Devoir de mathématiques pour le vendredi 23 octobre

***Correction.***

**Exercice 1**

**1) a) La fonction sinus hyperbolique :** $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}'(x) = \dfrac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Or la fonction exp est toujours strictement positive, donc $\mathrm{sh}'(x) > 0$. Ainsi

- Limite en $+\infty$ : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -e^{-x} = 0$ donc, par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$.
- Limite en $-\infty$ : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -e^{-x} = -\infty$ donc, par somme de limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$.

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{sh}'(x)$ | | $+$ | |
| sh | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Parité : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et

$$\mathrm{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = \frac{-e^x + e^{-x}}{2} = -\mathrm{sh}(x)$$

Donc sh est impaire.

**b) La fonction cosinus hyperbolique :** $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x)$.

Or $\mathrm{sh}(0) = 0$ et, d'après ci-dessus, sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc nous avons le tableau de signe suivant :

De même que ci-dessus, par somme de limites, nous obtenons :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| ch | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Parité : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et

$$\mathrm{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$$

Donc ch est paire.

**2)** Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

**a)** $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{2e^x}{2} = e^x$.

**b)** $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x} - (e^x - e^{-x})}{2} = \dfrac{2e^{-x}}{2} = e^{-x}$.

**c)** $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = (\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x))(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)) = e^x e^{-x} = 1$

**3)** Soit $a, b \in \mathbb{R}$ fixés. Le plus simple est de partir des propriétés de l'exponentielle, puis d'utiliser la question précédente.

$$e^{a+b} = e^a e^b \qquad \text{et} \qquad e^{-(a+b)} = e^{-a}e^{-b}$$

Ce qui entraîne, d'après les questions 2a et 2b,

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(a+b) + \mathrm{sh}(a+b) &= (\mathrm{ch}(a) + \mathrm{sh}(a))(\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(b)) \\ &= \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(a+b) - \mathrm{sh}(a+b) &= (\mathrm{ch}(a) - \mathrm{sh}(a))(\mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(b)) \\ &= \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) - \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b) - \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b) \end{aligned}$$

**a)** En sommant les deux égalités obtenues il reste $2\mathrm{ch}(a+b) = 2\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + 2\mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$, ainsi

$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$$

**b)** $\mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}(a+(-b)) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(-b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(-b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$.
Car la fonction ch est paire et la fonction sh est impaire.

**c)** En faisant la différence des deux égalités obtenues il reste $2\mathrm{sh}(a+b) = 2\mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b) + 2\mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b)$, ainsi

$$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b)$$

**d)** $\mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}(a+(-b)) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(-b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(-b) = -\mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b)$.

**e)** $\mathrm{ch}(2a) = \mathrm{ch}(a+a) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(a) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(a) = \mathrm{ch}^2(a) + \mathrm{sh}^2(a)$.

**f)** $\mathrm{sh}(2a) = \mathrm{sh}(a+a) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(a) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(a) = 2\mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(a)$.

La morale de cet exercice, c'est que les formules que l'on vient de trouver ressemblent beaucoup à celles des cosinus et sinus que vous connaissez depuis le collège. Est-ce qu'il y aurait un lien entre exponentielle et cosinus et sinus ? Nous verrons ça plus tard dans l'année...

**Exercice 2**
Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$(1+i)z^2 - 1 = 0$$

Les coefficients de cette équation sont complexes, on ne peut donc pas appliquer les résultats du cours.
Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé, et $z = x + iy$ sa décomposition en partie réelle et partie imaginaire. Alors

$$\begin{aligned} (1+i)(x+iy)^2 - 1 &= (1+i)(x^2 + 2ixy - y^2) - 1 \\ &= \underline{x^2} + 2ixy - \underline{y^2} + ix^2 - \underline{2xy} - iy^2 - \underline{1} \\ &= (x^2 - y^2 - 2xy - 1) + i(2xy + x^2 - y^2) \end{aligned}$$

Donc $(1+i)z^2 - 1 = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcll} x^2 - y^2 - 2xy - 1 &=& 0 & \textbf{(1)} \\ 2xy + x^2 - y^2 &=& 0 & \textbf{(2)} \end{array} \right.$

Pour résoudre ce type de système, il faut commencer par simplifier au maximum en combinant les lignes, comme dans les systèmes d'équations habituels. Ensuite, on continue là aussi comme d'habitude en essayant d'exprimer une variable (par exemple $y$) en fonction de l'autre ($x$).

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - y^2 - 2xy - 1 &=& 0 \\ 2xy + x^2 - y^2 &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcll} -4xy - 1 &=& 0 & \textbf{(1)} - \textbf{(2)} \\ 2xy + x^2 - y^2 &=& 0 & \textbf{(2)} \end{array} \right.$$

La nouvelle équation $(\mathbf{1'})$ nous permet d'exprimer $y$ en fonction de $x$. Si $x=0$, alors l'équation $(\mathbf{1'})$ s'écrit $-4\times 0\times y-1=0$, ce qui est absurde. Donc nous pouvons sans crainte affirmer que $x\neq 0$ et diviser par 0 :

$$(\mathbf{1'}) \quad\Longleftrightarrow\quad y=-\frac{1}{4x}$$

Remplaçons maintenant dans $(\mathbf{2})$ :

$$(\mathbf{2}) \quad\Longleftrightarrow\quad 2x\left(-\frac{1}{4x}\right)+x^2-\left(-\frac{1}{4x}\right)^2=0 \quad\Longleftrightarrow\quad -\frac{1}{2}+x^2-\frac{1}{16x^2}=0$$

Les fractions, c'est compliqué : multiplions par $16x^2$ pour se ramener à un polynôme plus sympathique :

$$(\mathbf{2}) \quad\Longleftrightarrow\quad -8x^2+16x^4-1=0 \quad\Longleftrightarrow\quad 16x^4-8x^2-1=0$$

C'est une équation *bicarrée* : si on pose $X=x^2$, l'équation $16X^2-8X-1=0$ est un trinôme qui a pour solutions $(\Delta=2\times 8^2>0)$ $X_1=\dfrac{8-8\sqrt{2}}{32}<0$ et $X_2=\dfrac{8+8\sqrt{2}}{32}$.

Or $X=x^2>0$ (la partie réelle est un *réel*), donc $x^2=\dfrac{8+8\sqrt{2}}{32}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{4}$ et

$$x=\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2} \qquad\text{ou}\qquad x=-\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}$$

Pour trouver $y$, il suffit de remplacer $x$ par son expression dans $y=-\dfrac{1}{4x}$. Après des calculs laissés en exercice au lecteur, on trouve :

$$S=\left\{\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}-i\frac{\sqrt{-1+\sqrt{2}}}{2};-\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{-1+\sqrt{2}}}{2}\right\}$$