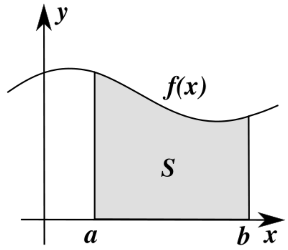

Exercices : Intégration

Exercice 1 (savoir calculer)
Déterminer *une* primitive pour chacune des fonctions définies ci-dessous. On précisera à chaque fois le domaine de définition.

1) $f_1(x) = x^2 + 4x + 1$ **2)** $f_2(x) = 5x^3 - 2x^2 + 1$ **3)** $f_3(x) = -\dfrac{3}{x^2}$ **4)** $f_4(x) = -\dfrac{3}{x}$
5) $f_5(x) = \dfrac{2}{2x-1}$ **6)** $f_6(x) = \dfrac{1}{4x-8}$ **7)** $f_7(x) = \dfrac{2x^2}{x^3+1}$ **8)** $f_8(x) = \cos(3x+2)$
9) $f_9(x) = e^{2x+1}$ **10)** $f_{10}(x) = 2e^{-3x+1}$ **11)** $f_{11}(x) = xe^{-x^2}$

Exercice 2 (savoir calculer : la suite)
Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 xe^{x^2+1}dx \qquad \int_{-\ln 3}^{\ln 2} \frac{-e^x}{(e^x+1)^2}dx \qquad \int_{-1}^{0} \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

Calculer la valeur moyenne des fonction f_4 et f_9 sur l'intervalle $[1;5]$.

Exercice 3 (d'après bac)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$.

1) Calculer $I_1 = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$

2) Soit $I_2 = \displaystyle\int_0^1 g(x)dx$. Calculer $I_1 + I_2$ et en déduire la valeur de I_2.

Exercice 4
On considère les intégrales J et K définies par

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt \qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt$$

Calculer $J+K$ et $J-K$, en déduire les valeurs de J et K.

Exercice 5 (Inde, avril 2007)
On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}.$$

1) Montrer que f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$. Étudier le signe de sa fonction dérivée f', sa limite éventuelle en $+\infty$, et dresser le tableau de ses variations.

2) On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par son terme général $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)dx$.

a. Justifier que, si $n \leqslant x \leqslant n+1$, alors $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$.

b. Montrer, sans chercher à calculer u_n, que, pour tout entier naturel n,

$$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n).$$

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) Soit F la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = [\ln(x+3)]^2$.

a. Justifier la dérivabilité sur $[0\ ;\ +\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x, le nombre $F'(x)$.

b. On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)dx$. Calculer I_n.

4) On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.
Calculer S_n. La suite (S_n) est-elle convergente ?

Exercice 6

Pour n entier naturel non nul, soit f_n la fonction définie sur $I = [0; +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$$

Soit a un élément non nul fixe dans I. Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n(a) = \int_0^a f_n(x)dx$$

1) Calculer $I_0(a)$.

2) Montrer que, pour tout x de I et pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$$f_n'(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x) \qquad \text{et} \quad f_n(0) = 0$$

En déduire que, pour tout $n \geq 1$,

$$I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\frac{a^n}{n!}e^{-a}$$

3) En déduire que pour tout $n > 0$, $I_n(a) = 1 - \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}\right) e^{-a}$.

4) Dans cette question, on pose $a = 1$. On appelle (u_n) la suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) e^{-1} = \int_0^1 f_n(x)dx$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$ et donner une interprétation géométrique de u_n.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in [0; 1]$,

$$f_n(x) \leq \frac{1}{n!}x^n$$

c. En déduire l'encadrement pour tout entier naturel n

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

puis la limite de (u_n).

d. Déduire enfin que $e = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 7 (mécanique)

TD 5 page 213

Exercice 8

Exercice 9
On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier n aturel n non nul, par

$$J_n = \int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t}dt.$$

1) Démontrer que la suite (J_n) est croissante.

2) *Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par :

$$I_n = \int_1^n (t+1)e^{-t}dt.$$

a. Justifier que, pour tout $t \geqslant 1$, on a $\sqrt{t+1} \leqslant t+1$.

b. En déduire que $J_n \leqslant I_n$.

c. Calculer I_n en fonction de n. En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel (indépendant de n).

d. Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

Exercice 10
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1+x)e^{-x}$.

1) Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.

2) On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_{-1}^n f(x)dx.$$

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n \geqslant 0$.

b. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

3) **a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tous réels a et b :

$$\int_a^b f(x)dx = (-2-b)e^{-b} + (2+a)e^{-a}.$$

b. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

c. Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

d. Donner une interprétation graphique de cette limite.

4) Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\displaystyle\int_{-1}^{\alpha} f(x)dx = e$.

Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire ?

Exercice 11 (aire d'un cercle)
Le but de cet exercice est de calculer l'aire du disque, puis le volume de la sphère.

1) On admet que la fonction Arcsin définie sur $[-1,1]$ est dérivable sur $]-1,1[$ et que $\text{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

a. Montrer que l'aire du cercle de rayon 1 est deux fois l'aire comprise entre la courbe d'équation $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ et l'axe des abcisses. Dans toute la suite, on note $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$.

b. Montrer que

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

(on pourra faire une intégration par parties de $1 \times \sqrt{1-x^2}$).

c. En utilisant judicieusement l'égalité $\dfrac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}$, montrer que

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - I = I$$

d. En déduire la valeur de I.

e. En déduire l'aire d'un cercle de rayon 1.

2) Par un calcul analogue, déterminer l'aire d'un cercle de rayon r.