Exercices : Probabilités

Exercice 1

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits.
On admet que lors du premier appel téléphonique, la probabilité que le correspondant ne décroche pas est 0,4 et que s'il décroche, la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire est 0,3.
On pourra construire un arbre pondéré.

1) On note :
- D_1 l'évènement : « la personne décroche au premier appel » ;
- R_1 l'évènement « la personne répond au questionnaire lors du premier appel ».

Calculer la probabilité de l'évènement R_1.

2) Lorsqu'une personne ne décroche pas au premier appel, on la contacte une seconde fois. La probabilité pour que le correspondant ne décroche pas la seconde fois est 0,3 et la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire sachant qu'il décroche est 0,2. Si une personne ne décroche pas lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

On note :
- D_2 l'évènement : « la personne décroche au second appel ».
- R_2 l'évènement : « la personne répond au questionnaire lors du second appel ».
- R l'évènement : « la personne répond au questionnaire ».

Montrer que la probabilité de l'évènement R est 0,236.

3) Sachant qu'une personne a répondu au questionnaire, calculer la probabilité pour que la réponse ait été donnée lors du premier appel. (on donnera la réponse arrondie au millième)

Exercice 2 (4 points)

On a posé à 1 000 personnes la question suivante : « Combien de fois êtes-vous arrivé en retard au travail au cours des deux derniers mois ? ». Les réponses ont été regroupées dans le tableau suivant :

Retards le 1$^{\text{er}}$ mois / Retards le 2$^{\text{e}}$mois	0	1	2 ou plus	Total
0	262	212	73	547
1	250	73	23	346
2 ou plus	60	33	14	107
Total	572	318	110	1000

1) On choisit au hasard un individu de cette population.

a. Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le premier mois,

b. Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le deuxième mois sachant qu'il n'en a pas eu le premier mois.

2) On souhaite faire une étude de l'évolution du nombre de retards sur un grand nombre n de mois (n entier naturel non nul). On fait les hypothèses suivantes :
- si l'individu n'a pas eu de retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est 0,46.
- si l'individu a eu exactement un retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est 0,66.

– si l'individu a eu deux retards ou plus le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est encore 0,66.

On note A_n, l'évènement « l'individu n'a eu aucun retard le mois n,

B_n, l'évènement « l'individu a eu exactement un retard le mois n »,

C_n, l'évènement « l'individu a eu deux retards ou plus le mois n ».

Les probabilités des évènements A_n, B_n, C_n sont notées respectivement p_n, q_n et r_n.

a. Pour le premier mois ($n = 1$), les probabilités p_1, q_1 et r_1 sont obtenues à l'aide du tableau précédent. Déterminer les probabilités p_1, q_1 et r_1.

b. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n, q_n, et r_n. On pourra s'aider d'un arbre.

c. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -0,2p_n + 0,66$.

d. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - 0{,}55$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.

e. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 3 (4 points)

On considère deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 17 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.
L'urne U_2 contient 1 boule blanche et 19 boules noires indiscernables au toucher.
On réalise des tirages en procédant de la manière suivante :

Étape 1 : On tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.

Étape n ($n \geqslant 2$) :

- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est blanche, on tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.
- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est noire, on tire au hasard une boule dans U_2, on note sa couleur et on la remet dans U_2.

On note A_n l'évènement « le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape n » et p_n sa probabilité. On a donc $p_1 = 1$.

1) Calculer p_2.

2) Montrer que pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$.
On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

3) Calculer p_3.

4) **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier n entier naturel non nul, $p_n > 0,25$.

b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (p_n) est convergente vers un réel noté ℓ.

d. Justifier que ℓ vérifie l'équation : $\ell = 0,8\ell + 0,05$. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 4

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cette puce se déplace sur trois cases notées A, B et C.
À l'instant 0, la puce est en A.
Pour tout entier naturel n :

- si à l'instant n la puce est en A, alors à l'instant $(n+1)$, elle est :

soit en B avec une probabilité égale à $\dfrac{1}{3}$;

soit en C avec une probabilité égale à $\dfrac{2}{3}$.

- si à l'instant n la puce est en B, alors à l'instant $(n+1)$, elle est :

soit en C, soit en A de façon équiprobable
- si à l'instant n la puce est en C, alors elle y reste.

On note A_n (respectivement B_n, C_n) l'évènement « à l'instant n la puce est en A » (respectivement en B, en C).
On note a_n (respectivement $b_n,\ c_n$) la probabilité de l'évènement A_n, (respectivement $B_n,\ C_n$).
On a donc : $a_0 = 1,\ b_0 = c_0 = 0$.
Pour traiter l'exercice, on pourra s'aider d'arbres pondérés.

1) Calculer a_k, b_k et c_k pour k entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant 3$.

2) **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$ et

$$\begin{cases} a_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} & = & = \dfrac{1}{3}a_n \end{cases}$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+2} = \dfrac{1}{6}a_n$.

c. En déduire que, pour tout entier naturel p,

$$\begin{cases} a_{2p} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^p & \text{et} \quad a_{2p+1} = 0 \\ b_{2p} = 0 & \text{et} \quad b_{2p+1} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^p \end{cases}$$

3) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$. Quelle est la limite de c_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 5

Pierre et Claude jouent au tennis. Les deux joueurs ont la même chance de gagner la première partie. Par la suite, lorsque Pierre gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,7. Et s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est 0,8.
Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul. On considère les évènements :
- G_n : « Pierre gagne la n-ième partie ».
- P_n : « Pierre perd la n-ième partie ».

On pose : $p_n = p(\mathrm{G}_n)$ et $q_n = p(\mathrm{P}_n)$.

1) Recherche d'une relation de récurrence.

a. Déterminer p_1 puis les probabilités conditionnelles $p_{\mathrm{G}_1}(\mathrm{G}_2)$ et $p_{\mathrm{P}_1}(\mathrm{G}_2)$.

b. Justifier l'égalité $p_n + q_n = 1$.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,2$.

2) Étude de la suite (p_n).
On pose, pour tout entier naturel n non nul, $v_n = p_n - \dfrac{2}{5}$.

a. Prouver que la suite (v_n) est une suite géométrique et exprimer v_n en fonction de n.

b. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 6

Pour les questions 1 *et* 2, *on donnera les résultats sous forme de fraction et sous forme décimale approchée par défaut à* 10^{-3} *près.*
Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.

1) Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

2) Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie. On considère les évènements suivants :

C1 : « L'enfant choisit la boîte cubique »,

C2 : « L'enfant choisit la boîte cylindrique »,

R : « L'enfant prend une bille rouge »,

V : « L'enfant prend une bille verte ».

a. Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu.

b. Calculer la probabilité de l'évènement R.

c. Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?

3) L'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.

a. Exprimer, en fonction de n, la probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix.

b. Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geqslant 0,99$.