Exercices : Nombres complexes

Exercice 9 (Polynésie juin 2007)
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On prendra 1 cm pour unité graphique. Les questions suivantes sont indépendantes.

1) Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :

$$\overline{z} - 3iz - 3 + 6i = 0$$

2) On considère le point A d'affixe $4 - 2i$.
Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point B tel que OAB soit un triangle équilatéral de sens direct.

3) Soit D le point d'affixe 2i.

a. Représenter l'ensemble (E) des points M d'affixe z différente de 2i tels que :

$$\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

b. Représenter l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $z = 2i + 2e^{i\theta}$, θ appartenant à $\mathbb{R}$.

4) À tout point M d'affixe $z \neq -2$, on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \dfrac{z-1}{\overline{z}+2}$.
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z différente de -2 tels que $|z'| = 1$.

Exercice 10 (France, juin 2007)
Partie A
On considère l'équation :

$$(E) \quad z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$$

où z est un nombre complexe.

1) Démontrer que le nombre complexe i est solution de cette équation.

2) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z on ait :

$$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)\left(az^2 + bz + c\right).$$

3) En déduire les solutions de l'équation (E).

Partie B
Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives i, $2 + 3i$ et $2 - 3i$.

1) Soit r la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.
Déterminer l'affixe du point A′, image du point A par la rotation r.

2) Démontrer que les points A′, B et C sont alignés et déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B qui transforme C en A′.

Exercice 11 (France, juin 2008)
Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (unité graphique : 1 cm).
Soient A, B et I les points d'affixes respectives 1 + i, $3 - i$ et 2.
À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$. Le point M' est appelé l'image de M.

1) Faire une figure sur une feuille de papier millimétré et compléter cette figure tout au long de l'exercice.

2) Calculer les affixes des points A′ et B′, images respectives des points A et B. Que remarque-t-on ?

3) Déterminer les points qui ont pour image le point d'affixe -5.

4)
- **a.** Vérifier que pour tout nombre complexe z, on a : $z' + 4 = (z - 2)^2$.
- **b.** En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$ et, lorsque z est différent de 2, une relation entre $\arg(z' + 4)$ et $\arg\,(z - 2)$,
- **c.** Que peut-on dire du point M' lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon 2 ?

5) Soient E le point d'affixe $2 + 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, J le point d'affixe -4 et E′ l'image de E.
- **a.** Calculer la distance IE et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{IE}\right)$.
- **b.** Calculer la distance JE′ et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{JE'}\right)$.
- **c.** Construire à la règle et au compas le point E′ ; on laissera apparents les traits de construction.

Exercice 12 (Asie juin 2007)
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. L'unité graphique est 4 cm.
Soit λ un nombre complexe non nul et différent de 1.
On définit, pour tout entier naturel n, la suite (z_n) de nombres complexes par :

$$\begin{cases} z_0 & = & 0 \\ z_{n+1} & = & \lambda \cdot z_n + i \end{cases}$$

On note M_n le point d'affixe z_n.

1) Calcul de z_n en fonction de n et de λ.
- **a.** Vérifier les égalités : $z_1 = i$; $z_2 = (\lambda + 1)i$; $z_3 = (\lambda^2 + \lambda + 1)i$.
- **b.** Démontrer que, pour tout entier n positif ou nul : $z_n = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \cdot i$.

2) Étude du cas $\lambda = i$.
- **a.** Montrer que $z_4 = 0$.
- **b.** Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de z_n.
- **c.** Montrer que M_{n+1} est l'image de M_n par une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
- **d.** Représenter les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

3) Caractérisation de certaines suites (z_n).
- **a.** On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\lambda^k = 1$.
  Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_{n+k} = z_n$.
- **b.** Réciproquement, monter que s'il existe un entier naturel k tel que, pour tout entier naturel n on ait l'égalité $z_{n+k} = z_n$ alors : $\lambda^k = 1$.