Exercices de révision

1 Nombres complexes

Exercice 1 (Centres étrangers, juin 2008, 5 points)
Le plan complexe est rapporté au repère orthonornial direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; l'unité graphique est 1 cm.

1) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation :

$$z^2 + 4z + 8 = 0.$$

On donnera les solutions sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

2) On note A et B les points du plan d'affixes respectives : $a = 2 - 2\mathrm{i}$ et $b = -a$. Placer ces points sur un graphique qui sera complété au fil de l'exercice.

- **a)** Déterminer l'affixe c du point C, image de B par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
- **b)** On note D l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$; démontrer que l'affixe d du point D est $d = 2 - 6\mathrm{i}$.
- **c)** Placer les points C et D sur le graphique Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

3) α étant un nombre réel non nul, on désigne par G_α, le barycentre du système :

$$\{(\mathrm{A}\ ;\ 1)\ ;\ (\mathrm{B}\ ;\ -1)\ ;\ (\mathrm{C}\ ;\ \alpha)\}.$$

- **a)** Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{C}G_\alpha}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$.
- **b)** En déduire l'ensemble des points G_α lorsque α décrit l'ensemble des réels non nuls. Construire cet ensemble.
- **c)** Pour quelle valeur de α a-t-on $G_\alpha = \mathrm{D}$?

4) On suppose dans cette question que $\alpha = 2$.
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\| \overrightarrow{M\mathrm{A}} - \overrightarrow{M\mathrm{B}} + 2\overrightarrow{M\mathrm{C}} \right\| = 4\sqrt{2}.$$

Exercice 2 (Polynésie, juin 2008, 4 points)

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation

$$z^2 - 6z + 13 = 0.$$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ d'unité graphique 1 cm. On considère les points A, B, C d'affixes respectives
$a = 3 - 2\mathrm{i}, b = 3 + 2\mathrm{i}, c = 4\mathrm{i}$.

2) Faire une figure et placer les points A, B, C.

3) Montrer que OABC est un parallélogramme.

4) Déterminer l'affixe du point Ω, centre du parallélogramme OABC.

5) Déterminer et tracer l'ensemble des points M du plan tels que
$\left\| \overrightarrow{M\mathrm{O}} + \overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}} \right\| = 12.$

6) Soit M un point de la droite (AB). On désigne par β la partie imaginaire de l'affixe du point M. On note N l'image du point M par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que N a pour affixe $\frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}\text{i}$.

b) Comment choisir β pour que N appartienne à la droite (BC) ?

Exercice 3 (Pondichéry, juin 2005, 5 points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On désigne par I le point d'affixe $z_{\text{I}} = 1$, par A le point d'affixe $z_{\text{A}} = 1 - 2\text{i}$, par B le point d'affixe $-2 + 2\text{i}$ et par $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre [AB].
On fera une figure que l'on complètera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1) Déterminer le centre Ω du cercle $(\mathcal{C})$ et calculer son rayon.

2) Soit D le point d'affixe $z_{\text{D}} = \dfrac{3 + 9\text{i}}{4 + 2\text{i}}$.
Écrire z_{D} sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle $(\mathcal{C})$.

3) Sur le cercle $(\mathcal{C})$, on considère le point E, d'affixe z_{E}, tel qu'une mesure en radians de $\left(\overrightarrow{\Omega\text{I}}, \overrightarrow{\Omega\text{E}}\right)$ est $\frac{\pi}{4}$.

a) Préciser le module et un argument de $z_{\text{E}} + \frac{1}{2}$.

b) En déduire que $z_{\text{E}} = \dfrac{5\sqrt{2} - 2}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{4}\text{i}$.

4) Soit r l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' + \frac{1}{2} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

a) Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.

b) Soit K le point d'affixe $z_{\text{K}} = 2$.
Déterminer par le calcul l'image de K par r. Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat ?

Exercice 4 (Amérique du nord, juin 2007, 5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (unité graphique : 4 cm).
Soit A le point d'affixe $z_{\text{A}} = \text{i}$ et B le point d'affixe $z_{\text{B}} = \text{e}^{-\text{i}\frac{5\pi}{6}}$.

1) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. On appelle C l'image de B par r.

a) Déterminer une écriture complexe de r.

b) Montrer que l'affixe de C est $z_{\text{C}} = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$.

c) Écrire z_{B} et z_{C} sous forme algébrique.

d) Placer les points A, B et C.

2) Soit D le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, -1 et 2.

a) Montrer que l'affixe de D est $z_{\text{D}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$. Placer le point D.

b) Montrer que A, B, C et D sont sur un même cercle.

3) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On appelle E l'image de D par h.

a) Déterminer une écriture complexe de h.

b) Montrer que l'affixe de E est $z_{\mathrm{E}} = \sqrt{3}$. Placer le point E.

4) **a)** Calculer le rapport $\dfrac{z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{E}} - z_{\mathrm{C}}}$. On écrira le résultat sous forme exponentielle.

b) En déduire la nature du triangle CDE.

Exercice 5 (d'après bac)
Pour tout nombre complexe z, on pose :

$$P(z) = z^4 - 1$$

1) Factoriser $P(z)$.

2) En déduire les solutions, dans $\mathscr{C}$, de l'équation $P(z) = 0$.

3) Déduire de la question précédente les solutions, dans $\mathscr{C}$, de l'équation $\left(\dfrac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$, d'inconnue z.

2 Intégration

Exercice 6
$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives, dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, des fonctions f et g définies sur $[0;3]$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ et $g(x) = \dfrac{-x}{x+1}$.
Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$ compris entre $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.

Exercice 7
Calculer l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^1 (1-x)e^{-x}dx$.

Exercice 8
On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sin(\pi t)dt$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \displaystyle\int_0^1 t^n dt$.

2) Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n dt = 0$

3) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 9 (d'après bac)
Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$$

1) Calculer $f'(x)$.

2) En déduire $I = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$.

3) On pose $J = \displaystyle\int_{sqrt2}^2 \sqrt{x^2-1}dx$. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I+J$ en fonction de J. En déduire la valeur de J.

Exercice 10 (Asie, juin 2008, partiel)
D - Calcul d'une aire plane
Soit λ un réel stritement positif. La fonction f est définie par $f(x) = (x+1)e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1) À l'aide d'une intégration par parties, calculer ce nombre : $\mathcal{A}(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2) Déterminer $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$. Interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 11 (Pondichéry, juin 2007, 5 points)
On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}.$$

1) Montrer que f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$. Étudier le signe de sa fonction dérivée f', sa limite éventuelle en $+\infty$, et dresser le tableau de ses variations.

2) On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par son terme général $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Justifier que, si $n \leqslant x \leqslant n+1$, alors $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$.

b) Montrer, sans chercher à calculer u_n, que, pour tout entier naturel n,

$$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n).$$

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) Soit F la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$F(x) = [\ln(x+3)]^2.$$

a) Justifier la dérivabilité sur $[0\ ;\ +\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x, le nombre $F'(x)$.

b) On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$.
Calculer I_n.

4) On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.
Calculer S_n. La suite (S_n) est-elle convergente ?

Exercice 12 (France, juin 2007, 3 points)

1) Restitution organisée de connaissances
Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

2) Soient les deux intégrales définies par

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x \quad \text{et } \mathrm{J} = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x.$$

a) Démontrer que $\mathrm{I} = -\mathrm{J}$ et que $\mathrm{I} = \mathrm{J} + \mathrm{e}^{\pi} + 1$.

b) En déduire les valeurs exactes de I et de J.

Exercice 13 (Antilles-Guyane, juin 2005, 6 points)

1) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0\,;\,1]$:

$$\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leqslant \frac{1}{x+n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

2) **a)** Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+n}\,\mathrm{d}x$.

b) Déduire en utilisant **1.**, que :

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \qquad (1)$$

$$\text{puis que} \quad \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}.$$

3) On appelle U la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$U(n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

Démontrer que U est décroissante (on pourra utiliser **2. b.**.)

4) On désigne par V la suite de terme général :

$$V(n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1).$$

Démontrer que V est croissante.

5) Démontrer que U et V convergent vers une limite commune notée γ.
Déterminer une valeur approchée de γ à 10^{-2} près par la méthode de votre choix.

3 Suites

Exercice 14 (La Réunion, juin 2008, 5 points)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 5 \quad \text{et, pour tout entier } \ n \geqslant 1,\ u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right) u_{n-1} + \frac{6}{n}.$$

1) **a)** Calculer u_1.

b) Les valeurs de $u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}$ sont respectivement égales à :
45, 77, 117, 165, 221, 285, 357, 437, 525, 621.
À partir de ces données conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$.

2) On considère la suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.
Justifier que la somme des n premiers termes de cette suite est égale à
$4n^2 + 12n$.

3) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :
$u_n = 4n^2 + 12n + 5$.

4) Valider la conjecture émise à la question **1. b.**.

Exercice 15 (Antilles-Guyane, juin 2006, 5 points)
Partie A
On considère les suites de points A_n et B_n définies pour tout entier naturel n de la manière suivante : sur un axe orienté $(O\ ;\ \overrightarrow{u})$ donné en ANNEXE 3, le point A_0 a pour abscisse 0 et le point B_0 a pour abscisse 12.
Le point A_{n+1} est le barycentre des points $(A_n, 2)$ et $(B_n, 1)$, le point B_{n+1} est le barycentre des points pondérés $(A_n, 1)$ et $(B_n, 3)$.

1) Sur le graphique placer les points A_2, B_2.

2) On définit les suites (a_n) et (b_n) des abscisses respectives des points A_n et B_n. Montrer que :

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}.$$

On admet de même que $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4}$.

Partie B

1) On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = b_n - a_n$.

a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique. En préciser la raison.

b) Donner l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.

c) Déterminer la limite de (u_n). Interpréter géométriquement ce résultat.

2) **a)** Démontrer que la suite (a_n) est croissante (on pourra utiliser le signe de u_n).

b) Étudier les variations de la suite (b_n).

3) Que peut-on déduire des résultats précédents quand à la convergence des suites (a_n) et (b_n) ?

Partie C

1) On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par

$$v_n = 3a_n + 4b_n.$$

Montrer que la suite (v_n) est constante.

2) Déterminer la limite des suites (a_n) et (b_n).

4 Probabilités

Exercice 16 (France, juin 2007, 4 points)
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. On donnera sur la feuille la réponse choisie sans justification. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.
Dans certaines questions, les résultats proposés ont été arrondis à 10^{-3} *près.*

1) Un représentant de commerce propose un produit à la vente. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'il rencontre un client, la probabilité qu'il vende son produit est égale à 0,2. Il voit cinq clients par matinée en moyenne. La probabilité qu'il ait vendu exactement deux produits dans une matinée est égale à :

a. 0,4 b. 0,04 c. 0,1024 d. 0,2048

2) Dans une classe, les garçons représentent le quart de l'effectif. Une fille sur trois a eu son permis du premier coup, alors que seulement un garçon sur dix l'a eu du premier coup. On interroge un élève (garçon ou fille) au hasard. La probabilité qu'il ait eu son permis du premier coup est égale à :

a. 0,043 b. 0,275 c. 0,217 d. 0,033

3) Dans la classe de la question 2, on interroge un élève au hasard parmi ceux ayant eu leur permis du premier coup. La probabilité que cet élève soit un garçon est égale à :

a. 0,100 b. 0,091 c. 0,111 d. 0,25

4) Un tireur sur cible s'entraîne sur une cible circulaire comportant trois zones délimitées par des cercles concentriques, de rayons respectifs 10, 20 et 30 centimètres. On admet que la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone et que le tireur atteint toujours la cible. La probabilité d'atteindre la zone la plus éloignée du centre est égale à :

a. $\dfrac{5}{9}$ b. $\dfrac{9}{14}$ c. $\dfrac{4}{7}$ d. $\dfrac{1}{3}$

Exercice 17 (Centres étrangers, juin 2007, 4 points)

Pour chacune des questions de ce QCM une seule, des trois propositions A, B ou C est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 *point . (Une réponse inexacte enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.*

Si le total est négatif la note de l'exercice est ramenée à 0.

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher, 5 sont rouges et 3 sont noires.

1) On tire au hasard simultanément 3 boules de l'urne.

a) La probabilité de tirer 3 boules noires est :

A $\dfrac{1}{56}$ B $\dfrac{1}{120}$ C $\dfrac{1}{3}$

b) La probabilité de tirer 3 boules de la même couleur est :

A. $\dfrac{11}{56}$ B. $\dfrac{11}{120}$ C. $\dfrac{16}{24}$

2) On tire au hasard une boule dans l'urne, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs et deux à deux indépendants.

a) La probabilité d'obtenir 5 fois une boule noire est :

A. $\left(\dfrac{3}{8}\right)^3 \times \left(\dfrac{3}{8}\right)^3$ B. $\left(\dfrac{3}{8}\right)^5$ C. $\left(\dfrac{1}{5}\right)^5$

b) La probabilité d'obtenir 2 boules noires et 3 boules rouges est :

A. $\left(\dfrac{5}{8}\right)^3 \times \left(\dfrac{3}{8}\right)^2$ B. $2 \times \dfrac{5}{8} + 3 \times \dfrac{3}{8}$ C. $10 \times \left(\dfrac{5}{8}\right)^3 \times \left(\dfrac{3}{8}\right)^2$

3) On tire successivement et sans remise deux boules dans cette urne. On note :
- R_1 l'évènement : « La première boule tirée est rouge » ;
- N_1 l'évènement : « La première boule tirée est noire » ;
- R_2 l'évènement : « La deuxième boule tirée est rouge » ;
- N_2 l'évènement : « La deuxième boule tirée est noire ».

a) La probabilité conditionnelle $P_{\mathrm{R}_1}(\mathrm{R}_2)$ est :

A. $\dfrac{5}{8}$ B. $\dfrac{4}{7}$ C. $\dfrac{5}{14}$

b) La probabilité de l'évènement $\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{N}_2$ est :

A. $\dfrac{16}{49}$ B. $\dfrac{15}{64}$ C. $\dfrac{15}{56}$

c) La probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage est :

A. $\dfrac{5}{8}$ B. $\dfrac{5}{7}$ C. $\dfrac{3}{28}$

d) La probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage sachant qu'on a obtenu une boule noire au second tirage est :

A. $\frac{15}{56}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{5}{7}$

Exercice 18 (Nouvelle-Calédonie, juin 2009, 5 points)
Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.

La probabilité que la première cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$.

Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'évènement : « la n-ième cible est atteinte ».
- $\overline{A_n}$ l'évènement : « la n-ième cible n'est pas atteinte.
- a_n la probabilité de l'évènement A_n
- b_n la probabilité de l'évènement $\overline{A_n}$.

1) Donner a_1 et b_1.
Calculer a_2 et b_2. On pourra utiliser un arbre pondéré.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1$: $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$,
puis : $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$

3) Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul, par $U_n = a_n - \frac{2}{3}$.

a) Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique.
On précisera la raison et le premier terme U_1.

b) En déduire l'expression de U_n en fonction de n, puis l'expression de a_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (a_n).

d) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $a_n \geqslant 0,6665$.

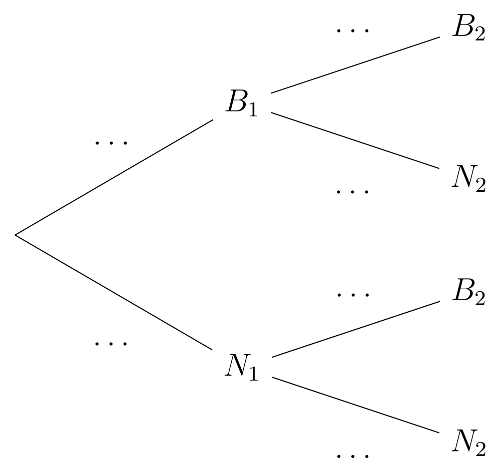
Exercice 19 (Antilles-Guyane, juin 2008, 5 points)
On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

U_1 contient k boules blanches (k entier naturel supérieur ou égal à 1) et 3 boules noires.
U_2 contient 2 boules blanches et une boule noire.

On tire une boule au hasard dans U_1 et on la place dans U_2. On tire ensuite, au hasard, une boule dans U_2. L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

On note B_1 (respectivement N_1) l'évènement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_1 ».
On note B_2 (respectivement N_2) l'évènement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_2 ».

1) **a)** Recopier et compléter par les probabilités manquantes l'arbre ci-dessous :



Montrer que la probabilité de l'évènement B_2 est égale à $\dfrac{3k+6}{4k+12}$.

Dans la suite on considère que $k = 12$.

Les questions 2 et 3 sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

2) Un joueur mise 8 euros et effectue une épreuve.

Si, à la fin de l'épreuve, le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne, le joueur reçoit 12 euros.

Sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.

- **a)** Montrer que les valeurs possibles de X sont 4 et -8.
- **b)** Déterminer la loi de probabilité de la variable X.
- **c)** Calculer l'espérance mathématique de X.
- **d)** Le jeu est-il favorable au joueur ?

3) Un joueur participe n fois de suite à ce jeu.

Au début de chaque épreuve, l'urne U_1 contient 12 boules blanches et 3 noires, et l'urne U_2 contient 2 boules blanches et 1 noire.

Ainsi, les épreuves successives sont indépendantes.

Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité de réaliser au moins une fois l'évènement B_2 soit supérieure ou égale à $0,99$.

5 Géométrie dans l'espace

Exercice 20 (France, juin 2007, 3 points)

L'espace est muni du repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soient (P) et (P′) les plans d'équations respectives $x + 2y - z + 1 = 0$ et $-x + y + z = 0$. Soit A le point de coordonnées $(0\,;\,1\,;\,1)$.

1) Démontrer que les plans (P) et (P′) sont perpendiculaires.

2) Soit (d) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -\dfrac{1}{3} + t \\ y & = & -\dfrac{1}{3} \\ z & = & t \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

Démontrer que les plans (P) et (P′) se coupent selon la droite (d).

3) Calculer la distance du point A à chacun des plans (P) et (P′).

4) En déduire la distance du point A à la droite (d).

Exercice 21 (Antilles-Guyane, septembre 2005, 4 points)
Pour cet exercice, vous recopierez pour chaque question, votre réponse. Chaque réponse juste rapporte 1 point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré $0,5$ *point par réponse fausse. La note finale de l'exercice ne pourra pas être inférieure à zéro.*

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormal.

1) La droite passant par $A(1\ ;\ 2\ ;\ -4)$ et $B(-3\ ;\ 4\ ;\ 1)$ et la droite représentée par $\begin{cases} x &= -11-4t \\ y &= 8+2t \\ z &= 11+5t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ sont :

☐ sécantes ☐ strictement parallèles ☐ confondues ☐ non coplanaires

2) Soient le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x+3y-z+4=0$ et la droite $\mathcal{D}$ représentée par $\begin{cases} x &= t \\ y &= t \\ z &= 8+t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

☐ $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont sécants. ☐ $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont strictement parallèles.

☐ $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$. ☐ Aucune de ces possibilités n'est vraie.

3) La distance du point A$(1\ ;\ 2\ ;\ -4)$ au plan d'équation $2x+3y-z+4=0$ est :

☐ $\dfrac{8\sqrt{14}}{7}$ ☐ 16 ☐ $8\sqrt{14}$ ☐ $\dfrac{8}{7}$

4) Soient le point B$(-3\ ;\ 4\ ;\ 1)$ et la sphère $\mathcal{S}$ d'équation $x^2+y^2+z^2=16$;

☐ B est à l'intérieur de $\mathcal{S}$ ☐ B est à l'extérieur de $\mathcal{S}$

☐ B est sur $\mathcal{S}$ ☐ On ne sait pas.

Exercice 22 (France, septembre 2005, 5 points)
L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1) On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par le point B$(1\ ;\ -2\ ;\ 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-2\ ;\ 1\ ;\ 5)$ et le plan $\mathcal{R}$ d'équation cartésienne $x+2y-7=0$.

a) Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont perpendiculaires.

b) Démontrer que l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ est la droite Δ passant par le point C$(-1\ ;\ 4\ ;\ -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$.

c) Soit le point A$(5\ ;\ -2\ ;\ -1)$. Calculer la distance du point A au plan $\mathcal{P}$, puis la distance du point A au plan $\mathcal{R}$.

d) Déterminer la distance du point A à la droite Δ.

2) **a)** Soit, pour tout nombre réel t, le point M_t de coordonnées $(1+2t\ ;\ 3-t\ ;\ t)$.
Déterminer en fonction de t la longueur AM_t. On note $\varphi(t)$ cette longueur. On définit ainsi une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b) Étudier le sens de variations de la fonction φ sur $\mathbb{R}$; préciser son minimum.

c) Interpréter géométriquement la valeur de ce minimum.