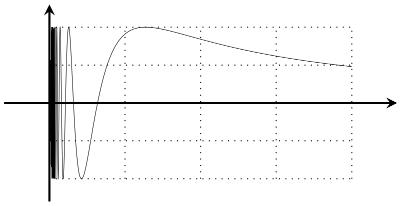


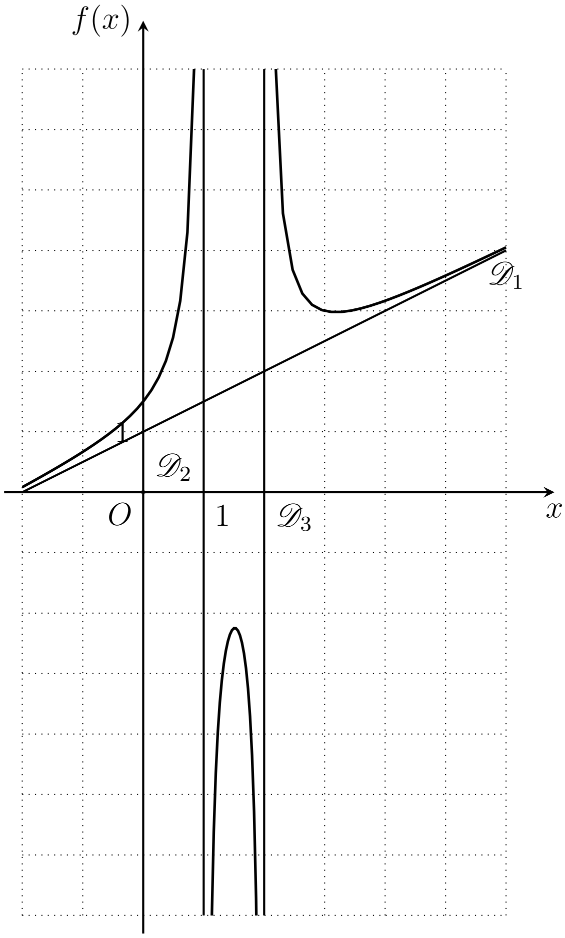
Exercices : Limites et continuité

Exercice 1
Étudier la limite, lorsque n tends vers ∞, des suites suivantes.

1) $u_n = n$; **2)** $u_n = 1$; **3)** $u_n = 3^n$; **4)** $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$; **5)** $u_n = \left(2 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\dfrac{2n^2}{n^2+1}$

Exercice 2
Déterminer la limite de $\dfrac{(-1)^n}{n}$, en rédigeant de façon détaillée la démonstration (revenir à la définition de la limite d'une suite).

Exercice 3
La courbe ci-contre représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{1; 2\}$.



1) Déterminer les limites de f aux bornes du domaine de définition.
2) Dresser le tableau de signe de f' et le tableau de variations de f.
3) Donner les équations des droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$, asymptotes de la courbe représentative de la fonction f.
4) Sachant que f est une fonction de la forme

$$f(x) = ax + b - \frac{1}{(x-c)(x-d)}$$

déterminer a, b, c et d. Justifier.

Exercice 4
Soit $f(x) = \dfrac{-2x^2 - 3x + 5}{x+2}$

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?
2) Étudier la limite de f en chacune des bornes de son ensemble de définition.
3) Déterminer les réels a, b, c tels que, pour tout $x \neq -2$,

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$$

4) Donner une équation des asymptotes éventuelles, justifier.
5) Pour tout $x \neq -2$, étudier le signe de $f(x) + 2x - 1$. Interpréter graphiquement le résultat.
6) Dresser le tableau de variations de f.
7) Montrer que le point $I(-2; 5)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de f.

Exercice 5
Déterminer le domaine de définition des fonctions de l'exercice 6.

Exercice 6
Étudier la limite, lorsque x tends vers $+\infty$ et $-\infty$, des fonctions suivantes.
1) $f(x) = \dfrac{2x^3+x^2+1}{-x^2+3x-2}$; **2)** $f(x) = \dfrac{1-4x^2}{x^2}$; **3)** $f(x) = \dfrac{2x-3}{(x+1)(x-2)}$;
4) $f(x) = \sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}$ (en $+\infty$) ; **5)** $f(x) = \sqrt{4x^2+1}-2x$; **6)** $f(x) = \sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-x}$;
Pour les questions 4 à 6, on pourra utiliser la *quantité conjuguée.*

Exercice 7

1) Déterminer les limites (éventuellement à droite et à gauche) en $x=-1$ et $x=2$ de $f(x) = \dfrac{2x-3}{(x+1)(x-2)}$;

2) Déterminer la limite en $x=1$ de $f(x) = \dfrac{\sqrt{3-x}-2}{x-1}$.

3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$0 < f(x) < 2$$

Déterminer la limite de $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$.

Exercice 8
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x^2}$.

1) Démontrer que, pour tout réel $x \neq 0$, on a $-\dfrac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x^2}$.

2) En déduire la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 9
Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+\sin(x)}{x-1}$.

1) Trouver un encadrement de la fonction f sur $]1;+\infty[$.

2) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 10
Dans chacun des cas suivants, étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2) Soit f la fonction définie sur $[1/5;1[\cup]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{5x-1}-2}{x-1}$.

Exercice 11
Donner des exemples de fonctions f et g telles que

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+g(x) = 1$, (remarque : on peut remplacer 1 par un nombre réel arbitraire).

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+g(x)$ n'existe pas.

Exercice 12 (Vrai / Faux)
Pour chaque affirmation, on demande une justification (contre-exemple ou preuve). Il peut être utile, pour aider à la réflexion, de chercher des exemples graphiquement.
Soit f une fonction définie sur $[0;+\infty[$.

1) Si f n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) Si f est une fonction croissante sur $[0;+\infty[$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors f n'est pas majorée.

4) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors il existe au moins un intervalle de la forme $]A;+\infty[$, avec $A \in \mathbb{R}$, sur lequel f est croissante.

Exercice 13
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Est-ce que l'équation $f(x) = 0$ a une solution ?

Exercice 14
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue ayant le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-5	0	1	3	10	$+\infty$
f	1 ↘	-5 ↗	3 ↘	-10 ↗	3 ↘	2 ↗	$+\infty$

Quel est le nombre de solution de l'équation $f(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 15
Résoudre de façon approchée à 10^{-2} l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ sur $\mathbb{R}$.