fonctions exponentielles

I) Introduction

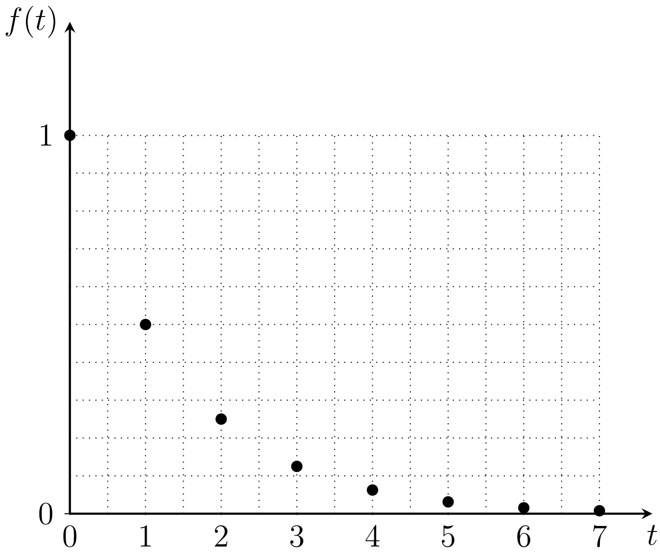
On injecte 1cm^3 d'un médicament M dans le sang d'un patient, à un instant $t = 0$. Chaque heure, la quantité de médicament présente dans le sang diminue de 50%.

1) Suite

Soit u_n la quantité de médicament présente dans le sang au bout de $t = n$ heures. Calculer u_0, u_1, u_2. Exprimer u_n en fonction de n.
On peut remarquer que le médicament a une certaine concentration à tout instant t, pas seulement à $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Modélisons donc le problème par une *fonction*.

2) Fonction

Soit $f(t)$ la concentration du médicament à l'instant t. Elle existe. Nous allons essayer de prolonger de façon la plus naturelle possible la suite (u_n).



En particulier on veut prolonger sans « pointes », de façon lisse.

II) Définition

Soit $a > 0$ fixé. Il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, notée

$$f(x) = a^x$$

telle que, lorsque $x = n$ entier, $f(n) = a \times a \times a \times \cdots \times a$ (n fois).
La fonction f est appelée fonction exponentielle de base a.

Exemple 1
$f(x) = 2^x$. Remplir le tableau suivant avec une précision de 10^{-2}.

t	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3
$f(t)$										

III) Variations

Soit $a > 0$ fixé.

Propriété 2

1) Si $0 < a < 1$, la fonction $f(x) = a^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2) Si $a > 1$, la fonction $f(x) = a^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

IV) Propriétés algébriques

Propriété 3
Soit $a, b > 0$ fixés.

1) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $a^x \times a^y = a^{x+y}$, et $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a^x \times b^x = (ab)^x$.

3) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $(a^x)^y = a^{xy}$.