Devoir de mathématiques pour le vendredi 11 décembre

Exercice 12

1) La fonction h_n est dérivable sur $]-1;+\infty[$ car composée de fonctions dérivables sur $]-1;+\infty[$.

Pour tout $x > -1$, $h_n'(x) = n\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1+x-x}{(1+x)^2} = \dfrac{nx+n+1}{(1+x)^2}$.

De plus $nx+n+1$ s'annule en $-\dfrac{n+1}{n} < -1$ donc $h_n' > 0$.

x	-1		$+\infty$
$h_n'(x)$		$+$	
h_n		$\nearrow$	

$h_n(0) = n\ln(1) + 0 = 0$ donc,

- pour tout $x > 0$, la croissance de h_n nous donne $h_n(x) > 0$.
- pour tout $-1 < x < 0$ la croissance de h_n nous donne $h_n(x) < 0$.

2) **a.** Cas $n = 1$: Pour tout $x > -1$, $f_1 : x \mapsto x\ln(1+x)$ est dérivable et

$$f_1'(x) = \ln(1+x) + x \times \frac{1}{1+x} = h_1(x)$$

Cas $n > 1$: Pour tout $x > -1$, f_n est dérivable et

$$f_n'(x) = nx^{n-1}\ln(1+x) + x^n \times \frac{1}{1+x} = x^{n-1}\left(n\ln(1+x) + x \times \frac{1}{1+x}\right) = x^{n-1}h_n(x)$$

b. Si $n = 1$, le résultat est immédiat. Si $n > 1$ est impair, alors $n-1$ est pair ($n-1 = 2k$, avec k entier), et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^{n-1} = (x^2)^k \geq 0$. Ainsi

x	-1		0		$+\infty$
x^{n-1}		$+$	0	$+$	
$h_n(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
f_n	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- $f_n(0) = 0 \times \ln(1) = 0$
- Limite en -1 :
  $\lim\limits_{x\to-1} x^n = (-1)^n = -1$ car n impair.
  De plus $\lim\limits_{x\to-1} \ln(1+x) = \lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$.
  Donc $\lim\limits_{x\to-1} f_n(x) = +\infty$ par produit de limites.
- Limite en $+\infty$:
  $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ par produit de limites.

(pour le cas $n = 1$, on se contente de supprimer la première ligne du tableau de signes).

c. On procède de même, sauf que x^{n-1} est maintenant du signe de x, puisque $n-1$ est impair.

x	-1		0		$+\infty$
x^{n-1}		$-$	0	$+$	
$h_n(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$+$	0	$+$	
f_n	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

- Limite en -1 : $\lim\limits_{x\to -1} x^n = (-1)^n = 1$ car n pair. De plus $\lim\limits_{x\to -1} \ln(1+x) = -\infty$ comme ci-dessus. Donc $\lim\limits_{x\to -1} f_n(x) = -\infty$ par produit de limites.
- Limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to +\infty} f_n(x) = +\infty$ par produit de limites comme ci-dessus.

3) Étudier des positions relatives, c'est étudier un signe. Ici, nous allons étudier, sur $]-1;+\infty[$, le signe de

$$f_1(x) - f_2(x) = x\ln(1+x) - x^2\ln(1+x) = (x\ln(1+x))\,(1-x)$$

Bien entendu, avant de dresser le tableau de signes, il faut *factoriser* l'expression.

x	-1		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln(1+x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f_1(x) - f_2(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
pos. rel.		$\mathscr{C}_1$ au-**dessus** de $\mathscr{C}_2$		$\mathscr{C}_1$ au-**dessus** de $\mathscr{C}_2$		$\mathscr{C}_1$ au-**dessous** de $\mathscr{C}_2$	

On pouvait déjà prédire que f_1 serait au-dessus de f_2 au voisinage de -1, au vue des tableaux de variations de ces deux fonctions.

Exercice 13

2) **c.** D'après **a.** et **b.**, pour tout $x > 0$ on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

c'est-à-dire

$$-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) - x \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

En divisant par x^2 (non nul, puisque $x > 0$), il vient

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$$

La fonction f est dérivable en 0 si et seulement si la limite en 0 de $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ existe et est finie. Or

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

De plus $\lim\limits_{x\to 0} -1/2 = \lim\limits_{x\to 0} -1/2 + x/3 = -1/2$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes, la limite de $\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ existe et vaut $-1/2$.

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1/2$.

3) **a.** La fonction h est composée de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$ donc est dérivable sur $[0;+\infty[$. Pour tout $x \geq 0$,

$$h'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1-1-x}{(1+x)^2} = -\frac{x}{(1+x)^2} \leq 0$$

Donc h est décroissante sur $[0;+\infty[$. Ainsi, pour tout $x \geq 0$, $h(x) \leq 0$.

b. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{1+x}\times x - \ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{h(x)}{x^2}$

c.

x	0	$+\infty$
x^2	0 $\quad +$	
$h(x)$	0 $\quad -$	
$f'(x)$	$-1/2$ $\quad -$	
f	1 $\searrow$	0

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+x}{x} = 1$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1+x}{x} \times \frac{\ln(1+x)}{1+x}\right) = 0$$

par produit de limites.

d. Asymptote : la limite de f en $+\infty$ est finie et vaut 0, donc f admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = 0$.

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = -\dfrac{1}{u_n+2}$

1) Montrons que la propriété :

$$\mathscr{P}(n) : \quad -1 < u_n < 0$$

est vraie pour tout $n \geq 1$.

- $\underline{\mathscr{P}(1)}$ est vraie car $u_1 = -\dfrac{1}{4+2} = -\dfrac{1}{6}$.
- $\underline{\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)}$: Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} -1 < u_n < 0 &\Longrightarrow 1 < u_n + 2 < 2 \\ &\Longrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{u_n+2} < \frac{1}{1} \qquad \text{(car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est strictement décroissante sur }]0;+\infty[\text{)} \\ &\Longrightarrow -1 < -\frac{1}{u_n+2} < -\frac{1}{2} < 0 \quad \text{(car } x \mapsto -x \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}\text{)} \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- <u>Conclusion</u> : Pour tout $n \geq 1 \qquad -1 < u_n < 0$

2) En $n = 0$, $v_0 = 1/5$ est bien défini. D'après la réponse à la question précédente, pour tout $n \geq 1$, $-1 < u_n < 0$, donc $0 < u_n + 1$ et $v_n = \dfrac{1}{u_n+1}$ est bien définie. Pour montrer que c'est une suite arithmétique il suffit, par exemple, de calculer v_{n+1} en fonction de v_n :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}+1} = \frac{1}{-\frac{1}{u_n+2}+1} = \frac{u_n+2}{-1+u_n+2} = \frac{u_n+1+1}{u_n+1} = 1 + \frac{1}{u_n+1} = 1 + v_n$$

(si on ne voit pas tout de suite ce calcul, on peut commencer par calculer les premiers termes de la suite v_n : normalement, on se doute vite du résultat...)

3) La suite (v_n) est arithmétique de raison 1 et de premier terme v_0, donc, pour tout $n \geq 0$,

$$v_n = 1/5 + n \qquad \text{et} \qquad u_n = \frac{1}{v_n} - 1 = \frac{1}{1/5+n} - 1$$

(on trouve l'expression de u_n en fonction de v_n à partir de l'équation $v_n = 1/(u_n+1)$)

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique si et seulement si $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.

Solution. Précisons de quoi on parle :

- Une suite (u_n) est géométrique si et seulement s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = u_0 q^n$ pour tout $n \geq 0$.
- Une suite (v_n) est arithmétique si et seulement s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $v_n = v_0 + nr$ pour tout $n \geq 0$.

Pour montrer l'équivalence, le plus sage est de montrer un sens, puis la réciproque.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, et notons q sa raison. Puisque $u_n > 0$, $q > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 q^n \Longrightarrow \ln(u_n) = \ln(u_0 q^n) = \ln(u_0) + n\ln(q)$$

Donc la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\ln(q)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique, et notons r sa raison. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} ln(u_n) = \ln(u_0) + nr &\Longrightarrow e^{ln(u_n)} = e^{\ln(u_0)+nr} = e^{\ln(u_0)} e^n r \\ &\Longrightarrow u_n = u_0 (e^r)^n \end{aligned}$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison e^r. $\square$