Exercices : Géométrie dans l'espace

Exercice 1 (Pondichéry, avril 2007 — partiel)
L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.
On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x+y-2z+4=0$ et les points A de coordonnées $(3\,;\,2\,;\,6)$, B de coordonnées $(1\,;\,2\,;\,4)$, et C de coordonnées $(4\ ;\ -2\ ;\ 5)$.

1) **a.** Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.
b. Vérifier que ce plan est le plan $\mathscr{P}$.

2) **a.** Montrer que le triangle ABC est rectangle.
b. Écrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par O et perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.
c. Soit K le projeté orthogonal de O sur $\mathscr{P}$. Calculer la distance OK.
d. Calculer le volume du tétraèdre OABC.

Exercice 2 (Liban, juin 2007)
Pour chacune des 5 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.
L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.
On considère la droite (d) dont un système d'équations paramétriques est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2-\dfrac{t}{2} \\ y & = & 1 \\ z & = & 5-\dfrac{3t}{2} \end{array}\right. \qquad (t \in \mathbb{R})$$

On note A le point de coordonnées $(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$, B le point de coordonnées $(4\ ;\ -2\ ;\ 2)$ et C le point de (d) d'abscisse 1.

1) Proposition 1
« La droite (d) est parallèle à l'axe $(O\ ;\ \overrightarrow{\jmath})$ ».

2) Proposition 2
« Le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+3z-5=0$ est le plan passant par A et orthogonal à (d) ».

3) Proposition 3
« La mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est $\dfrac{\pi}{3}$ radians ».

4) Proposition 5
« La sphère de centre C et passant par B coupe le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+3z-5=0$ ».

Exercice 3 (Nouvelle-Calédonie, novembre 2006)
Première partie
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$. On considère :
– les points $A(0\,;\,0\,;\,3)$, $B(2\,;\,0\,;\,4)$, $C(-1\ ;\ 1\ ;\ 2)$ et $D(1\ ;\ -4\ ;\ 0)$
– les plans $(\mathscr{P}_1)\ :\ 7x+4y-3z+9=0$ et $(\mathscr{P}_2) : x-2y=0$.
– les droites (Δ_1) et (Δ_2) définies par leurs systèmes d'équations paramétriques respectifs

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1+t \\ y & = & -8+2t \quad t \in \mathbb{R} \\ z & = & -10+5t \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 7+2t' \\ y & = & 8+4t' \quad t' \in \mathbb{R} \\ z & = & 8-t' \end{array}\right.$$

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

	a.	b.	e.	d.
1. Le plan $(\mathscr{P}_1)$ est	Le plan (ABC)	Le plan (BCD)	Le plan (ACD)	Le plan (ABD)
2. La droite (Δ_1) contient	Le point A	Le point B	Le point C	Le point D
3. Position relative de $(\mathscr{P}_1)$ et de (Δ_1)	(Δ_1) est strictement parallèle a $(\mathscr{P}_1)$	(Δ_1) est incluse dans $(\mathscr{P}_1)$	(Δ_1) coupe $(\mathscr{P}_1)$	(Δ_1) est orthogonale à $(\mathscr{P}_1)$
4. Position relative de (Δ_1) et de (Δ_2)	(Δ_1) est strictement parallèle à (Δ_2)	(Δ_1) et (Δ_2) sont confondues	(Δ_1) et (Δ_2) sont sécantes	(Δ_1) et (Δ_2) sont non coplanaires.
5. L'intersection de $(\mathscr{P}_1)$ et de $(\mathscr{P}_2)$ est une droite dont une représentation paramétrique est	$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & -2+\frac{1}{2}t \\ z & = & 3t \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2t \\ y & = & t \\ z & = & 3+6t \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 5t \\ y & = & 1-2t \\ z & = & t \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1+t \\ y & = & 2+t \\ z & = & -3t \end{array}\right.$

Deuxième partie

L'espace est rapporté à un repère orthonormai $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$. On considère la droite $(\mathscr{D})$ passant par A(0 ; 0 ; 3) et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}(1\ ;\ 0\ ;\ -1)$ et la droite $(\mathscr{D}')$ passant par B(2 ; 0 ; 4) et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{v}(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$.
L'objectif est de démontrer qu'il existe une droite unique perpendiculaire à la fois à $(\mathscr{D})$ et à $(\mathscr{D}')$, de la déterminer et de dégager une propriété de. cette droite.

1) On considère un point M appartenant à $(\mathscr{D})$ et un point M' appartenant à $(\mathscr{D}')$. définis par $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{BM'} = b\overrightarrow{v}$, où a et b sont de nombres réels.

Exprimer les coordonnées de M, de M' puis du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction de a et b.

2) Démontrer que la droite (MM') est perpendiculaire à $(\mathscr{D})$ et à $(\mathscr{D}')$ si et seulement si le couple $(a\ ;\ b)$ est solution du système

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2a+b & = & 1 \\ a+2b & = & -1 \end{array}\right.$$

3) Résoudre ce système. En déduire les coordonnées des deux uniques points M et M', que nous noterons ici H et H', tels que la droite (HH$'$) soit bien perpendiculaire commune à $(\mathscr{D})$ et à $(\mathscr{D}')$. Montrer que HH$' = \sqrt{3}$ unités de longueur.

4) On considère un point M quelconque de la droite $(\mathscr{D})$ et un point M' quelconque de la droite $(\mathscr{D}')$.

a. En utilisant les coordonnées obtenues à la question 1, démontrer que

$$MM'^2 = (a+b)^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2 + 3.$$

b. En déduire que la distance MM' est minimale lorsque M est en H et M' est en H$'$.

Exercice 4 (Polynésie, septembre 2006)
L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.
Soit (P_1) le plan d'équation cartésienne $-2x+y+z-6=0$ et (P_2) le plan d'équation cartésienne $x-2y+4z-9=0$.

1) Montrer que (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires.
On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal non nul à l'un est orthogonal à un vecteur normal non nul à l'autre.

2) Soit (D) la droite d'intersection de (P_1) et (P_2).
Montrer qu'une représentation paramétrique de (D) est :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & -7+2t \\ y & = & -8+3t \\ z & = & t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

3) Soit M un point quelconque de (D) de paramètre t et soit A le point de coordonnées $(-9\ ;\ -4\ ;\ -1)$.

a. Vérifier que A n'appartient ni à (P_1), ni à (P_2).

b. Exprimer $\mathrm{A}M^2$ en fonction de t.

c. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=2t^2-2t+3$.
- Étudier les variations de f.
- Pour quel point M, la distance $\mathrm{A}M$ est-elle minimale ?
Dans la suite, on désignera ce point par I.
- Préciser les coordonnées du point I.

4) Soit (Q) le plan orthogonal à (D) passant par A.

a. Déterminer une équation de (Q).

b. Démontrer que I est le projeté orthogonal de A sur (D).

Exercice 5 (France, juin 2008)
Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$, on considère les points

$$\mathrm{A}(1\ ;\ 1\ ;\ 0), \mathrm{B}(1\ ;\ 2\ ;\ 1) \text{ et } \mathrm{C}(3\ ;\ -1\ ;\ 2).$$

1) **a.** Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne
$2x+y-z-3=0$.

2) On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x+2y-z-4=0$ et $2x+3y-2z-5=0$.
Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est une droite $(\mathcal{D})$, dont une représentation paramétrique est :

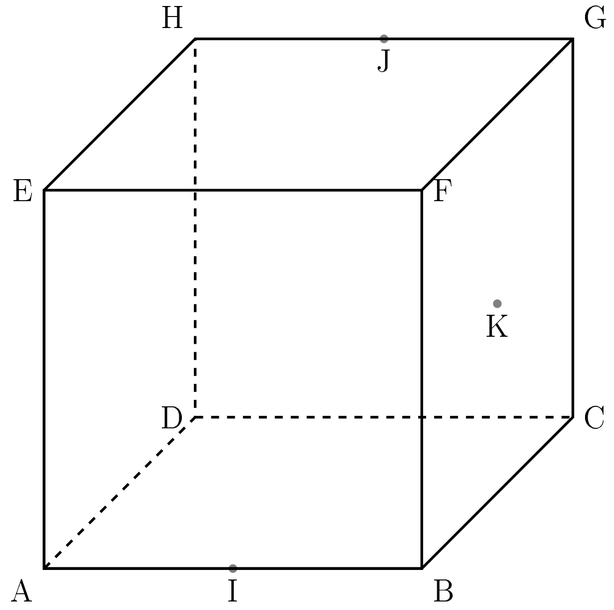
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2+t \\ y & = & 3 \\ z & = & t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$$

3) Quelle est l'intersection des trois plans (ABC), (P) et (Q) ?

4) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Déterminer la distance du point A à la droite $(\mathcal{D})$.

Exercice 6 (Antilles-Guyane, septembre 2006)

Dans un cube ABCDEFGH, on désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [GH]. K désigne le centre de la face BCGE. Les calculs seront effectués dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.



1) **a.** Démontrer que le quadrilatère DIFJ est un parallélogramme.

Établir que DIFJ est en fait un losange et montrer que l'aire de ce losange est égale à $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

b. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (DIJ).

En déduire une équation cartésienne de ce plan.

c. Déterminer la distance du point E au plan (DIJ), puis calculer le volume de la pyramide EDIFJ. On rappelle que le volume V d'une pyramide de hauteur h et de base correspondante $\mathcal{B}$ est donné par la formule suivante $\mathrm{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$.

2) Soit (Δ) la droite passant par E et orthogonale au plan (DIJ)

a. Donner une représentation paramétrique de (Δ) et prouver que K est un point de (Δ).

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection L de (Δ) et du plan (DIJ).

c. Vérifier que L est le centre de gravité du triangle BEG.

3) Soit (S) l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - x + \frac{4}{3} = 0$$

a. Vérifier que (S) est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

b. Montrer que L est un point de (S), Quelle propriété géométrique relative à (S) et au plan (DIJ) peut-un déduire de ce dernier résultat ?