Devoir de mathématiques pour le vendredi 13 novembre

Exercice 1
Résoudre l'équation différentielle

$$(E_1) : y' + 5y = (x^2 - 2x)e^{-5x}$$

en remarquant que $f(x) = \left(\dfrac{x^3}{3} - x^2\right) e^{-5x}$ est une solution particulière.

Solution.

1) Vérifions que f est solution de (E_1). $f = u \times v$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) + 5f(x) = (x^2 - 2x)e^{-5x} + \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)(-5)e^{-5x} + 5\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)e^{-5x} = (x^2 - 2x)e^{-5x}$$

Ainsi, f est solution de (E_1).

2) Montrons que g est solution de (E_1) si et seulement si $g - f$ est solution de $(E_2) : y' + 5y = 0$.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit g une solution de (E_1). Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
(g-f)'(x) + 5(g-f)(x) &= g'(x) - f'(x) + 5g(x) - 5f(x) \\
&= (g'(x) + 5g(x)) - (f'(x) + 5f(x)) \\
&= (x^2 - 2x)e^{-5x} - (x^2 - 2x)e^{-5x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $g - f$ est solution de (E_2).
$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g - f$ soit solution de (E_2). Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
(g-f)'(x) + 5(g-f)(x) = 0 &\Longrightarrow g'(x) - f'(x) + 5g(x) - 5f(x) = 0 \\
&\Longrightarrow (g'(x) + 5g(x)) - (f'(x) + 5f(x)) = 0 \\
&\Longrightarrow g'(x) + 5g(x) = f'(x) + 5f(x) = (x^2 - 2x)e^{-5x}
\end{aligned}$$

Donc g est solution de (E_1).

3) Les solutions de (E_2) sont de la forme $h(x) = ke^{-5x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc les solutions de (E_1) sont de la forme

$$g(x) = ke^{-5x} + f(x) = ke^{-5x} + \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)e^{-5x} = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + k\right)e^{-5x}$$

$\square$

Exercice 2
On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante.

$$(E_1) \quad u' = 3u + \frac{1}{2}u^2 \qquad \text{et} \qquad u(0) = \frac{1}{2}$$

Si g est solution de (E_1), on suppose que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et on pose $h = \dfrac{1}{g}$.

1) Montrer que g est solution de (E_1) si et seulement si h est solution de (E_2) $\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & -3y - \dfrac{1}{2} \\ y(0) & = & 2 \end{array}\right.$

2) Résoudre (E_1).

Solution.

1) Montrons que g est solution de (E_1) si et seulement si $h = 1/g$ est solution de (E_2).

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit g une solution de (E_1). Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2} \\ &= -\frac{3g(x) + 1/2(g(x))^2}{(g(x))^2} && \text{(car } g \text{ est solution de } (E_1)) \\ &= -\frac{3}{g(x)} - \frac{1}{2} \\ &= -3h(x) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vérifions la condition initiale : $g(0) = 1/2$ donc $h(0) = 1/g(0) = \dfrac{1}{1/2} = 2$.

Donc h est solution de (E_2).

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit h une solution de (E_2). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{h(x)}$, donc

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{h'(x)}{(h(x))^2} \\ &= -\frac{-3h(x) - 1/2}{(h(x))^2} && \text{(car } h \text{ est solution de } (E_2)) \\ &= \frac{3}{h(x)} + \frac{1/2}{(h(x))^2} \\ &= 3g(x) + \frac{1}{2}(g(x))^2 \end{aligned}$$

Vérifions la condition initiale : $h(0) = 2$ donc $g(0) = 1/h(0) = 1/2$.
Donc g est solution de (E_1).

2) Les solutions de (E_2) sont de la forme $h(x) = ke^{-3x} - \dfrac{1}{6}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $h(0) = 2$. Donc $k = 2 + 1/6 = 13/6$, et

$$h(x) = \frac{13}{6}e^{-3x} - \frac{1}{6}$$

D'après **1)**, les solutions de (E_1) sont de la forme

$$g(x) = \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{\frac{13}{6}e^{-3x} - \frac{1}{6}} = \frac{6}{13e^{-3x} - 1}$$

□