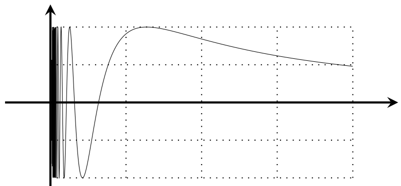

Exercices : Dérivation

Exercice 1

1) Soit g la fonction définie par $g(0) = 0$ et $g(x) = x^2 \sin(1/x)$ pour tout $x \neq 0$.

a. Montrer que g est dérivable en 0.

b. Montrer que l'axe des abscisses est tangent à $\mathscr{C}_f$ en 0.

2) **a.** Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $g\left(\dfrac{1}{k\pi}\right) = 0$.

b. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Pourquoi y a-t-il une infinité de nombres $\dfrac{1}{k\pi}$, avec $k \in \mathbb{N}$, dans $[0, \varepsilon[$.

3) Soit $\mathscr{C}$ une courbe (lisse) et T sa tangente en un point A. Est-il vrai qu'il existe un voisinage de A tel que la tangente T en A ne coupe $\mathscr{C}$ qu'en A sur ce voisinage ?

Exercice 2

Est-ce que la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ est dérivable en 0 ?

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour tout $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

1) Montrer que f est continue en 0

2) Montrer que la fonction $x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

3) Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 4

Soit f une fonction continue de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in [0;1]$, on pose $g(t) = f(4(t - t^2))$.

1) Montrer que g est bien définie et continue sur $[0;1]$.

2) On pose $f(t) = f(t/2)$ pour tout $t \in [0;1]$. Montrer que $h = 0$ n'implique pas forcément $f = 0$. (on pourra donner un contre-exemple).

3) Montrer que $g = 0$ implique $f = 0$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie, pour tout réel $x \neq 1$, par

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3 - 1}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

1) Montrer que, pour tout $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{P(x)}{(x^3 - 1)^2}$, où P est une fonction polynôme de degré 3 que l'on précisera.

2) **a.** Étudier les variations de la fonction P sur $\mathbb{R}$ et démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

b. En déduire le signe de $P(x)$ selon les valeurs du réel x.

3) En utilisant les questions précédentes, déterminer les variations de la fonction f sur les intervalles où elle est définie.

4) **a.** Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point $A(0;1)$.

b. Préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T.

5) Préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à sa tangente en $x = -1$.

6) Vérifier les résultats obtenus précédemment en visualisant à la calculatrice la courbe $\mathscr{C}$ et les tangentes étudiées.