DST (*2 heures*) Mardi 26 janvier 2010

Mathématiques

Exercice 1

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère les points $A(3\ ;\ 0\ ;\ 6)$ et $I(0\ ;\ 0\ ;\ 6)$, et l'on appelle (D) la droite passant par A et I.

On appelle (P) le plan d'équation $2y + z - 6 = 0$ et (Q) le plan d'équation $y - 2z + 12 = 0$.

1) Démontrer que (P) et (Q) sont perpendiculaires. (0,5)

2) Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est la droite (D). (1)

3) Démontrer que (P) et (Q) coupent l'axe $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\jmath})$ et déterminer les coordonnées des points B et C, intersections respectives de (P) et (Q) avec l'axe $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\jmath})$. (0,75)

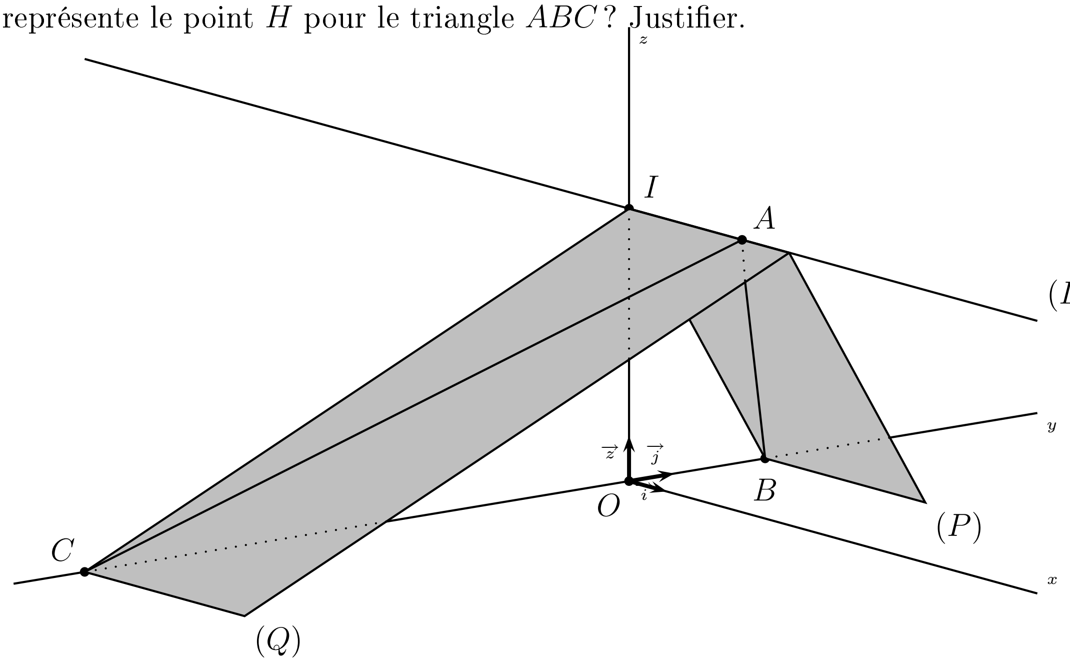
4) Démontrer qu'une équation du plan (T) passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$ est (1)

$$x + 4y + 2z - 12 = 0.$$

5) Donner une représentation paramétrique de la droite (OA). (1)

Démontrer que la droite $(\mathrm{O}A)$ et le plan (T) sont sécants en un point H dont on déterminera les coordonnées. (1)

6) Que représente le point H pour le triangle ABC ? Justifier. (0,75)



Exercice 2

Pour chacune des questions $1, 2, 3$ *et* 4*,* ***parmi les quatre affirmations proposées, deux sont exactes et deux sont fausses****. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et les deux affirmations qu'il pense exactes. Aucune justification n'est demandée. Les quatre questions sont indépendantes et sont notées sur* 1 *point. Toute réponse juste rapporte* $0,5$ *point. Donner plus de* 2 *réponses à une question entraîne la nullité de la question.*

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1) Soit P le plan d'équation $2x + 3y + 4z - 1 = 0$.

- **a)** La distance du point O au plan P est égale à 1.
- **b)** La distance du point O au plan P est égale à $\dfrac{1}{\sqrt{29}}$.
- **c)** Le vecteur $\vec{n}\left(1\ ;\ \dfrac{3}{2}\ ;\ 2\right)$ est un vecteur normal au plan P.
- **d)** Le plan Q d'équation $-5x + 2y + z = 0$ est parallèle au plan P.

2) On désigne par P le plan d'équation $2x + y - z = 0$, et par D la droite passant par le point $\mathrm{A}(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(1\ ;\ -4\ ;\ -2)$.

- **a)** La droite D est parallèle au plan P.
- **b)** La droite D est orthogonale au plan P.
- **c)** La droite D est sécante avec le plan P.
- **d)** Un système d'équations paramétriques de D est $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

3) On désigne par E l'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que : $x + y + z = 3$ et $2x - z = 1$. Soit le point $\mathrm{A}(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

- **a)** L'ensemble E contient un seul point, le point A.
- **b)** L'ensemble E est une droite passant par A.
- **c)** L'ensemble E est un plan passant par A.
- **d)** L'ensemble E est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(1\ ;\ -3\ ;\ 2)$.

4) ABCD est un tétraèdre quelconque. Soit P le plan passant par A et orthogonal à la droite (BC).

- **a)** Le plan P contient toujours le point D.
- **b)** Le plan P contient toujours la hauteur (AH) du triangle ABC.
- **c)** Le plan P est toujours l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{\mathrm{B}M} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}.$$

- **d)** Le plan P est toujours le plan médiateur du segment [BC].