la construction de [BVdV78].

Notons $k[x_0, ..., x_N]_d$ l'ensemble des polynômes homogènes de degré d.
Soit $F = \{([l], h) \in \mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N) \times k[x_0, ..., x_N]_d \mid h_{|l} = 0\}$ la variété d'incidence.
C'est un sous schéma de $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N) \times k[x_0, ..., x_N]_d$, qui est un fibré vectoriel sur $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N)$:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"] & k[x_0, ..., x_N]_d \\ \mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N) & \end{tikzcd}$$

Définition 1.1.1. On définit la variété de Fano $F(X)$ associée à X par $F(X) = \varphi \circ \psi^{-1}(G)$.
Elle a une structure naturelle de schéma et indexe les droites contenues dans X.

En effet l'application φ est juste une projection et $\psi^{-1}(G)$, qui a une structure naturelle de schéma, est contenu dans $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N) \times \{G\}$. Donc $F(X)$ a bien une structure de schéma, celle de $\psi^{-1}(G)$. On la calculera explicitement au paragraphe 1.2.

Remarque 1.1.2. $F(X)$ a une structure de schéma projectif, car c'est un sous-schéma de la grassmanienne $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N) \simeq \mathbb{G}(2, k^{N+1})$, donc elle se plonge dans un $\mathbb{P}^n$ par le plongement de Plücker.

Remarque 1.1.3. Il peut être intéressant de ne pas choisir de coordonnées dans $\mathbb{P}^N$ a priori, c'est-à-dire de voir $\mathbb{P}^N$ comme un $\mathbb{P}V$ avec V un espace vectoriel de dimension $N+1$ sur k. Dans ce cas $k[x_0, ..., x_N]_d$ est remplacé par $\mathrm{Sym}^d V^*$. La fibre de $\varphi : F \to \mathbb{G}(1, \mathbb{P}V)$ au-dessus d'un point $[l] = [\mathbb{P}\bar{l}]$ de $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}V)$ est alors le noyau du morphisme naturel $\mathrm{Sym}^d V^* \to \mathrm{Sym}^d \bar{l}^*$ ([DM98]).

Considèrons le diagramme suivant, où $I = \{([l], x) \in F(X) \times X \mid x \in l\}$ est un sous-schéma de $F(X) \times_k X$:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"] & X \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^N \\ F(X) \arrow[r, hook] & \mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N) & \end{tikzcd}$$

$I \to F(X)$ est un fibré en $\mathbb{P}^1$. C'est une restriction du fibré standard sur la grassmanienne.

Définition 1.1.4. Soit $x \in X$. On définit $F(X, x)$ associée à X par $F(X, x) = pr_1 \circ pr_2^{-1}(x)$.
$F(X, x)$ a une structure naturelle de schéma et indexe les droites contenues dans X passant par x. C'est un sous-schéma de $F(X)$.

Remarque 1.1.5. Les droites passant par x dans $\mathbb{P}^N$ (c'est-à-dire $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N; x)$) sont paramétrées par un hyperplan de $\mathbb{P}^N$, dont $F(X, x)$ est un sous-schéma.

On énonce un lemme utile sur les faisceaux localements libres de rang fini sur $\mathbb{P}^1$.

Lemme 1.1.6. Tout faisceau localement libre de rang fini sur $\mathbb{P}^1$ est isomorphe à une somme directe de faisceaux inversibles (Donc, comme Pic $\mathbb{P}^1 = \mathbb{Z}$, à une somme directe de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$, avec unicité des a_i).(exercice 2.6 p 384 de [Har83])

Démonstration. Soit E un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^1$. Montrons tout d'abord que si s est une section globale de E, qui n'est pas partout non nulle, cette section est multiple d'une section de $E(-1)$. Supposons que s s'annule en $x \in \mathbb{P}^1$, et notons que le degré du corps résiduel de x est necessairement 1 (k est algébriquement clos). On considère f une section de $\mathcal{O}(1)$ s'annulant en x, qui correspond au polynôme irréductible définissant x. Alors s/f est une section globale de $E(-1)$.
On construit les $\mathcal{O}(-n)$ cherchés par récurrence sur n. Soit n fixé, et supposons que l'on a des sections globales s_i de $E(n_i)$, pour $n_i < n$ telles que les $O(-n_i).s_i$ soient en somme directe dans E (comme sous-faisceaux) que l'on notera F, et que $H^0(\mathbb{P}^1, F(m)) = H^0(\mathbb{P}^1, E(m))$ pour tout $m < n$. On choisit des sections globales t_j de $E(n)$ qui engendrent un supplementaire de $H^0(\mathbb{P}^1, F(n))$ dans $H^0(\mathbb{P}^1, E(n))$. Montrons que les $\mathcal{O}(-n_i).s_i$ et les $\mathcal{O}(-n).t_j$ sont en somme directe dans E, c'est-à-dire que les $(t_j)_x$ sont linéairement indépendant dans E_x/F_x pour tout x. Supposons le contraire : on a alors une combinaison linéaire à coefficients non tous nuls t des t_j et une section s de $F(n)$ tels que $t - s = 0$ en x. Donc d'après ci-dessus $t - s = f.r$ où r appartient à $H^0(\mathbb{P}^1, E(n-1)) = H^0(\mathbb{P}^1, F(n-1))$. Donc $t = s + f.r$ est dans $H^0(\mathbb{P}^1, F(n-1))$ ce qui contredit la définition des t_j. □

Soit l une droite sur X, telle que X soit lisse le long de l ($N_{l/X}$ est alors localement libre). On a alors, par le lemme précédent, la décomposition suivante :

$$N_{l/X} = \mathcal{O}_l(a_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_l(a_n) \qquad \text{avec } a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n$$

Définition 1.1.7. l est dite libre si $a_n \geqslant 0$, c'est-à-dire si $N_{l/X}$ est engendré par ses sections globales.

Remarque 1.1.8. Si $a_n \geqslant -1$, le schéma $F(X)$ est lisse en $[l]$ par le corollaire 1.2.6

Remarque 1.1.9. Si f est libre, on a $K_X.l = -\sum a_i \leqslant -2$, donc K_X n'est pas nef.

1.2 Propriétés de $F(X)$

Étudions dans un premier temps $F(X)$. Nous allons faire des calculs explicites de vecteurs tangents dans des coordonnées. On notera dans la suite E le k-espace vectoriel $k[x_0, ..., x_N]_d$.

Calculons tout d'abord le rang de $d\psi$ en un point $([l], h_0)$ de F. On peut choisir des coordonnées telles que l soit la droite engendrée par $(1, 0, ..., 0)$ et $(0, 1, 0, ..., 0)$, et on notera $\bar{l}$ le plan de k^{N+1} correspondant dans $\mathbb{G}(2, k^{N+1})$. Les calculs dans $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N)$ et $\mathbb{G}(2, k^{N+1})$ étant équivalent, on va se placer au-dessus de $\mathbb{G}(2, k^{N+1})$. Tout plan $\overline{l'}$ de k^{N+1} contenu dans un voisinage suffisamment petit U de $[\bar{l}]$ dans $\mathbb{G}(2, k^{N+1})$ est engendré par deux points (uniques) $(1, 0, u_2, ..., u_N)$ et $(0, 1, v_2, ..., v_N)$. On peut donc utiliser $(u_2, ..., u_N, v_2, ..., v_N)$ comme coordonnées locales dans U.

Remarque 1.2.1. Sur cet ouvert on connait les équations explicites qui définnissent $F(X)$ dans $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N)$. En effet la droite $\{(1, t, u_2+tv_2, ..., u_N+tv_N) | t \in k\}$ est contenue dans X si et seulement si $G((1, t, u+tv)) = 0$ pour tout t. Ce qui nous donne en développant au plus $d+1$ équations explicites, et donc en particulier que $F(X)$ est de dimension au moins $2N - d - 3$.

Une base de l'espace tangent $T_{[\overline{l'}]}\mathbb{G}(2, k^{N+1})$ nous est donnée par les dérivées partielles par rapport à ces indéterminées, restreintes à $\overline{l'}$:

$$\frac{\partial}{\partial u_2}_{|\overline{l'}}, ..., \frac{\partial}{\partial u_N}_{|\overline{l'}}, \frac{\partial}{\partial v_2}_{|\overline{l'}}, ..., \frac{\partial}{\partial v_N}_{|\overline{l'}}$$

et les coordonnés d'un vecteur tangent en $\overline{l'}$ dans cette bases seront notées $(U_2, ..., U_N, V_2, ..., V_N)$. Les éléments de E sont des polynômes de la forme (avec des multi-indices) : $h = \sum_{|\mathbf{k}|=d} a_{\mathbf{k}} x^{\mathbf{k}}$. On choisit les $x^{\mathbf{k}}$ pour base de E, et les $\partial/\partial a_{\mathbf{k}}$ sur T_hE. Les coordonnées d'un vecteur tangent en h_0 dans cette base seront notées $A_{\mathbf{k}}$, ce qui nous donne une identification entre E et T_hE. Le vecteur correspondant à h sera noté H.

Proposition 1.2.2. L'espace tangent $T_{([\bar{l}], h_0)}(F)$ est l'espace :

$$\left\{(U_2, ..., U_N, V_2, ..., V_N, H) \in T_{[\bar{l}]}(\mathbb{G}(2, k^{N+1})) \times T_{h_0}E \mid \sum_{i=2}^{N} \frac{\partial h_0}{\partial x_i}_{|\bar{l}}(U_i x_0 + V_i x_1) + h_{0|\bar{l}} = 0\right\}$$

Démonstration. Un point $(u_2, ..., u_N, v_2, ..., v_N, h) \in U \times E$ appartient à F si et seulement si on a $h(\lambda(1, 0, u_2, ..., u_N) + \mu(0, 1, v_2, ..., v_N)) = 0$ pour tout couple (λ, μ) dans k. Donc un vecteur tangent

$$(U_2, ..., U_N, V_2, ..., V_N, H) \in T_{([\bar{l}], h_0)}(\mathbb{G}(2, k^{N+1}) \times E)$$

sera tangent si et seulement si pour tout couple (λ, μ) dans k

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=2}^{N} \left(U_i \frac{\partial}{\partial u_i} + V_i \frac{\partial}{\partial v_i}\right) h_0(\lambda(1, 0, u_2, ..., u_N) + \mu(0, 1, v_2, ..., v_N)) \\ &\quad + \sum_{|\mathbf{k}|=d} A_{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial a_{\mathbf{k}}} h_0(\lambda(1, 0, u_2, ..., u_N) + \mu(0, 1, v_2, ..., v_N)) \\ &= \sum_{i=2}^{N} \frac{\partial h_0}{\partial x_i}(\lambda(1, 0, u_2, ..., u_N) + \mu(0, 1, v_2, ..., v_N))(U_i\lambda + V_i\mu) \\ &\quad + \sum_{|\mathbf{k}|=d} A_{\mathbf{k}} \lambda^{k_0} \mu^{k_1} (\lambda u_2 + \mu v_2)^{k_2} ... (\lambda u_N + \mu v_N)^{k_N} \end{aligned}$$

Au point $([\bar{l}], h_0)$ on a de plus que $u_i = 0$ et $v_i = 0$ pour $i \geqslant 2$. Donc on trouve comme condition necessaire et suffisante pour que $(U_2, ..., U_N, V_2, ..., V_N, H)$ soit tangent à F en $([\bar{l}], h_0)$:

$$\sum_{i=2}^{N} \frac{\partial h_0}{\partial x_i}(\lambda, \mu, 0, ..., 0)(U_i\lambda + V_i\mu) + \sum_{k_0+k_1=d} A_{k_0,k_1,0,...,0}\lambda^{k_0}\mu^{k_1} = 0$$

pour tout (λ, μ) dans k. Ce qui est la formule de la proposition. $\square$

Comme l'application $d\psi$ envoie $(U_2, ..., U_N, V_2, ..., V_N, H)$ sur H, nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 1.2.3. Le rang de $d\psi : T_{([\bar{l}],h_0)}(F) \to T_{h_0}(E)$ est égal à la dimension de l'espace des polynômes en x_0, x_1 de degré d qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$\sum_{i=2}^{N} \frac{\partial h_0}{\partial x_i}(x_0, x_1, 0, ..., 0)(U_i x_0 + V_i x_1)$$

avec $(U_2, ..., U_N, V_2, ..., V_N)$ arbitraires dans k.

On remarque que $H^0(l, \mathcal{O}_l(1))$ est l'espace des polynômes homogènes de degré 1 sur $\bar{l}$, et $H^0(l, \mathcal{O}_l(d))$ l'espace des polynômes homogènes de degré d sur $\bar{l}$ (donc $\simeq T_{h_0}(E)$). Le corollaire implique en particulier :

Proposition 1.2.4. La différentielle $d\psi$ en un point $([\bar{l}], h_0)$ de$F$ est surjective si et seulement si le morphisme

$$\beta : \bigoplus_{2}^{N} H^0(l, \mathcal{O}_l(1)) \to H^0(l, \mathcal{O}_l(d))$$

défini par

$$(s_2, ..., s_N) \to \sum_{i=2}^{N} \frac{\partial h_0}{\partial x_i}(x_0, x_1, 0, ..., 0)s_i$$

est surjectif.

Démonstration. On se contente de remarquer que lorsque $(U_2, ..., U_N, V_2, ..., V_N)$ parcourt k^{2N-2}, le polynôme $s_i = U_i x_0 + V_i x_1$ parcourt $k[x_0, x_1]_1 \simeq H^0(l, \mathcal{O}_l(1))$ en entier, c'est-à-dire qu'on oublie (partiellement) le choix d'une base de $H^0(l, \mathcal{O}_l(1))$ qui avait été fait. $\square$

Le morphisme que l'on vient d'obtenir provient en fait naturellement de suites exactes sur les fibrés normaux. Nous pourrons alors en donner une interprétation sans choisir de coordonnées.

Proposition 1.2.5. On suppose que X est lisse le long de la droite $l \subset X$. Alors

$$\begin{aligned} N_{l/\mathbb{P}^N} &\simeq \bigoplus_{2}^{N} \mathcal{O}_l(1) \\ (N_{X/\mathbb{P}^N})_{|l} &\simeq \mathcal{O}_l(d) \\ N_{l/X} &\simeq \bigoplus_{i=1}^{N-2} \mathcal{O}_l(a_i) \end{aligned}$$

avec $1 \geqslant a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_{N-2}$. De plus, le morphisme β de la proposition 1.2.4 est l'application $H^0(\alpha)$: $H^0(l, N_{l/\mathbb{P}^N}) \to H^0(l, (N_{X/\mathbb{P}^N})_{|l})$ induite par la suite exacte suivante :

$$0 \to N_{l/X} \to N_{l/\mathbb{P}^N} \xrightarrow{\alpha} (N_{X/\mathbb{P}^N})_{|l} \to 0$$

Démonstration. Si on note X' l'ensemble des points singuliers de X, on a alors le diagramme suivant (les faisceaux sont sur $X - X'$, qui est non vide car X est supposée réduite), où l'étude de α' nous donnera le résultat :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & \mathcal{O}_X \arrow[d] & & \\
 & & \mathcal{O}_X(1)^{N+1} \arrow[d] \arrow[dr, "\alpha'"] & & \\
0 \arrow[r] & T_X \arrow[r] & (T_{\mathbb{P}^N})_{|X} \arrow[r] \arrow[d] & N_{X/\mathbb{P}^N} \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

En effet, on a la suite exacte classique des fibrés tangents et normaux (sur $X - X'$ qui est un sous-schéma (pas forcémment fermé) lisse irréductible de la variété lisse $\mathbb{P}^N$ au-dessus de k) : $0 \to T_X \to T_{\mathbb{P}^N} \otimes \mathcal{O}_X \to N_{X/\mathbb{P}^N} \to 0$ ([Har83] page 182). La suite exacte verticale est obtenue en passant au dual et en se restreignant à $X - X'$ dans la suite exacte $0 \to \Omega_{\mathbb{P}^N} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(-1)^{N+1} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N} \to 0$ ([Har83] théorème 8.13 page 176) car $\mathbb{P}^N$ est lisse.

Etudions α' dans des coordonnées. Pour un $s \in X - X'$ fixé, posons t un générateur de $\mathcal{O}_{s,X}(1)$. Le noyau de α' en s est alors l'ensemble des $(U_0 t, ..., U_N t)$ de $\mathcal{O}_{s,X}(1)^{N+1}$ tels que $(U_0, ..., U_N)$ soit tangent à X, c'est-à-dire tels que $\sum_{i=0}^N U_i \frac{\partial G}{\partial x_i} = 0$. Donc le noyau de l'application de $\mathcal{O}_X(1)^{N+1}$ dans $\mathcal{O}_X(d)$ définie par :

$$(U_0 t, ..., U_N t) \to \sum_{i=0}^N U_i \frac{\partial G}{\partial x_i} t$$

coïncide avec le noyau de α'. On peut donc trouver une identification entre $N_{X/\mathbb{P}^N}$ et $\mathcal{O}_X(d)$ tel que les deux applications coïncident. La fin de la preuve est donc la conséquence de la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(T_{\mathbb{P}^N})_{|l} \arrow[r] \arrow[dr] & N_{l/\mathbb{P}^N} \arrow[d] \\
 & (N_{X/\mathbb{P}^N})_{|l}
\end{tikzcd}$$

La décomposition de $N_{l/X}$ provient du lemme 1.1.6, et l'inégalité sur les degrés des a_i de la suite exacte, en tensorisant par $\mathcal{O}_l(-2)$, puis en passant aux sections globales. □

Corollaire 1.2.6. Soit l comme précédemment. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. l correspond à un point régulier de $F(X)$ (c'est-à-dire F et $\psi^{-1}(G)$ se coupent transversalement).
2. l'application $N_{l/\mathbb{P}^N} \to (N_{X/\mathbb{P}^N})_{|l}$ induit une application surjective sur les sections globales.
3. $H^1(l, N_{l/X}) = 0$

Démonstration. l'équivalence entre 1 et 2 est la version sans coordonnée de la proposition 1.2.4. La longue suite exacte de cohomologie nous donne l'équivalence entre 2 et 3. □

Proposition 1.2.7.
$$T_{[l]}F(X) \simeq H^0(l, N_{l/X})$$

La suite exacte de la proposition 1.2.5, après tensorisation par $\mathcal{O}_l(-1)$, s'écrit :

$$0 \to N_{l/X}(-1) \to \mathcal{O}_l^{N-1} \xrightarrow{\alpha\otimes\mathcal{O}_l(-1)} \mathcal{O}_l(d-1) \to 0$$

Donc en passant aux sections globales on obtient une application :

$$\gamma : \begin{cases} k^{N-1} & \to \quad H^0(l, \mathcal{O}_l(d-1)) \\ (\lambda_2, ..., \lambda_N) & \mapsto \quad \displaystyle\sum_{j=2}^{N} \lambda_j \left(\frac{\partial G}{\partial x_j}\right)_{|l} \end{cases}$$

On a supposé jusqu'ici que l était la droite d'équation $x_2 = ... = x_N = 0$, et fixé les coordonnées en conséquence. Lorsque les coordonnées sont déjà fixées (ce qui est le cas par exemple pour l'hypersurface de Fermat étudiée dans la deuxième partie), il peut être plus interessant de considérer l'application γ' suivante (où l'on impose aucune condition sur les coordonnées), qui a même image que γ :

$$\gamma' : \begin{cases} k^{N+1} & \to \quad H^0(l, \mathcal{O}_l(d-1)) \\ (\lambda_0, ..., \lambda_N) & \mapsto \quad \displaystyle\sum_{j=0}^{N} \lambda_j \left(\frac{\partial G}{\partial x_j}\right)_{|l} \end{cases}$$

Proposition 1.2.8. Les applications γ' et γ ont pour conoyau $H^1(l, N_{l/X}(-1))$.

Démonstration. La longue suite exacte de cohomologie s'écrit :

$$0 \to H^0(l, N_{l/X}(-1)) \to H^0(l, \mathcal{O}_l)^{N-1} \xrightarrow{\gamma} H^0(l, \mathcal{O}_l(d-1)) \to H^1(l, N_{l/X}(-1)) \to H^1(l, \mathcal{O}_l)$$

Or $H^1(l, \mathcal{O}_l) = 0$, ce qui nous donne le résultat. □

1.3 Propriétés de $F(X, x)$

Étudions de même $F(X, x)$.

Remarque 1.3.1. On a des équations explicites relativement simples définissant $F(X, x)$ dans H, où H est un hyperplan fixé de $\mathbb{P}^N$ ne contenant pas x (on peut supposer que H est un hyperplan de coordonnée, par exemple $(x_N = 0)$).

En effet $F(X, x)$, comme sous-schéma de H, est défini par $F(X, x) = \{y \in H \mid y \in H \text{ et } (x, y) \subset X\}$. Donc un y de H appartient à $F(X, x)$ si et seulement si $G(x + ty) = 0$ pour tout t, c'est-à-dire si et seulement si $G_i(y) = 0$ où

$$G_i(y) = \sum_{|\beta|=i} \left(\sum_{|\alpha|=d \text{ et } \alpha\geqslant\beta} a_\alpha C_\alpha^\beta x^{\alpha-\beta} \right) \qquad i = 1, ..., d$$

En effet G_0 correspond à $x \in X$ ce qui est vrai par définition de x.

La proposition suivante permet de relier la dimension de $F(X)$ à celle de $F(X, x)$:

Proposition 1.3.2.
$$\dim F(X) \leqslant \dim F(X,x) + N - 2$$
L'égalité est atteinte pour x général.

Démonstration. On utilise les résultats de [Har83] ex 3.22 p. 95. L'application surjective $I \to X$ a pour fibres les $F(X,x)$ par définition. Donc $\dim I \leqslant \dim F(X,x) + \dim X = \dim F(X,x) + N - 1$, et l'égalité est atteinte pour x général. Le morphisme (surjectif aussi) $I \to F(X)$ a pour fibre $\mathbb{P}^1$, donc $\dim F(X) = \dim I - 1$. D'où $\dim F(X) \leqslant \dim F(X,x) + N - 2$, et l'égalité est atteinte pour x général. □

Proposition 1.3.3.
$$T_{[l]}F(X,x) \simeq H^0(l, N_{l/X}(-1))$$

Démonstration. On suit la même démarche qu'au paragraphe 1.2. On obtient alors que le rang de $d\psi^{(x)}$ est égal à la dimension de l'espace des polynômes en x_0, x_1 de degré d qui peuvent s'écrire sous la forme
$$x_1 \sum_{i=2}^{N} \frac{\partial h_0}{\partial x_i}(x_0, x_1, 0, ..., 0) V_i$$
avec $(V_2, ..., V_N)$ arbitraires dans k. C'est-à-dire la dimension de l'espace des polynômes en x_0, x_1 de degré $d-1$ qui peuvent s'écrire sous la forme : $\sum_{i=2}^{N} \frac{\partial h_0}{\partial x_i}(x_0, x_1, 0, ..., 0) V_i$. On remarque de même que $H^0(l, \mathcal{O}_l(d-1))$ est l'espace des polynômes homogènes de degré $d-1$ sur $\bar{l}$. On continue de même. □

2 Hypersurfaces de Fermat

Définition 2.0.4. L'hypersurface de Fermat X_N^d est l'hypersurface de $\mathbb{P}^N$ définie par l'équation
$$x_0^d + \ldots + x_N^d = 0$$

On étudie le schéma $F(X_N^d)$.

La détermination des droites contenues dans une hypersurface de Fermat de degré plus grand que N dans $\mathbb{P}^N$ pour $N = 3$ et 4 se trouve dans [AS91]. Le fait que la varieté des droites contenue dans une quartique de Fermat de dimension 3 est de dimension 2 en caracteristique 3 se trouve dans [Col79].

Proposition 2.0.5. L'hypersurface X_N^d est lisse si et seulement si la caractéristique de k est 0 ou ne divise pas d.

On supposera désormais ces hypothèses vérifiées. De plus on suppose que l'on a toujours $N \leqslant d$, (sauf à la proposition 2.1.5). Dans le cas contraire on connait la dimension de $F(X_N^d)$ par la proposition 2.1.5.

2.1 Généralités

2.1.1 Description ensembliste

Définition 2.1.1 (droites standard). Soit $I_1, ..., I_r$ une partition de $\{0, ..., N\}$, où I_j contient au moins deux éléments pour chaque j.

Soit $x \in \mathbb{P}^N$ tel que $\sum_{i \in I_j} x_i^d = 0$ pour tout j (on a $x \in X_N^d$). On note x_{I_j} l'élément de $\mathbb{P}^N$ qui vaut x_i en i si i appartient à I_j et 0 sinon.

On appelle *droite standard* de X_N^d une droite contenue dans $\{(\lambda_1 x_{I_1} + ... + \lambda_r x_{I_r}) \mid \lambda \in \mathbb{P}^{r-1}\}$.

Remarque 2.1.2. Pour chaque $x \in \Pi_{j=1}^{r} X^{d}_{\text{Card } I_j - 1}$, on a donc un sous-espace projectif de dimension $r-1$ $\left\{(\lambda_1 x_{I_1} + ... + \lambda_r x_{I_r}) \mid \lambda \in \mathbb{P}^{r-1}\right\}$ inclu dans X^d_N.

Proposition 2.1.3. Les droites standard forment une famille de droites de X^d_N de dimension pure $N-3$.

Démonstration. Pour chaque $x \in \Pi_{j=1}^{r} X^{d}_{\text{Card } I_j - 1}$, le sous-espace $\{(\lambda_1 x_{I_1} + ... + \lambda_r x_{I_r}) \mid \lambda \in \mathbb{P}^{r-1}\}$ de dimension $r-1$ inclu dans X^d_N contient une famille de dimension $2r-4$ de droites (c'est $G(1, \mathbb{P}^{r-1})$). Or $\dim(\Pi_{j=1}^{r} X^{d}_{\text{Card } I_j - 1}) = \sum_{j=1}^{r} (\text{Card } I_j) - 2 = N + 1 - 2r$. Les droites standard de X^d_N forment donc une famille de droites de dimension $N + 1 - 2r + 2r - 4 = N - 3$. □

Proposition 2.1.4. Si k est de caractéristique nulle ou strictement plus grande que d, et $d \geqslant N$, toutes les droites sont standard (pour $N \geqslant 2$).

Démonstration.
On démontre le résultat par récurrence sur N :

- Dans le cas $N = 2$, le schéma X^d_2 est une courbe qui n'est pas une droite ($d \geqslant 2$), donc ne contient aucune droite. En particulier, elles sont toutes standard.

- $N - 1 \Rightarrow N$
On suppose $l \subset X^d_N$ mais l non inclus dans un hyperplan de coordonnées (sinon $l \subset X^d_{N-1}$, et on a le résultat). Donc on a $l \cap (x_i = 0)$ réduit à un point.
Supposons que l contienne un point avec 2 coordonnées nulles, par exemple le point $(a_0, ..., a_{N-2}, 0, 0)$. Comme $l \subsetneq (x_N = 0)$, on peut trouver un point de l de la forme $(b_0, ..., b_{N-1}, 1)$.
On considère alors la droite l' contenue dans X^d_{N-1} passant par les points $(a_0, ..., a_{N-2}, 0)$ et $(b_0, ..., b_{N-2}, \omega)$, où ω est une racine $d-$ième de $b^d_{N-1}+1$. On applique l'hypothèse de récurrence à l' : elle est nécessairement standard, c'est-à-dire de la forme $\{((\lambda_1 + t\mu_1) x_{I_1} + ... + (\lambda_r + t\mu_r) x_{I_r}) | t \in k\}$ pour λ et μ fixés dans $\mathbb{P}^{r-1}$. On peut supposer que $N-1$ appartient à I_r. Donc $\lambda_r = 0$. Il suffit donc de construire μ'_r et x'_{I_r} qui conviennent pour l. On note x'_{N-1} une racine $d-$ième de $x^d_{N-1} - \mu_r^{-d}$, et on pose $x'_N = 1/\mu_r$ et $x'_i = x_i$ sinon. Ce qui nous donne le résultat pour l.
Sinon, on note :

$$A = (0, 1, a_2, ..., a_N) \in l$$

$$B = (1, 0, b_2, ..., b_N) \in l$$

deux point de l. Comme l est contenue dans X^d_N, le point $(t, 1, a_2 + tb_2, ..., a_N + tb_N)$ est dans X^d_N pour tout t dans k. Comme $C^k_n \neq 0$ (car $d < p$ ou $p = 0$), on obtient le système suivant en développant l'équation obtenue :

$$\begin{aligned} 1 + a_2^d + ... + a_N^d &= 0 \\ b_2 a_2^{d-1} + ... + b_N a_N^{d-1} &= 0 \\ &... \\ a_2 b_2^{d-1} + ... + a_N b_N^{d-1} &= 0 \\ 1 + b_2^d + ... + b_N^d &= 0 \end{aligned}$$

On peut supposer que tous les a_i et tous les b_i sont non nuls, de même pour tous les $\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}$.
En effet si $\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} = 0$ pour un couple i, j, on peut remplacer B par un $A + tB$ où deux coordonnées sont nulles, ce qui nous donne le résultat.

Sinon, en prenant les $N-1$ premières équations parmi les $d-1$ équations centrales dans le système précédent ($d \geqslant N$), on a :

$$\begin{pmatrix} b_2/a_2 & ... & b_N/a_N \\ & ... & \\ (b_2/a_2)^{N-1} & ... & (b_N/a_N)^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2^d \\ ... \\ a_N^d \end{pmatrix} = 0$$

Donc le déterminant de cette équation, $\Pi(b_i/a_i)\Pi_{i<j}(b_i/a_i - b_j/a_j)$, est nul, ce qui est absurde. Donc l est necessairement standard.

□

Proposition 2.1.5. Si $N \geqslant d$, on a $\dim F(X_N^d) = 2N - 3 - d$.

Remarque 2.1.6. Donc, dans le cas $N > d$, il y a des droites non standard.

Démonstration. Dans le cas $N = d$, on a $\dim F(X_N^N) = N - 3$ par la proposition précédente.
Si $N > d$, on coupe X_N^d par un hyperplan H de coordonnée (de sorte que $X_N^d \cap H$ est une hypersurface de Fermat de H). On a alors $F(X_N^d \cap H) = F(X_N^d) \cap F(H)$ comme sous-schémas de $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N)$.
Or $F(H) \simeq \mathbb{G}(1, \mathbb{P}^{N-1})$, donc est de dimension $2N-4$, c'est-à-dire de codimension 2 dans $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N)$. Comme $F(H)$ est lisse et donc localement intersection complète, $\dim F(X_N^d) \leqslant F(X_{N-1}^d) + 2$. Par récurrence on obtient donc $\dim F(X_N^d) \leqslant 2N - d - 3$.
Par la remarque 1.2.1, on sait que $\dim F(X_N^d) \geqslant 2N - d - 3$. D'où l'égalité. □

2.1.2 Étude de N_{l/X_N^d}

Proposition 2.1.7. Soit l une droite standard de X_N^d qui est générique dans son $\mathbb{P}^{r-1}$. On a :

$$\begin{aligned} h^0(l, N_{l/X_N^d}(-1)) &= N - r - 1 \\ h^0(l, N_{l/X_N^d}) &= 2(N - r - 1) \end{aligned}$$

Démonstration.
Soit $\mathcal{L} = N_{l/X_N^d}(-1)$
Par la suite exacte de la proposition 1.2.5, on a $\deg \mathcal{L} = 1 - d$, et rg $(\mathcal{L}) = N-2$. Donc Riemann-Roch nous donne : $h^0(l, \mathcal{L}) = h^1(l, \mathcal{L}) - d + N - 1$. De plus, par la proposition 1.2.8, on a $h^1(l, \mathcal{L}) = \dim(\text{coker } \gamma')$, où :

$$\gamma' : \begin{cases} k^{N+1} & \rightarrow & H^0(l, \mathcal{O}_l(d-1)) \\ (\lambda_0, ..., \lambda_N) & \mapsto & d \sum_{j=0}^{N} \lambda_j (x_j^{d-1})_{|l} \end{cases}$$

Calcul de dim(coker γ') :
l est une droite standard de $\mathbb{P}^N$ contenue dans X_N^d, générique dans $\mathbb{P}^{r-1}$ (où $I_1, ..., I_r$ est une partition de $\{0, ..., N\}$). Elle a pour équation $\{((ty_1 + uz_1)x_{I_1}, ..., (ty_r + uz_r)x_{I_r}) \mid t, u \in k\}$, où x_{I_j} est dans $X^d_{\text{Card } I_j}$, et y, z appartiennent à $\mathbb{P}^{r-1}$ et sont généraux, donc en particulier on peut supposer les z_j tous non nuls.

Calculons $\gamma'(\lambda_0, ..., \lambda_N)$.

$$\begin{aligned}
\gamma'(\lambda_0, ..., \lambda_N) &= d\sum_{j=1}^{r}\sum_{i\in I_j}\lambda_i(ty_j+uz_j)^{d-1}x_i^{d-1} \\
&= d\sum_{j=1}^{r}\sum_{v=0}^{d-1} C_v^{d-1}t^v y_j^v u^{d-1-v} z_j^{d-1-v}\sum_{i\in I_j}\lambda_i x_i^{d-1} \\
&= d\sum_{v=0}^{d-1}\left(\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{y_j}{z_j}\right)^v\sum_{i\in I_j}\lambda_i x_i^{d-1}z_j^{d-1}\right)C_v^{d-1}t^v u^{d-1-v}
\end{aligned}$$

Donc $(\lambda_0, ..., \lambda_N) \in \ker\gamma'$ s'écrit, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
\frac{y_1}{z_1} & \cdots & \frac{y_1}{z_1} & \frac{y_2}{z_2} & \cdots & \frac{y_{r-1}}{z_{r-1}} & \frac{y_r}{z_r} & \cdots & \frac{y_r}{z_r} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\left(\frac{y_1}{z_1}\right)^v & \cdots & \left(\frac{y_1}{z_1}\right)^v & \left(\frac{y_2}{z_2}\right)^v & \cdots & \left(\frac{y_{r-1}}{z_{r-1}}\right)^v & \left(\frac{y_r}{z_r}\right)^v & \cdots & \left(\frac{y_r}{z_r}\right)^v \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\left(\frac{y_1}{z_1}\right)^{d-1} & \cdots & \left(\frac{y_1}{z_1}\right)^{d-1} & \left(\frac{y_2}{z_2}\right)^{d-1} & \cdots & \left(\frac{y_{r-1}}{z_{r-1}}\right)^{d-1} & \left(\frac{y_r}{z_r}\right)^{d-1} & \cdots & \left(\frac{y_r}{z_r}\right)^{d-1}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\lambda_0 x_0^{d-1}z_1^{d-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_N x_N^{d-1}z_r^{d-1}
\end{pmatrix} = 0$$

Si on note A la matrice obtenue, son rang est le même que celui de la matrice de Vandermonde associée, c'est-à-dire $\min(r, d)$, qui est r ici (l étant générique, on peut supposer les (y_j/z_j) tous distincts). D'où $\dim(\ker\gamma') = d - r$.

Soit $\mathcal{L} = N_{l/X_N^d}$
La suite exacte de la proposition 1.2.5 nous donne comme précédemment $\deg\mathcal{L} = N-1-d$ et $\mathrm{rg}\ \mathcal{L} = N-1-1 = N-2$. Donc Riemann-Roch s'écrit $h^0(l,\mathcal{L}) - h^1(l,\mathcal{L}) = 2N-d-3$.
Soit $\beta' : H^0(\mathcal{O}_l(1))^{N+1} \to H^0(\mathcal{O}_l(d))$ obtenu à partir de β de la même façon que γ' à partir de γ. Par un raisonnement identique à celui tenu pour γ', on a $h^1(l,\mathcal{L}) = \dim(\mathrm{coker}\ \beta')$. D'où $h^0(l,\mathcal{L}) = 2N-2-\mathrm{rg}\ \beta'$.
Dans des coordonnées $\beta'(l_0, \ldots, l_N)$ (où $l_i = \lambda_i t + \mu_i u$) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\beta'(\lambda_0, \ldots, \lambda_N, \mu_0, \ldots, \mu_N) &= \sum_{i=0}^{N}(\lambda_i t + \mu_i u)(x_i^d)_{|l} \\
&= \sum_{j=1}^{r}\sum_{i\in I_j}\mu_i x_i^{d-1}z_j^{d-1}u^d \\
&\quad + \sum_{v=1}^{d-1}\left(\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{y_j}{z_j}\right)^v\sum_{i\in I_j}\mu_i x_i^{d-1}z_j^{d-1}\right. \\
&\qquad\left. + \sum_{j=1}^{r}\frac{v}{d-v}\left(\frac{y_j}{z_j}\right)^{v-1}\sum_{i\in I_j}\lambda_i x_i^{d-1}z_j^{d-1}\right)C_v^{d-1}t^v u^{d-v} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r}\sum_{i\in I_j}\mu_i x_i^{d-1}y_j^{d-1}t^d
\end{aligned}$$

Donc calculer le rang de β' correspond à calculer le rang de la matrice $(d+1)\times(2r)$ suivante (après simplifications) :

$$\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\frac{y_1}{z_1} & \cdots & \frac{y_r}{z_r} & \frac{1}{d-1} & \cdots & \frac{1}{d-1} \\
\left(\frac{y_1}{z_1}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{y_r}{z_r}\right)^2 & \frac{2}{d-2}\frac{y_1}{z_1} & \cdots & \frac{2}{d-2}\frac{y_r}{z_r} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\left(\frac{y_1}{z_1}\right)^v & \cdots & \left(\frac{y_r}{z_r}\right)^v & \frac{v}{d-v}\left(\frac{y_1}{z_1}\right)^{v-1} & \cdots & \frac{v}{d-v}\left(\frac{y_r}{z_r}\right)^{v-1} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\left(\frac{y_1}{z_1}\right)^{d-1} & \cdots & \left(\frac{y_r}{z_r}\right)^{d-1} & \frac{d-2}{2}\left(\frac{y_1}{z_1}\right)^{d-2} & \cdots & \frac{d-2}{2}\left(\frac{y_r}{z_r}\right)^{d-2} \\
0 & \cdots & 0 & (d-1)\left(\frac{y_1}{z_1}\right)^{d-1} & \cdots & (d-1)\left(\frac{y_r}{z_r}\right)^{d-1}
\end{pmatrix}$$

qui est $\min(d+1,2r)$. Montrons donc que cette matrice définit une injection. On va montrer que le déterminant d'un mineur (carré de taille maximale) bien choisi est un polynôme non trivial en les $X_i = y_i/z_i$, et comme tout polynôme non nul est génériquement non nul, on aura le résultat. Cherchons le coefficient de $X_1^{2d-2}X_2^{2d-6}X_3^{2d-10}\dots$ (on arrête le produit quand on est à court d'exposants ou à court d'indices). Ce coefficient sera non nul parce que X_1^{2d-2} ne peut venir que des deux dernières lignes, colonnes 1 et $r+1$; puis X_2^{2d-6} vient des deux lignes précédentes, etc. On parcourt deux "droites de pente 2" dans la matrice. Comme la hauteur $(d+1)$ est supérieure à la largeur ($2r \leqslant N$), il n'y a pas de problème. $\square$

Remarque 2.1.8. En reprenant la preuve ci-dessus on constate que l'on a plus généralement $h^0(l, N_{l/X_N^d}(-1)) = N - \min(r,d) - 1$ et $h^0(l, N_{l/X_N^d}) = 2N - \min(d+1, 2r) - 2$.

Remarque 2.1.9. On a plus généralement, pour $-1 \leqslant n \leqslant d/2-1$: $h^0(l, N_{l/X_N^d}(n)) = (n+2)(N-r-1)$.

Proposition 2.1.10. Soit l une droite standard de X_N^d qui est générique dans son $\mathbb{P}^{r-1}$.
On a, pour $r=2$:

$$N_{l/X_N^d} \simeq \mathcal{O}_l(1)^{N-3} \oplus \mathcal{O}_l(2-d)$$

et pour $r=3$:

$$N_{l/X_N^d} \simeq \mathcal{O}_l(1)^{N-4} \oplus \mathcal{O}_l(1-\frac{d}{2}) \oplus \mathcal{O}_l(2-\frac{d}{2})$$

si d est pair,

$$N_{l/X_N^d} \simeq \mathcal{O}_l(1)^{N-4} \oplus \mathcal{O}_l(1-\frac{d-1}{2})^2$$

si d est impair.

Démonstration.

1. Cas $r=2$
   Par la proposition 1.2.5 on a la décomposition suivante de N_{l/X_N^d} :

$$N_{l/X_N^d} \simeq \bigoplus_{i=1}^{N-2} \mathcal{O}_l(a_i) \quad \text{avec} \quad 1 \geqslant a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_{N-2}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
H^0(l, N_{l/X_N^d}(-1)) &= \bigoplus_{i=1}^{N-2} H^0(l, \mathcal{O}_l(a_i - 1)) \\
&= \bigoplus_{\{i|a_i=1\}} H^0(l, \mathcal{O}_l(a_i - 1)) \\
&= \bigoplus_{\{i|a_i=1\}} k
\end{aligned}$$

Or $h^0(l, N_{l/X_N^d}(-1)) = N - r - 1 = N - 3$, d'où $(a_1, \ldots, a_{N-2}) = (1, \ldots, 1, a)$.
De plus

$$\begin{aligned}
\deg(N_{l/X_N^d}(-1)) &= N - 1 - d \quad \text{(par la suite exacte)} \\
&= N - 3 + a
\end{aligned}$$

d'où $a = 2 - d$. Donc $N_{l/X_N^d} \simeq \mathcal{O}_l(1)^{N-3} \oplus \mathcal{O}_l(2 - d)$

2. Cas $r = 3$
   On part de la même décomposition $N_{l/X_N^d} \simeq \bigoplus_{i=1}^{N-2} \mathcal{O}_l(a_i)$ avec $1 \geqslant a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_{N-2}$, et on considère les sections globales après décalage, en appliquant la proposition précédente : $h^0(l, N_{l/X_N^d}) = N - 4$. Donc $(a_1, \ldots, a_{N-2}) = (1, \ldots, 1, a, b)$.
   De même, l'étude des sections globales de $N_{l/X_N^d}(n)$, avec n partie entière de $\frac{d-1}{2} - 2$, impose a et b inférieurs à $-n - 1$. L'étude du degré de N_{l/X_N^d} donne $a + b = 3 - d$, d'où le résultat.

$\square$

Proposition 2.1.11. On suppose $p = 0$ ou $p > d$.
Les seules composantes génériquement réduites de $F(X_N^d)$ correspondent alors au cas N impair et l standard définie à partir d'une partition en sous-ensembles à deux éléments. Il y en a autant que de $\mathbb{P}^{\frac{N+1}{2}}$, c'est-à-dire $N(N-2)...3.1$.

Démonstration. Soit l une droite générique de X_N^d. On a $T_{[l]}F(X_N^d) \simeq H^0(l, N_{l/X_N^d})$ par la proposition 1.2.7. Or $\dim F(X_N^d) = N - 3$ par comptage des droites standard ($p > d$ ou $p = 0$ donc toutes les droites sont standard), et $\dim H^0(l, N_{l/X_N^d}) = 2(N - r - 1)$ (proposition précédente).
Dire qu'il existe un point lisse est équivalent à dire qu'il existe un point lisse dans un ouvert dense arbitraire. Donc on peut supposer ce point l générique. Donc $F(X_N^d)$ lisse en $[l]$ si et seulement si $\dim F(X_N^d) = N - 3 = \dim T_{[l]}F(X_N^d) = 2(N - r - 1)$, c'est-à-dire $2r = N + 1$. Ce qui correspond aux partitions de $\{0, \ldots, N\}$ en sous-ensembles à deux éléments. $\square$

2.2 $F(X_N^{p^r+1})$

On se place désormais en caractéristique $p > 0$, et on étudie $X_N^{p^r+1}$. Il y a alors des droites non standard, comme on le voie dans la proposition suivante. Cette étude nous donnera des informations sur $X_N^{p^r+1}$ pour $d|(p^r + 1)$, en particulier dans la partie 2.2.1.

Proposition 2.2.1. Pour $d = p^r + 1$, il y a exactement $d^3(d-3)$ droites non standard et $3d^2$ droites standard sur X_3^d.

Démonstration. On suppose $l \subset X_3^d$. La droite l n'est pas incluse dans un hyperplan de coordonnées car X_2^d est une courbe qui n'est pas une droite ($d > 1$). Donc on a $l \cap (x_i = 0)$ réduit à un point. on note :

$$A = (0, 1, a_2, a_3) \in l$$

$$B = (1, 0, b_2, b_3) \in l$$

deux point de l. Comme l est contenue dans X_3^d, le point $(t, 1, a_2 + tb_2, a_3 + tb_3)$ est dans X_3^d pour tout t dans k. Comme $d = p^r + 1$, on obtient le système suivant en développant l'équation obtenue :

$$\begin{aligned} 1 + a_2^{p^r+1} + a_3^{p^r+1} &= 0 \\ a_2^{p^r} b_2 + a_3^{p^r} b_3 &= 0 \\ a_2 b_2^{p^r} + a_3 b_3^{p^r} &= 0 \\ 1 + b_2^{p^r+1} + b_3^{p^r+1} &= 0 \end{aligned}$$

La deuxième équation est équivalente à $a_2^{p^{2r}} b_2^{p^r} + a_3^{p^{2r}} b_3^{p^r} = 0$. On a donc le système suivant :

$$\begin{pmatrix} a_2^{p^{2r}} & a_3^{p^{2r}} \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2^{p^r} \\ b_3^{p^r} \end{pmatrix} = 0$$

Si le déterminant de cette matrice est non nul, on a necessairement $b_2 = b_3 = 0$, or $(1, 0, 0, 0)$ n'appartient pas à X_3^d . Donc :

$$a_3 a_2^{p^{2r}} = a_2 a_3^{p^{2r}}$$

Dans le cas où $a_2 a_3$ est nul, on obtient toutes les droites standard : si a_2 (respectivement a_3) est nul, alors b_3 (respectivement b_2) l'est aussi. Il y en a $3d^2$.
Dans le cas contraire, on a $a_2^{p^{2r}-1} = a_3^{p^{2r}-1}$ avec a_2 (et donc a_3) non nul. Donc $a_2 = \omega a_3$ où ω est une racine $p^{2r} - 1$-ième de l'unité. Par symétrie des rôles joués par b_i et a_i dans le premier système, on trouve que l'on a de même $b_2 = \omega' b_3$. En remplaçant a_2 et b_2 dans ce même système on trouve le système suivant :

$$\begin{aligned} \omega' \omega^{p^r} &= -1 \\ \omega \omega'^{p^r} &= -1 \end{aligned}$$

On remarque que ces deux équations sont équvalentes, et que le choix d'un ω impose celui de ω'.

Les points A et B sont donc necessairement de la forme :

$$(0, 1, \omega a, a)$$

$$(1, 0, -\frac{1}{\omega^{p^r}} b, b)$$

où ω est une racine $p^{2r} - 1$-ième de l'unité. Et pour que l soit contenue dans X_3^d il faut et il suffit que A et B soit dans X_3^d.

Étudions juste le cas de A, celui de B étant symétrique. On doit donc avoir a solution de l'équation $1 + a^d + \omega^d a^d = 0$. C'est-à-dire $\omega^d \neq -1$ (pour qu'il y ait une solution) et $a^d = -1/(1 + \omega^d)$. Or, comme $\omega^{p^r+1} = -1$ implique $\omega^{p^{2r}-1} = 1$,

$$\begin{aligned} \text{Card } \left\{ \omega \in k |\ \omega^{p^{2r}-1} = 1 \text{ et } \omega^{p^r+1} \neq -1 \right\} &= \text{Card } \left\{ \omega \in k |\ \omega^{p^{2r}-1} = 1 \right\} - \text{Card } \left\{ \omega \in k | \omega^{p^r+1} = -1 \right\} \\ &= p^{2r} - p^r - 2 \end{aligned}$$

On a donc d choix possibles pour a, de même pour b, et $(d-1)^2 - d - 1$ choix pour ω, tout ces choix étant indépendants. Donc il y a $d^2((d-1)^2 - d - 1) = d^3(d-3)$ droites non standard sur X_3^d. $\square$

2.2.1 Unirationalité de X_N^d pour $d|p^r+1$

C'est la généralisation d'un résultat donné dans [Shi95] pour certaines valeurs de N. On suit ici la démarche de [Deb01] (ex page 67).

Théorème 2.2.2. Si $N \geqslant 3$ et $d|(p^r+1)$, l'hypersurface X_N^d est unirationnelle.

Pour démontrer ce théorème, on va construire une application rationnelle dominante explicite

$$\mathbb{A}_k^{N-1} \dashrightarrow X_N^{q+1}$$

où $q = p^r$.

Proposition 2.2.3. Si $N \geqslant 3$, l'hypersurface X_N^{q+1} est unirationnelle.

Démonstration. On pose donc ici $d = q+1 = p^r+1$. Soit ω une racine d-ième de -1. Un calcul immédiat montre que l'hypersurface X_N^d contient la droite l passant par $(1,\omega,0,...,0)$ et $(0,0,1,\omega,0,...,0)$, d'équation $(t, t\omega, 1-t, (1-t)\omega, 0, ..., 0)$.
Le pinceau d'hyperplans contenant la droite l d'équation $-t\omega x_0 + tx_1 - \omega x_2 + x_3 = 0$, indexés par $t \in k$, induit une application rationnelle $\pi : X_N^d \dashrightarrow \mathbb{A}_k^1$. Elle est définie sur l'ouvert $U = X_N^d - H$, où H est l'hyperplan $\{\omega X_0 - X_1\}$, par :

$$\pi : \begin{pmatrix} k[t] & \to & \mathcal{O}(U) \\ t & \mapsto & \frac{\omega X_2 - X_3}{X_1 - \omega X_0} \end{pmatrix}$$

Ce qui fait de $k(X_N^d)$ une extension de $k(t)$.
Étudions la fibre générique de π au-dessus de $k(t^{1/q})$:
C'est $A = \mathcal{O}(U) \otimes_k k(t^{1/q})$, où $t = \frac{\omega X_2 - X_3}{X_1 - \omega X_0}$, et

$$\mathcal{O}(U) = (k[X_0,...,X_N]/(X_0^d + ... + X_N^d))[\frac{1}{X_1 - \omega X_0}]$$

c'est-à-dire

$$A = k[X_0,...,X_N]/(X_0^d + ... + X_N^d)[(\frac{\omega X_2 - X_3}{X_1 - \omega X_0})^{1/q}]$$

Simplifions l'équation $X_0^d + ... + X_N^d = 0$, en utilisant le fait que $t = \frac{\omega X_2 - X_3}{X_1 - \omega X_0}$, et que l'on s'autorise à en prendre la racine q-ième :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{4} X_i^d &= X_0^d + X_1^d + X_2^d + (t\omega X_0 - tX_1 + \omega X_2)^d + \sum_{i \geqslant 4} X_i^d \\
&= X_0^d + X_1^d + t^{q+1}(\omega X_0 - X_1)^{q+1} + \omega X_2 t^q (\omega X_0 - X_1)^q + \omega^q X_2^q t(\omega X_0 - X_1) + \sum_{i \geqslant 4} X_i^d \\
&= -\omega^q X_0^q y_2 - \omega X_0 y_2^q + y_2^{q+1} + t^{q+1} y_2^{q+1} + \omega X_2 t^q y_2^q + \omega^q X_2^q t y_2 + \sum_{i \geqslant 4} X_i^d \\
&= \omega^q (X_2^q t - X_0^q) y_2 + \omega(X_2 t^q - X_0) y_2^q + (1 + t^{q+1}) y_2^{q+1} + \sum_{i \geqslant 4} X_i^d \\
&= y_1^q y_2 + y_3 y_2^q + \sum_{i \geqslant 4} y_i^d
\end{aligned}$$

Où l'on a effectué le changement de variable :

$$\begin{aligned}
y_1 &= X_2 t^{1/q} - X_0 \\
y_2 &= -X_1 + \omega X_0 \\
y_3 &= \omega(X_2 t^q - X_0) + (1 - t^{q+1})(\omega X_0 - X_1) \\
y_i &= X_i \ \text{ pour } i \geqslant 4.
\end{aligned}$$

Le cas $N = 3$ est un peu particulier. En effet y_2 se factorise dans l'équation de la fibre, c'est-à-dire que la fibre est en fait la réunion de la droite l et de la courbe d'équation $y_1^q + y_2^{q-1} y_3$. Ce qui nous donne :

$$\begin{tikzcd}
V' \times \mathbb{A}^1_k \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r, hook] \arrow[d] & X^d_3 \arrow[dl, dashed, "\pi"] \\
\mathbb{A}^1_k \arrow[r, "q:1"] & \mathbb{A}^1_k &
\end{tikzcd}$$

L'application $(y_1, y_2) \mapsto (y_1, y_2, -\frac{y_1^q}{y_2^{q-1}})$ montre que $V' = \text{Spec }(k[y_1, y_2, y_3]/(y_1^q + y_2^{q-1} y_3))$ est birationnel à $\mathbb{A}^2_k$. D'où une application dominante $\mathbb{A}^3_k \dashrightarrow X^d_3$: l'hypersurface X^d_3 est unirationnelle.
Dans le cas où $N > 3$, on a de même, avec $U' = \text{Spec }(k[y_1, ..., y_N]/(y_1^q y_2 + y_2^q y_3 + y_4^{q+1} + ... + y_N^{q+1}))$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^{N-1}_k \arrow[r, dashed] \arrow[dr] & U' \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r, hook] \arrow[d] & X^d_N \arrow[dl, dashed, "\pi"] \\
& \mathbb{A}^1_k \arrow[r, "q:1"] & \mathbb{A}^1_k &
\end{tikzcd}$$

On vient donc de montrer que X^d_N est unirationnelle. □

On a en particulier démontré la proposition suivante :

Proposition 2.2.4. X_N^{q+1} a un revêtement purement inséparable de degré q qui est rationnel.

Démonstration.(du théorème) Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $md = p^r + 1$. L'application $X_N^{q+1} \twoheadrightarrow X_N^d$ induite par $X_i \mapsto X_i^m$ permet de se ramener au cas de la proposition 2.2.3. □

2.2.2 Description de $F(X_N^{p^r+1})$

On va montrer que ce schéma est lisse de dimension $2N - 6$ (pour la connexité on peut regarder [Bea90]). Pour cela, nous allons étudier $F(X_N^{p^r+1}, x)$, dont on connait explicitement les équations. On se place en un point $x \in X_N^{p^r+1}$ fixé, et on peut supposer que $x_N = 1$. On considère désormais $F(X_N^{p^r+1}, x)$ comme un sous-schema de l'hyperplan $H = \{X_N = 0\} \simeq \mathbb{P}^{N-1}$ de $\mathbb{P}^N$.

Proposition 2.2.5. Le schéma $F(X_N^{p^r+1}, x)$ est de dimension $\geqslant N - 4$, mais il n'est nulle part réduit.

Démonstration. $F(X_N^{p^r+1}, x)$ est défini par les équations suivantes dans $\mathbb{P}^{N-1}$ (d'après un calcul direct fait dans la première partie) :

$$\sum_{i=0}^{N-1} x_i^{p^r} y_i = \sum_{i=0}^{N-1} x_i y_i^{p^r} = \sum_{i=0}^{N-1} y_i^{p^r+1} = 0$$

Donc ici $\dim F(X_N^{p^r+1}, x) \geqslant N - 1 - 3 = N - 4$.

D'autre part, l'espace tangent $T_{[l]} F(X, x)$ est isomorphe ici à k^{N-3} car le rang de la jacobienne est inférieur ou égal à 2, donc $\dim T_{[l]} F(X, x) > \dim F(X, x)$: le schéma $F(X, x)$ n'est nulle part réduit. □

Corollaire 2.2.6. Pour $N \geqslant 4$, l'hypersurface $X_N^{p^r+1}$ est recouverte par des droites.

Corollaire 2.2.7. Le schéma $F(X_N^{p^r+1})$ est lisse de dimension $2N-6$.

Démonstration. Par la proposition 1.3.2, le schéma $F(X_N^{p^r+1})$ est partout de dimension $\geqslant 2N-6$.

Par la proposition 1.2.7, $T_{[l]}F(X_N^{p^r+1})$ est isomorphe à $H^0(l, N_{l/X_N^{p^r+1}})$. Or par la proposition 1.2.5, on a

$$\sum_{i=1}^{N-2} a_i = N-1-d$$

et $a_i \leqslant 1$. De plus, par la proposition précédente, on sait qu'il y a au moins $N-3$ a_i égaux à 1. Donc $(a_1, ..., a_{N-2}) = (1, ..., 1, 2-d)$ (et $2-d<0$). D'où $F(X_N^{p^r+1})$ est lisse de dimension $2N-6$ et

$$N_{l/X} \simeq \mathcal{O}_l(1)^{N-3} \oplus \mathcal{O}_l(2-d)$$

□

Corollaire 2.2.8. Le schéma $F(X_N^{p^r+1}, x)$ est de dimension exactement $N-4$ pour x général.

2.2.3 $X_N^{p^r+1}$ est recouverte par des droites pour $N \geqslant 4$

Dans toute cette partie, on a $N \geqslant 4$ (et $r \geqslant 1$).

Proposition 2.2.9. $X_N^{p^r+1}$ est uniréglé par des droites, mais aucune n'est libre.

Démonstration. Par la proposition précédente, $N_{l/X} \simeq \mathcal{O}_l(1)^{N-3} \oplus \mathcal{O}_l(2-d)$, or $2-d<0$, donc $X_N^{p^r+1}$ ne contient aucune courbe rationnelle libre. □

3 Appendice

On peut calculer directement l'espace tangent à $F(X)$ en $[l]$ par le foncteur des points associé à $F(X)$. Le problème est alors de montrer que le foncteur que l'on considère et le foncteur des points associé au schéma défini à la première partie sont bien identique, c'est-à-dire que la représentabilité du schéma de Hilbert. Pour plus de détails on pourra regarder [Kol96].

On peut considérer le foncteur des points associé à $F(X)$:

Proposition 3.0.10. Le foncteur des points associé à $F(X)$ est :

$$F(X) : \begin{array}{ccc} \{k-\text{schémas}\} & \rightarrow & \mathcal{E}ns \\ T & \mapsto & \left\{ \begin{array}{c} \text{sous-schémas de } X \times_k T \text{ plats sur } T \\ \text{et dont le polynôme de Hilbert des fibres est } t+1 \end{array} \right\} \end{array}$$

Calculons l'espace tangent à $F(X)$ en tant que foncteur : Si $\{l\}$ est un point de $F(X)(k)$, c'est la fibre $F = T_{[l]}F(X)$ de $F(X)(k[\varepsilon])$ (où $\varepsilon^2 = 0$) au-dessus de $\{l\}$:

$$\begin{tikzcd} F(X)(k[\varepsilon]) \arrow[d, "F(X)(\varphi)"] & F \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\ F(X)(k) & \{l\} \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

l est un sous-schéma fermé de X, donc $\mathcal{O}_l$ est un quotient de $\mathcal{O}_X$. Donc F est l'ensemble des $k[\varepsilon]$-algèbre quotient de $\mathcal{O}_{X \times_k \text{Spec } k[\varepsilon]} \simeq \mathcal{O}_X[\varepsilon]$ plates sur $k[\varepsilon]$ qui redonnent $\mathcal{O}_l$ après passage au quotient par ε. C'est les déformations de $[l]$ dans X.

Proposition 3.0.11.

$$T_{[l]}F(X) \simeq H^0(l, N_{l/X})$$

Démonstration.

$F \subset H^0(l, N_{l/X})$:

Soit $A \in F$. Comme A est plate sur $k[\varepsilon]$, et que $\varepsilon k[\varepsilon] \simeq k$ de façon canonique, on a $\varepsilon A \simeq \mathcal{O}_l$ canoniquement. De plus, par définition, $A/\varepsilon \simeq \mathcal{O}_l$, donc A est une extension de la forme $0 \to \mathcal{O}_l \xrightarrow{\times\varepsilon} A \to \mathcal{O}_l \to 0$.

Par ailleurs $\mathcal{O}_X[\varepsilon]$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre et A un quotient de $\mathcal{O}_X[\varepsilon]$, d'où une application $\mathcal{O}_X \to A$. Cette application envoie $\mathcal{I}_{l/X}$, l'idéal définissant l dans $\mathcal{O}_X$, dans εA. En effet en composant par l'application $A \to \varepsilon A$ on retrouve l'application $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/I_{l/X} \simeq \mathcal{O}_l$.

On a donc construit une application $\mathcal{I}_{l/X} \to \mathcal{O}_l$ ($\mathcal{O}_l \simeq \varepsilon A$), qui envoie $\mathcal{I}^2_{l/X}$ sur 0, c'est-à-dire un élément de l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_l}(\mathcal{I}_{l/X}/\mathcal{I}^2_{l/X}, \mathcal{O}_l) = H^0(l, N_{l/X})$.

$H^0(l, N_{l/X}) \subset F$:

Construisons l'inverse de l'application précédente. Soit $\overline{f} \in H^0(l, N_{l/X})$, qui se relève en une application $f : \mathcal{I}_{l/X} \to \mathcal{O}_l$. On considère l'algèbre A quotient de $\mathcal{O}_X[\varepsilon]$ par le faisceau d'idéaux engendré par $(\mathrm{Id}_{\mathcal{O}_X} - \varepsilon f)(\mathcal{I}_{l/X})$. A convient et cette construction est inverse de la précédente. $\square$

Références

[AS91] A.Albano and S.Katz. Lines on the fermat quintic threefold and the infinitesimal generalized hodge conjecture. *Transactions of the American Mathematical Society*, 324 :353–358, 1991.

[Bea90] A. Beauville. Sur les hypersurfaces dont les sections hyperplanes sont à module constant. *Progr. Math.*, 86 I :121–133, 1990.

[BVdV78] W. Barth and A. Van de Ven. Fano-varieties of lines on hypersurfaces. *Arch. math.*, 31 :96–104, 1978.

[Col79] A. Collino. Lines on quartic threefolds. *Journal of the London Mathematical Society*, 19 :257–267, 1979.

[Deb01] O. Debarre. *Higher-Dimensional Algebraic Geometry*. Springer Verlag, 2001.

[DM98] O. Debarre and L. Manivel. Sur la variété des espaces linéaires contenus dans une intersection complète. *Math. Ann.*, 312 :549–574, 1998.

[Har83] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*, volume 52. Springer-Verlag, 3 edition, 1983.

[Kol96] J. Kollár. *Rational Curves on Algebraic Varieties*, volume 32. Springer, 1 edition, 1996.

[Shi95] Ichiro Shimada. A generalization of Morin-Predonzan's theorem on the unirationality of complete intersections. *J. Algebraic Geom.*, 4(4) :597–638, 1995.