Exercices : Logarithme népérien

Exercice 1
Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(0) = 1$ et $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ pour $x > 0$. Préciser la limite de f en 0.

2) **a.** Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$$

Calculer $g(0)$ et en déduire que sur $\mathbb{R}_+$:

$$\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

b. Par une étude analogue, montrer que si $x \geq 0$ alors :

$$\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$$

c. Établir que pour tout $x > 0$, on a :

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$$

En déduire que f est dérivable en zéro et que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

3) **a.** Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)$. Étudier son sens de variation et en déduire le signe de h sur $[0; +\infty[$.

b. Montrer que, sur $[0; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$.

c. Dresser le tableau de variation de f en précisant la limite de f en $+\infty$.

d. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote. Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 2
Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction numérique f_n définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x)$$

Le problème est consacré à l'étude de la famille des fonctions f_n et à celle d'une suite liée à ces fonctions f_n.
On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Soit h_n la fonction numérique définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$$

Étudier le sens de variation de h_n. En utilisant la valeur de $h_n(0)$, déterminer le signe de $h_n(x)$ sur $]-1; +\infty[$.

2) **a.** Pour tout $x \in]-1;+\infty[$, vérifier que

$$f_1'(x) = h_1(x) \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n > 1, \quad f_n'(x) = x^{n-1} h_n(x)$$

b. Pour tout entier naturel n impair,
- justifier que f_n' et h_n sont de même signe sur $]-1;+\infty[$,
- dresser le tableau de variation de la fonction f_n, en précisant les limites en -1 et $+\infty$.

c. Pour tout entier naturel n pair, dresser le tableau de variation de la fonction f_n, en précisant les limites en -1 et $+\infty$.

3) Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

Exercice 3

Les deux questions suivantes sont relativement indépendantes.

1) Simplifier la fraction $\dfrac{2}{3^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}}$.

2) Déterminer la limite de la suite $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$