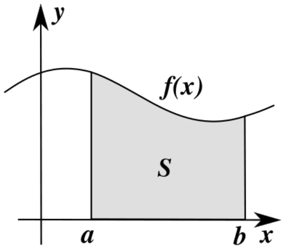


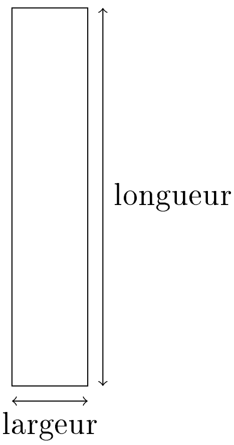
Intégration

En maths, on aime partir de notions simples. Ici, on s'intéresse à quelque chose que vous connaissez tous : la notion d'aire

I) Introduction

1) Aire d'un rectangle

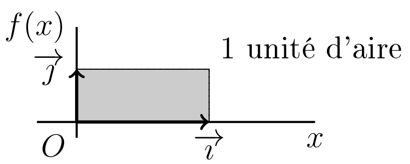
Quelles aires connaissez-vous ?
La formule à la base de ce chapitre : $\boxed{\mathscr{A}_{\text{rectangle}} = \text{largeur} \times \text{longueur}}$

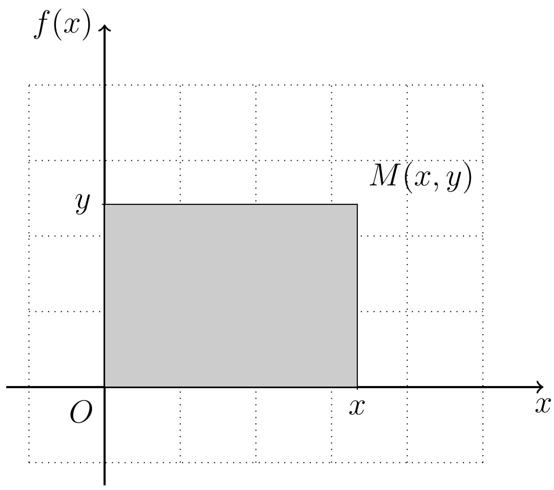


si cercle : pourquoi πR^2 ? Dans ce chapitre nous allons retrouver toutes les formules d'aire à partir de l'aire du rectangle et à l'aide de la théorie de l'intégration

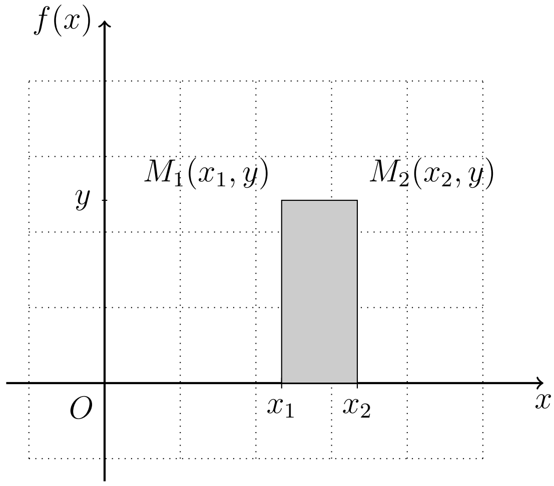
Dans un repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ orthogonal, on considère le rectangle de sommet $M(x, y)$ et $O(0, 0)$. L'aire est alors $\mathscr{A} = x \times y$.

Remarque : Une unité d'aire (« u. a. ») est l'aire du rectangle de sommet $M(1, 1)$. Repère *orthogonal*, pas forcément un carré.

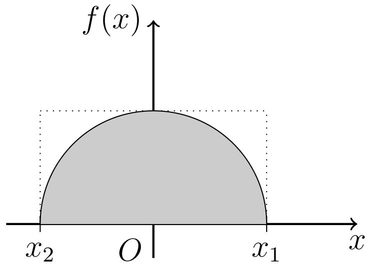




Dans ce même repère, on considère le rectangle ci-contre, entre les points $M_1(x_1, y)$, $M_2(x_2, y)$ et l'axe des x.
L'aire est alors $\mathscr{A} = (x_2 - x_1) \times y$.



Si on veut calculer l'aire d'objets plus compliqués qu'un rectangle, par exemple un demi-cercle, il faut une formule qui décrive l'objet, par exemple le bord. Donc des $\boxed{\text{fonctions.}}$

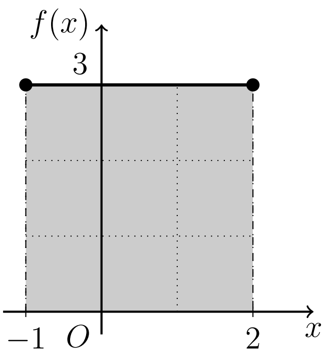


2) Fonctions en escalier

Si f est une fonction définie sur $[a, b]$, on cherche à calculer l'aire entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et l'axe des x.
Toujours la même idée : l'aire la plus simple à calculer, c'est l'aire d'un rectangle. Quelles fonctions ?
Constantes, constantes par morceaux.

Exemple 1 Soit f la fonction définie sur $[-1; 2]$ par $f(x) = 3$.

Aire entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des x, sur l'intervalle $[-1; 2]$:
$(2 - (-1)) \times 3 = 3 \times 3$



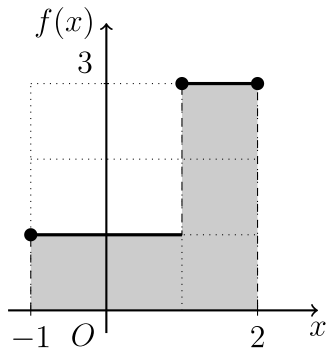
Exemple 2 (Généralisation) Soit f la fonction constante $f(t) = B$ sur $\mathbb{R}$. L'aire entre $t = 0$ et $t = x$ est $\cdots = Bx$.

Exemple 3 Soit f la fonction définie sur $[-1; 2]$ par $\begin{cases} f(x) = 1 & \text{sur} \quad [-1; 1[\\ f(x) = 2 & \text{sur} \quad [1; 2] \end{cases}$

Quelle est l'aire qui nous intéresse, ici ?

Aire entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des x, sur l'intervalle $[-1; 2]$:
- Premier rectangle : 2×1
- Second rectangle : 1×3

Donc au total : $\mathscr{A} = 2 \times 1 + 1 \times 3$.



Les fonctions constantes par morceaux, appelées fonctions « en escalier », sont à la base du calcul d'aire.

II) Intégration de fonctions positives

1) Définition

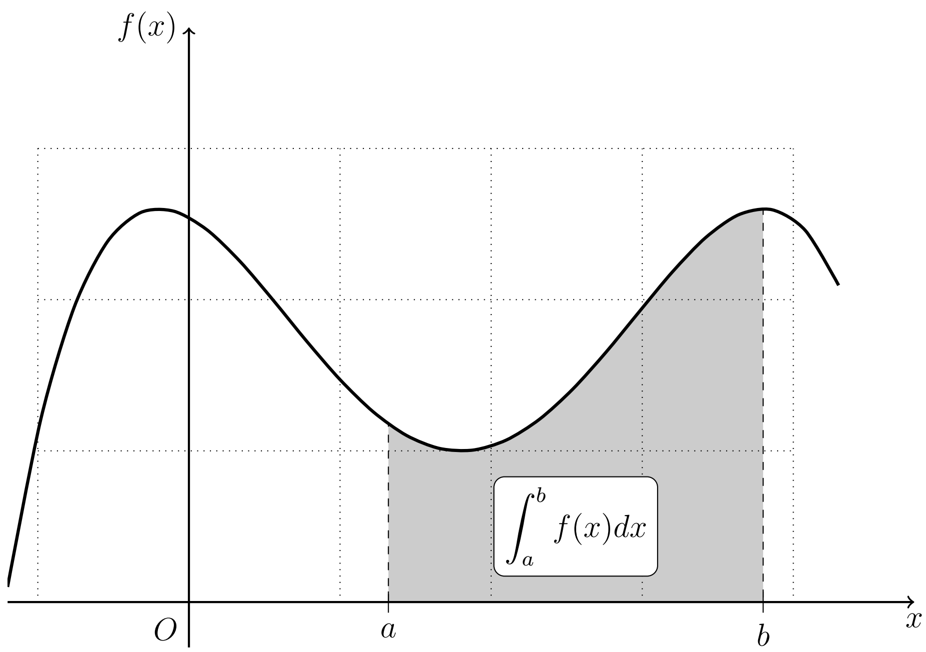
Cette aire dont on parle, on va lui donner un nom Dans tout ce paragraphe, les fonctions sont positives, c'est à dire que $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathscr{D}_f$.

Définition 1 Soit f une fonction continue et positive (c'est-à-dire $f(x) \geq 0 \ \forall x$) définie sur $[a, b]$, et $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthogonal.
L'intégrale de a à b de f est l'aire de la portion de plan comprise entre la droite $x = a$, la courbe $\mathscr{C}_f$, la droite $x = b$ et l'axe (Ox). Elle est notée

$$\int_a^b f(x)dx$$

C'est un nombre réel.

La variable x est ici une variable *muette*, on peut la noter t ou n'importe quoi. $\int_a^b f(t)dt$



$f(x)dx$ comme « $y \times (x_2 - x_1)$ » de l'exemple du rectangle, et $\displaystyle\int$, comme **S**omme

Utiliser la notation intégrale dans tous les exemples précédents

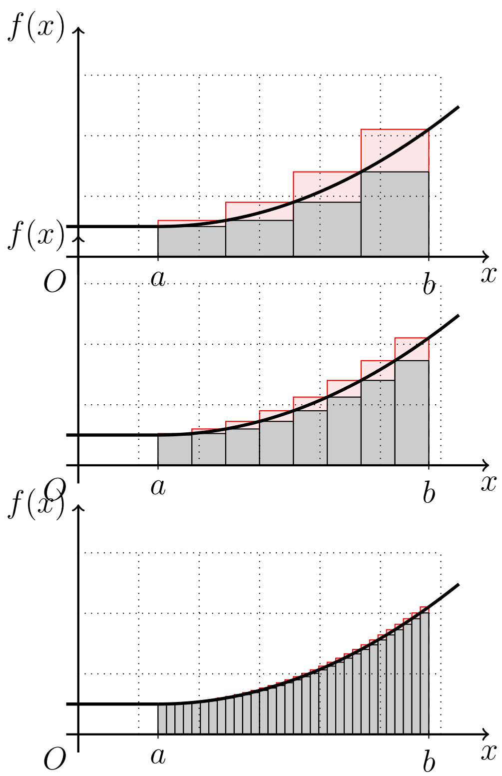
Exemple 4 Calculer $\displaystyle\int_0^3 t dt$, $\displaystyle\int_0^{11} t dt$, $\displaystyle\int_0^{x} t dt$. Que remarque-t-on ?

2) Construction de l'intégrale

Nous allons traiter le cas des fonctions **croissantes**, essentiellement via un exemple et des lectures graphiques. Mais on peut aussi faire les calculs proprement, les idées sont les mêmes.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive. On suppose f croissante pour simplifier. C'est très artisanal. On bidouille, on compte.

Graphiquement



Calculs

aire des rectangles noirs

$\leq$ aire des rectangles rouges

$$u_2 = \frac{b-a}{4}f(x_0) + \frac{b-a}{4}f(x_1) + \frac{b-a}{4}f(x_2) + \frac{b-a}{4}f(x_3) \qquad \text{où } x_k = a + k\frac{b-a}{4}$$

$$\leq \frac{b-a}{4}f(x_1) + \frac{b-a}{4}f(x_2) + \frac{b-a}{4}f(x_3) + \frac{b-a}{4}f(x_4) = v_2$$

$$u_3 = \frac{b-a}{8}f(x'_0) + \frac{b-a}{8}f(x'_1) + \frac{b-a}{8}f(x'_2) + \cdots + \frac{b-a}{8}f(x'_7) \qquad \text{où } x'_k = a + k\frac{b-a}{8}$$

$$\leq \frac{b-a}{8}f(x'_1) + \frac{b-a}{8}f(x'_2) + \cdots + \frac{b-a}{8}f(x'_7) + \frac{b-a}{8}f(x'_8) = v_3$$

$$u_n = \frac{b-a}{2^n}f(x_0^{(n)}) + \frac{b-a}{2^n}f(x_1^{(n)}) + \frac{b-a}{2^n}f(x_2^{(n)}) + \cdots + \frac{b-a}{2^n}f(x_{2^n-1}^{(n)})$$

$$\leq \frac{b-a}{2^n}f(x_1^{(n)}) + \frac{b-a}{2^n}f(x_2^{(n)}) + \cdots + \frac{b-a}{2^n}f(x_{2^n-1}^{(n)}) + \frac{b-a}{2^n}f(x_{2^n}^{(n)}) = v_n$$

où $x_k^{(n)} = a + k\dfrac{b-a}{2^n}$. Pour chaque u_n, v_n on a un découpage $(x_k^{(n)})_{k\in\{1,\ldots,n\}}$.

On définit donc des suites $u_n = \dfrac{b-a}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} f(x_k^{(n)})$ et $v_n = \dfrac{b-a}{2^n} \displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} f(x_k^{(n)})$.

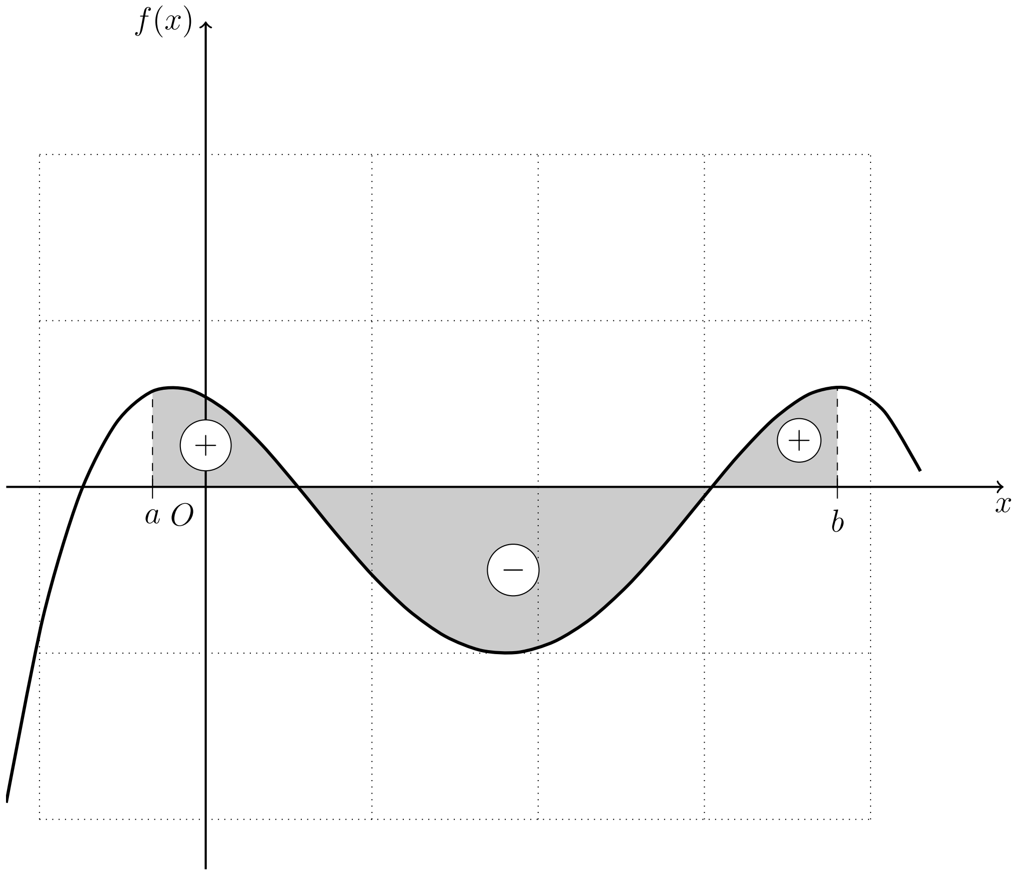
- Comme f est croissante, $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante (voir les dessins ci-dessus, les découpages sont imbriqués).
- La fonction f est continue, donc $\lim\limits_{n \to \infty} u_n - v_n = 0$.

Donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. D'après le cours sur les suites, elles convergent vers une même limite, que l'on note $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

III) Fonctions de signe quelconque

Désormais $f(x) \in \mathbb{R}$, sans plus de précision.

Définition 2 Soit f une fonction continue définie sur $[a, b]$, et $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ orthogonal.
$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est l'aire de la portion de plan précédente, comptée positivement lorsque $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de l'axe (Ox) et négativement lorsque $\mathscr{C}_f$ est au-dessous.

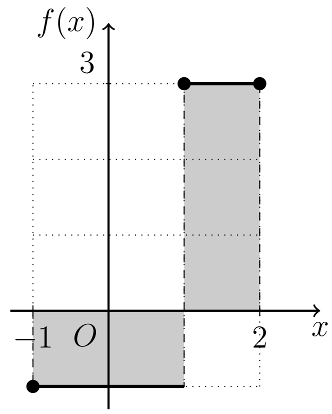


Exemple 5

Soit f la fonction définie sur $[-1;2]$ par

$$\begin{cases} f(x) = -1 & \text{sur} \quad [-1;1[\\ f(x) = 2 & \text{sur} \quad [1;2] \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = -2 \times 1 + 1 \times 3$$



Définition 3 Soit f une fonction continue définie sur $[a, b]$, avec donc $a \leq b$. On pose

$$\int_{b}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{b} f(x)dx$$

Quand on va dans le sens $-\overrightarrow{\imath}$ sur l'axe (Ox), on met un signe « $-$ ».

IV) Propriétés

1) Chasles

Rappel 1 (vecteurs) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Propriété 1 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $a, b, c \in I$.

$$\int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{c} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx$$

Démonstration. Cas $a \leq b \leq c$: Faire un dessin, les aires s'additionnent, comme dans le cas des fonctions en escalier.
Autres cas : se ramener au cas précédent. □

Exemple 6 Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3 dx$. Généraliser au cas de f impaire sur un domaine symétrique par rapport à 0.

Exemple 7 Pour tout $n \geq 0$, on pose $u_n = \displaystyle\int_{0}^{n} \frac{x}{x+1} dx$. Montrer que $u_{n+1} = u_n + \displaystyle\int_{n}^{n+1} \frac{x}{x+1} dx$. Que peut-on conjecturer sur les variations de (u_n). Le prouver à l'aide de la propriété 3.

2) Linéarité

Propriété 2 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, et $K \in \mathbb{R}$.

1) $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

2) $\displaystyle\int_a^b Kf(x)dx = K\int_a^b f(x)dx$

Démonstration.

1) Reprenons l'approximation par des rectangles : pour la première intégrale ils seront de hauteur $(f(x) + g(x))$ et de largeur Δx [dessin], donc une aire

$$\mathscr{A} = (f(x) + g(x))\Delta x = f(x)\Delta x + g(x)\Delta x$$

2) La démonstration se fait de la même façon, mais on peut vouloir l'écrire plus formellement. Si (u'_n) est la suite associée à l'intégrale de Kf et (u_n) celle associée à f, il est immédiat que $u'_n = Ku_n$. Donc en prenant les limites : $\displaystyle\int_a^b Kf(x)dx = K\int_a^b f(x)dx$.

□

Exemple 8 Calculer $\displaystyle\int_0^x At + Bdt$. à l'aide des exemples 2 et 4.

3) Positivité et inégalités

Propriété 3 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. $f \geq 0 \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Démonstration. Tout est positif, en particulier les suites (u_n) et (v_n) (sommes de trucs positifs), donc leur limite, c'est-à-dire $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, est positive. □

Propriété 4 Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. $f \leq g \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Démonstration. $f \leq g \Rightarrow 0 \leq g - f$ et on se ramène à la proposition 3, puis on utilise la linéarité. □

Exemple 9 Soit $u_n = \displaystyle\int_0^1 1 + t^n dt$. Montrer que (u_n) est décroissante minorée, en déduire la convergence de (u_n). (Attention : on ne peut pas en déduire la valeur de la limite).

V) Moyennes

Définition 4 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $a < b$. La *valeur moyenne* de f sur $[a, b]$ est le réel $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

La formule est bien homogène, et cohérente si on revient aux petits rectangles.

Exemple 10 Calculer la moyenne de la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ constante $f(x) = B$. Est-ce cohérent ?

Propriété 5 (inégalité de la moyenne) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leq f \leq M$. Alors

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

Démonstration. Conséquence immédiate de la croissance de l'intégrale (prop. 4). De plus, le résultat est graphiquement intuitif (comme pour la prop 4). □

Exemple 11 Encadrer $\displaystyle\int_1^7 \sqrt{1+x}dx$.

VI) Primitives

Dans tout ce paragraphe, la variable dans l'intégrale (=variable muette) sera notée t. Les fonctions sont définies sur un intervalle I, non nécessairement fermé.

1) Définition

Définition 5 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une *primitive* de la fonction f est une fonction dérivable $F : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$F' = f$$

Remarque 1 Une primitive n'est **PAS** unique. Il y en a plusieurs possibles. Quelle autre primitive ?

Propriété 6 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si F est une primitive de f, alors $F + K$ est aussi une primitive de f, où K est une constante fixée.

Démonstration. $(F + K)' = F' = f$ □

Exemple 12 **1)** Une primitive de 1 : $x = x^1/1$

2) Une primitive de x : $x^2/2$

dessin]

2) Propriétés

La propriété la plus FONDAMENTALE du chapitre

Propriété 7 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et F une primitive de f. Alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Notation 1 Une notation condensée pour le membre de droite est $[F(t)]_a^b$.

Propriété 8 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $x_0 \in I$ fixé (il faut bien commencer quelque part). La fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

est une *primitive* de la fonction f.

Démonstration. Soit F définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ pour un certain $x_0 \in I$.

Calculons : pour tout $x \in]a, b[$, pour tout h, $F(x+h) - F(x) = \cdots = \displaystyle\int_{x}^{x+h} f(t)dt$.
Pour simplifier la preuve, on suppose f croissante autour de x, et $h > 0$.
Il vient $f(x)h \leq \displaystyle\int_{x}^{x+h} f(t)dt \leq f(x+h)h$ (c'est juste les rectangles u_0 et v_0). Ainsi, en divisant par h,

$$f(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$$

Donc, en passant à la limite (théorème des gendarmes) lorsque $h \to 0$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

Ce qui entraîne F dérivable et $F' = f$. Donc F est une primitive de f. □

Réciproquement...

Exemple 13 Déterminer une primitive de $f(x) = x$. De $g(x) = 23x$.

Exemple 14 Déterminer une primitive de $f(x) = x^2$, de $g(x) = x^3$.

3) Primitives usuelles

Si on connaît bien ses dérivées usuelles, on sait déjà ses primitives. Dans chaque ligne, lorsque l'on dérive F, on doit trouver f. En fait, intégrer, c'est reconnaître des dérivées usuelles. à faire trouver par les élèves

Fonction f	Primitive F	Domaine de définition de F	
k constante	kx	$\mathbb{R}$	
x	$\frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$	
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	exemple
$\frac{1}{x^3}$	$-\frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	exemple
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$	$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0; +\infty[$	
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$	

Remarque 2 Comme dans le cas de la dérivation, les 6 premières lignes du tableau peuvent se regrouper sous une seule formule : pour tout $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$, la primitive de x^α est $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. (pour le domaine de définition ad hoc).

Exemple 15 Proposer deux primitives de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 2x + 1$

2) $g(x) = x^2 - \frac{1}{x}$

3) $h(x) = \cos(3x)$

Exemple 16 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{-1}^{3} 2t + 1dt \qquad \int_{-5}^{-2} \frac{t^3 - 1}{t}dt$$

4) Formules

Les formules de dérivation ont aussi leurs analogues pour l'intégration, sur le même principe. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ une fonction et F et G des primitives respectives. Ce sont les conséquences immédiates de la linéarité de l'intégrale (prop 2).

Fonction	Primitive
$K.f$	$K.F$
$f+g$	$F+G$

Soit $u : J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, telle que les composées ci-dessous soient bien définies. les conditions ne sont pas les mêmes à chaque ligne, bref — on ne s'en préoccupe que dans des cas concrets.

Fonction	Primitive	
$u' \times g \circ u$	$G \circ u$	
$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$n \neq -1$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$	
$u'e^u$	e^u	

Remarque 3 Les dernières lignes sont des conséquences de la première, pour des cas particuliers de fonctions g. Bien entendu nous avons la même chose pour $x \mapsto \sqrt{x}$ et les fonctions trigonométriques.

Exemple 17 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{1}{3t+2}dt \qquad \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}dt$$

VII) Intégration par parties

Nous n'avons pas encore utilisé une des formules de dérivation les plus classiques. Dans ce paragraphe, tout tourne autour de

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Théorème 9 (intégration par partie) Soit u et v deux fonctions $[a, b] \to \mathbb{R}$ dérivables, telles que leurs dérivées soient continues. Alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Démonstration. On sait que $(uv)' = u'v + uv'$, donc en particulier $u'v + uv' = (uv)'$, ce qui nous donne finalement

$$uv' = (uv)' - u'v$$

En intégrant entre a et b cette égalité, il vient

$$\begin{aligned}\int_a^b uv'dt &= \int_a^b (uv)' - u'vdt \\ &= \int_a^b (uv)'dt - \int_a^b u'vdt \\ &= [uv]_a^b - \int_a^b u'vdt\end{aligned}$$

(on note u et v au lieu de $u(t)$ et $v(t)$ juste pour alléger les notations, mais c'est Mal.) $\square$

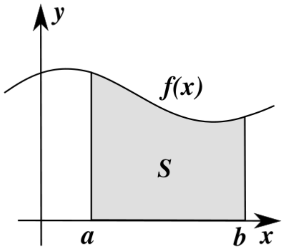
Exemple 18 Le principe, c'est de reconnaître quelque chose que l'on sait intégrer à l'intérieur d'un produit. En s'arrangeant, s'il y a plusieurs possibilités, pour que $u'v$ soit plus sympathique que $u'v$.

1) $\displaystyle\int_0^1 te^t dt$

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t dt$

3) Déterminer une primitive de ln.

Quelques constructions plus propres et plus rigoureuses.



I) Fonctions en escalier

Les fonctions constantes par morceaux, appelées fonctions « en escalier », sont à la base du calcul d'aire.

Définition 6

II) Intégration de fonctions positives

1) Fonctions en escalier

L'aire sous la courbe, pour une fonction en escalier est très simple à construire : c'est l'aire des petits rectangles. Il suffit de compter.

Définition 7

2) Construction de l'intégrale

Dans tout ce paragraphe, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue positive.
Il faut quelques résultats sur les fonctions continues (faisant intervenir la notion de « compacité »).

Théorème 10 Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes.

C'est-à-dire que l'on peut parler du maximum ou du minimum d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$.

Propriété 11 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x_1, x_2 \in [a, b]$, $|x_1 - x_2| \leq \eta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$.

Remarque 4 C'est presque la définition de la continuité, mais pas tout à fait. La continuité nous dit que, si on se place en $x_1 \in [a, b]$, alors on peut trouver $\eta > 0$ tel que pour tout $x_2 \in [a, b]$, $|x_1 - x_2| \leq \eta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$.
La propriété nous dit que, si on est sur un segment $[a, b]$, alors on peut choisir un $\eta > 0$ qui conviendra pour tous les $x_1 \in [a, b]$.

Pour construire les suites (u_n) et (v_n), on va construire des fonctions en escalier qui encadrent f.

Construction. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On définit les fonctions $g_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $h_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ par $g_n(b) = h_n(b) = f(b)$ et : $\forall k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\} \quad \forall x \in \left[\frac{k}{2^n}(b-a), \frac{k+1}{2^n}(b-a)\right[$

$$g_n(x) = \min_{x \in \left[\frac{k}{2^n}(b-a), \frac{k+1}{2^n}(b-a)\right]} f(x) \qquad \text{et} \qquad h_n(x) = \max_{x \in \left[\frac{k}{2^n}(b-a), \frac{k+1}{2^n}(b-a)\right]} f(x)$$

Si on note $I_{k,n} = \left[\frac{k}{2^n}(b-a), \frac{k+1}{2^n}(b-a)\right[$ notre découpage de l'intervalle $[a, b]$. la définition s'écrit

$$\forall k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\} \quad \forall x \in I_{k,n} \qquad g_n(x) = \min_{x \in I_{k,n}} f(x) \qquad h_n(x) = \max_{x \in I_{k,n}} f(x)$$

Ces fonctions sont bien définies, d'après le théorème 10 : on peut prendre les max et min sans craintes. (Il est conseillé de faire un dessin pour les cas $n = 1$ et $n = 2$, pour comprendre.)

On pose

$$u_n = \int_a^b g_n(x)dx \qquad v_n = \int_a^b h_n(x)dx$$

qui sont bien définies, puisque g_n et h_n sont des fonctions en escalier.

Preuve que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n \leq g_{n+1}$ par construction. Donc $u_n \leq u_{n+1}$ et (u_n) croissante. De même, on montre que (v_n) est décroissante.
Le point le plus délicat est de montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$. Commençons par regarder les fonctions :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\} \quad \forall x \in I_{k,n} \qquad g_n(x) - h_n(x) = \left(\min_{x\in I_{k,n}} f(x)\right) - \left(\max_{x\in I_{k,n}} f(x)\right) \tag{1}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ qui convient comme dans la proposition 11, et on pose n_0 tel que la longueur de I_{k,n_0} $(\frac{b-a}{2^{n_0}})$ soit plus petite que η. Ainsi, pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\forall x_1, x_2 \in I_{k,n} \quad |x_1 - x_2| \leq \eta \Rightarrow \forall x_1, x_2 \in I_{k,n} \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon \Rightarrow \left|\left(\min_{x\in I_{k,n}} f(x)\right) - \left(\max_{x\in I_{k,n}} f(x)\right)\right| \leq \varepsilon$$

En choisissant pour x_1 le point où le min est atteint (théorème 10) et pour x_2 le point où le max est atteint (théorème 10). Revenons à (1) :

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\} \quad \forall x \in I_{k,n} \qquad |g_n(x) - h_n(x)| = \left|\left(\min_{x\in I_{k,n}} f(x)\right) - \left(\max_{x\in I_{k,n}} f(x)\right)\right| \leq \varepsilon$$

Recollons « $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$ $\forall x \in I_{k,n}$ » en « $\forall x \in [a, b]$ », on trouve :

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in [a, b] \qquad |g_n(x) - h_n(x)| \leq \varepsilon$$

Ce qui nous donne

$$\forall n \geq n_0 \qquad |u_n - v_n| \leq \int_a^b |g_n(x) - h_n(x)|dx \leq \int_a^b \varepsilon dx = (b-a)\varepsilon$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

III) Fonctions de signe quelconque

Désormais $f(x) \in \mathbb{R}$, sans plus de précision.

Définition 8 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit les parties positives et négatives ainsi :
- $f_+ : [a, b] \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $f_+(x) = \max(f(x), 0)$ pour tout $x \in [a, b]$,
- $f_- : [a, b] \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $f_-(x) = -\min(f(x), 0)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Remarque 5 $f = f_+ - f_-$, et les fonctions f_+ et f_- sont positives.

Remarque 6 Si f est continue, les fonctions f_+ et f_- sont aussi continues.

Maintenant on peut définir tout simplement l'intégrale d'une fonction de signe quelconque.

Définition 9 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_+(x)dx - \int_a^b f_-(x)dx$$

Exercice 1 Définir l'intégrale d'une fonction à valeur dans $\mathbb{C}$.