Devoir de mathématiques pour le vendredi 18 septembre

Correction.

1 TD 2 page 40

Exercice 1
L'inclusion $OAM \subset$ Secteur $OAM \subset OAT$ nous donne l'inégalité lorsque l'on passe aux aires.

1) Soit $h \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ fixé.

a. L'aire d'un secteur circulaire de rayon r est proportionnelle à l'angle : l'aire d'un demi-cercle ($h = \pi$) sera $(\pi/2)r^2$, l'aire d'un quart de cercle ($h = 2\pi$) sera $\pi/4r^2$, et ainsi de suite pour toute fraction rationnelle d'un cercle. En passant à la limite, on trouve finalement : $\mathscr{A}_{\text{secteur d'angle h}} = \pi r^2 \times (h/2\pi) = r^2h/2$. Donc simplement $h/2$ dans le cas d'un cercle de rayon 1.

b. La base $[OA]$ est de longueur 1 et la hauteur $[Mm]$ est de longueur $\sin h$ par définition du sinus. Donc $\mathscr{A}(\text{triangle OAM}) = \frac{1}{2}OA \times Mm = \frac{1}{2}\sin h$.

c. $(Mm)//(TA)$ et les points O, M, T d'une part, et O, m, A d'autre part sont alignés dans cet ordre. Donc, d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{OM}{OT} = \frac{Om}{OA} = \frac{Mm}{TA}$$

De plus $OM = OA = 1$, $Om = \cos h$ et $Mm = \sin h$. Donc l'égalité précédente devient

$$\frac{1}{OT} = \frac{\cos h}{1} = \frac{\sin h}{TA}$$

Ainsi $TA = \frac{\sin h}{\cos h}$, et l'aire du triangle rectangle OAT est $\mathscr{A}(\text{triangle OAT}) = \frac{1}{2}OA \times TA = \frac{1}{2} \times \frac{\sin h}{\cos h}$

d. En remplaçant on trouve l'encadrement voulu :

$$\begin{array}{rccccc} & \mathscr{A}(\text{triangle } OAM) & \leq & \mathscr{A}(\text{secteur } OAM) & \leq & \mathscr{A}(\text{triangle } OAT) \\ \iff & \frac{1}{2}\sin h & \leq & \frac{h}{2} & \leq & \frac{1}{2}\frac{\sin h}{\cos h} \\ \iff & \sin h & \leq & h & \leq & \frac{\sin h}{\cos h} \end{array}$$

e. $h \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\sin h \in]0; 1[$ et $\cos h \in]0; 1[$. On peut donc multiplier et diviser par tous ces nombres sans risque, et sans changer le sens des inégalités.

$$\sin h \leq h \iff \frac{\sin h}{h} \leq 1 \qquad \text{et} \qquad h \leq \frac{\sin h}{\cos h} \iff \cos h \leq \frac{\sin h}{h}$$

En recollant ces deux inégalités on trouve l'encadrement $\cos h \leq \frac{\sin h}{h} \leq 1$.

2) Soit $h \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$ fixé. Alors $h' = -h \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, et l'on peut appliquer le résultat précédent :

$$\cos h' \leq \frac{\sin h'}{h'} \leq 1$$

On remplace h' par $-h$: $\cos(-h) = \cos h$ car cosinus est paire, et $\dfrac{\sin(-h)}{-h} = \dfrac{-\sin h}{-h} = \dfrac{\sin h}{h}$ car sinus est impaire. Donc les signes se simplifient et l'encadrement reste vrai sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};0\right[$:

$$\text{Pour tout } h \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, h \neq 0 \qquad \cos h \leq \frac{\sin h}{h} \leq 1$$

3) Nous avons l'inégalité ci-dessus pour tout $h \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[, h \neq 0$, et de plus $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \cos h = 1 = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} 1$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sin h}{h} \text{ existe et vaut } 1$$

Exercice 2

1) **a.** Soit $h \neq 0$. En se souvenant que diviser par $1/2$, c'est multiplier par 2,

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{1 - 2\sin^2\frac{h}{2} - 1}{h} = -2\frac{\sin^2\frac{h}{2}}{h} = -\frac{\sin^2\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

b. Théorème de composition des limites.

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{h}{2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sin h}{h} = 1$$

Donc, $h/2$ étant non nul si h est non nul, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \dfrac{\sin(h/2)}{h/2}$ existe et vaut 1. Ainsi

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} -\frac{\sin^2\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1 \times \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \left(\sin\frac{h}{2}\right) = 0$$

En conclusion, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \dfrac{\cos h - 1}{h} = 0$.

Remarque Dans le 2, nous venons en fait de prouver que $\cos'(0) = 0$.

2 Composition des fonctions

Remarque Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction, vous connaissez la notation $f(x)$ pour la valeur de la fonction en $x \in I$. Mais après tout, on peut aussi bien parler de « $f(t)$ pour $t \in I$ » ou « $f(Z)$ pour $Z \in I$ ». Et en particulier de $f(g(x))$, tant que $g(x) \in I$.
Bref, si $f(x) = \sqrt{x}$, on a juste $f(g(x)) = \sqrt{g(x)}$. Le seul problème potentiel est du coté de l'ensemble de définition : est-ce que $g(x) \in \mathscr{D}_f$?

Exercice 59

1)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$

De plus la fonction f est continue en $x = 1$ car composée de fonctions continues, donc

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \frac{1-3}{1+5} = -\frac{1}{3}$$

D'où, d'après le théorème de composition des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$ existe et

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{x\to 1} f(x) = -\frac{1}{3}$$

2) On se place suffisamment loin vers $+\infty$ pour que $f(x)$ soit loin de la valeur interdite -5 : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, donc il existe $x_0 \in \mathscr{D}_f$ tel que $f(x) > -5$ pour tout $x > x_0$. Soit un tel x_0. Pour tout $x > x_0$,

$$f(f(x)) = \frac{f(x)-3}{f(x)+5} = \frac{\frac{x-3}{x+5}-3}{\frac{x-3}{x+5}+5} = \frac{\frac{x-3}{x+5}-\frac{3(x+5)}{x+5}}{\frac{x-3}{x+5}+\frac{5(x+5)}{x+5}} = \frac{\frac{x-3-3x-15}{x+5}}{\frac{x-3+5x+25}{x+5}} = \frac{x-3-3x-15}{x-3+5x+25} = -\frac{x-9}{3x+11}$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x}{3x} = -\dfrac{1}{3}$.