Mathématiques

Correction

Exercice 1 (Antilles-Guyane, juin 2009, partiel)

1) Pour tout $t \geq 0$, $f(t) = ke^{-\frac{1}{2}t} + 20$ (avec $k \in \mathbb{R}$ fixé).
De plus $f(0) = 220 = k + 20$ donc $k = 200$. Ainsi, pour tout $t \geq 0$,

$$f(t) = 200e^{-\frac{1}{2}t} + 20$$

2) a) Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = 200 \times (-1/2)e^{-\frac{t}{2}} = -100e^{\frac{t}{2}} < 0$. Ainsi f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) $\lim\limits_{t \to +\infty} 200e^{-t/2} = 0$ donc, par somme de limite, $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 20$.
La fonction f a une limite finie (20) en $+\infty$, la courbe $\mathscr{C}$ admet donc une asymptote $\mathscr{D}$ (d'équation $y = 20$) en $+\infty$.

Exercice 2

1) a) • $|z_1| = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{2}$ donc $z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$ et $\arg(z_1) = -\frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$.

• $|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ donc $z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$.

• $|z_3| = \frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ et $\arg(z_3) = \arg(z_2) - \arg(z_1) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{12}$ $[2\pi]$

b) $z_3 = \frac{z_2}{z_1} = (1-i)\left(\frac{2}{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}\right) = (1-i)\left(\frac{2(\sqrt{6} + i\sqrt{3})}{6+2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-i)(\sqrt{3} + i)$
$= \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + i - i\sqrt{3} + 1) = \frac{\sqrt{2}}{4}((1+\sqrt{3}) + i(1-\sqrt{3}))$

D'après la question ci-dessus, le module de z_3 vaut 1 et un argument vaut $-\pi/12$, donc $z_3 = \cos(-\pi/12) + i\sin(-\pi/12)$. Ainsi

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}) \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}(-1+\sqrt{3})$$

c) $|z_2^{2010}| = \sqrt{2}^{2010} = 2^{1005}$ et $\arg(z_2^{2010}) = 2010\arg(z_2) = -\dfrac{2010\pi}{4} = -502\pi - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Il vient $z_2 = 2^{1005}(-i) = -2^{1005}i$.

2) **a)** L'ensemble $\mathscr{E}_1$ est le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.

b) L'ensemble $\mathscr{E}_2$ est la médiatrice du segment $[AO]$.

Exercice 3 (Amérique du Nord, juin 2009, partiel)

1) Notations :

$$(E_1)\left\{\begin{array}{lcl} y(0) & = & 0{,}01 \\ y' & = & 0{,}05y(10-y) \end{array}\right. \qquad (E_2)\left\{\begin{array}{lcl} z(0) & = & 100 \\ z' & = & -0{,}5z+0{,}05 \end{array}\right.$$

Montrons que y est solution de (E_1) si et seulement si $z = 1/y$ est solution de (E_2).

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit y une solution de (E_1).

$$\begin{array}{rcll} z' & = & \left(\dfrac{1}{y}\right)' = -\dfrac{y'}{y^2} & \\ & = & -\dfrac{0{,}05y(10-y)}{y^2} & \text{(car } y \text{ est solution de } (E_1)) \\ & = & -0{,}05\left(\dfrac{10}{y}-1\right) = -\dfrac{0{,}5}{y}+0{,}05 & \\ & = & -0{,}5z+0{,}05 & \end{array}$$

Vérifions la condition initiale : $y(0) = 0{,}01$ donc $z(0) = 1/y(0) = \dfrac{1}{0{,}01} = 100$.

Donc z est solution de (E_2).

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit z une solution de (E_2). $y = \dfrac{1}{z}$, donc

$$\begin{array}{rcll} y' & = & -\dfrac{z'}{z^2} & \\ & = & -\dfrac{-0{,}5z+0{,}05}{z^2} & \text{(car } z \text{ est solution de } (E_2)) \\ & = & \dfrac{0{,}5}{z} - \dfrac{0{,}05}{z^2} & \\ & = & 0{,}5y - 0{,}05y^2 = 0{,}05y(10-y) & \end{array}$$

Vérifions la condition initiale : $z(0) = 100$ donc $y(0) = 1/z(0) = 1/100 = 0{,}01$.

Donc y est solution de (E_1).

2) **a)** Les solutions de (E_2) sont de la forme $z(x) = ke^{-0{,}5x} + \dfrac{1}{10}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $z(0) = 100$.

Donc $k = 100 - \dfrac{1}{10} = \dfrac{999}{10}$, et

$$z(x) = \frac{999}{10}e^{-0{,}5x} + \frac{1}{10}$$

D'après **1)**, les solutions de (E_1) sont donc de la forme, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{\frac{999}{10}e^{-0{,}5x} + \frac{1}{10}} = \frac{10}{999e^{-0{,}5x}+1}$$

b) Pour $x \in [0;30]$, $y(x)$ représente le pourcentage de la population infectée après x jours. Il suffit donc de calculer $y(30)$.

$$y(30) = \frac{10}{999e^{-0{,}5\times 30}+1} \simeq 9{,}997$$

Environ 10% de la population est infectée après 30 jours. (on remarquera que $999e^{-0{,}5\times 30}$ est très petit devant 1, donc on peut deviner le résultat).

Exercice 4 (Obligatoire)

1) a) Soit $M(z)$ différent de O. Alors M_1 a pour affixe $z_1 = 1/z$ par définition, donc

$$\begin{aligned} OM \times OM_1 &= |z| \times |z_1| = |z|/|z| = 1 \\ \left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM_1}\right) &= \arg(z_1) = -\arg(z) = -\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM}\right) \ [2\pi] \end{aligned}$$

b) Pour construire facilement $\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM_1}\right)$, on construit dans un premier temps le symétrique de A par rapport à l'axe réel (i.e. le point d'affixe $\overline{z}$).

2) a) Pour tout nombre complexe z non nul, le point M' est le milieu de $M(z)$ et de $M_1(1/z)$, il a donc pour affixe $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

b)
- $z_{B'} = \dfrac{1}{2}\left(z_B + \dfrac{1}{z_B}\right) = \dfrac{1}{2}(2i - i/2) = \dfrac{3i}{4}$.
- $z_C = \overline{z_B}$, donc $z_{C'} = \dfrac{1}{2}\left(\overline{z_B} + \dfrac{1}{\overline{z_B}}\right) = \overline{\dfrac{1}{2}\left(z_B + \dfrac{1}{z_B}\right)} = \overline{z_{B'}} = -\dfrac{3i}{4}$.

3) Soit $M \neq O$. La deuxième égalité s'obtient en se débarrassant de tout ce qui ressemble à une fraction.

$$M' = M \iff z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \iff 2z^2 = z^2 + 1 \iff z^2 = 1$$

Donc $M = M'$ si et seulement si $z = -1$ ou $z = 1$. Les deux points correspondants seront noté K et L respectivement.

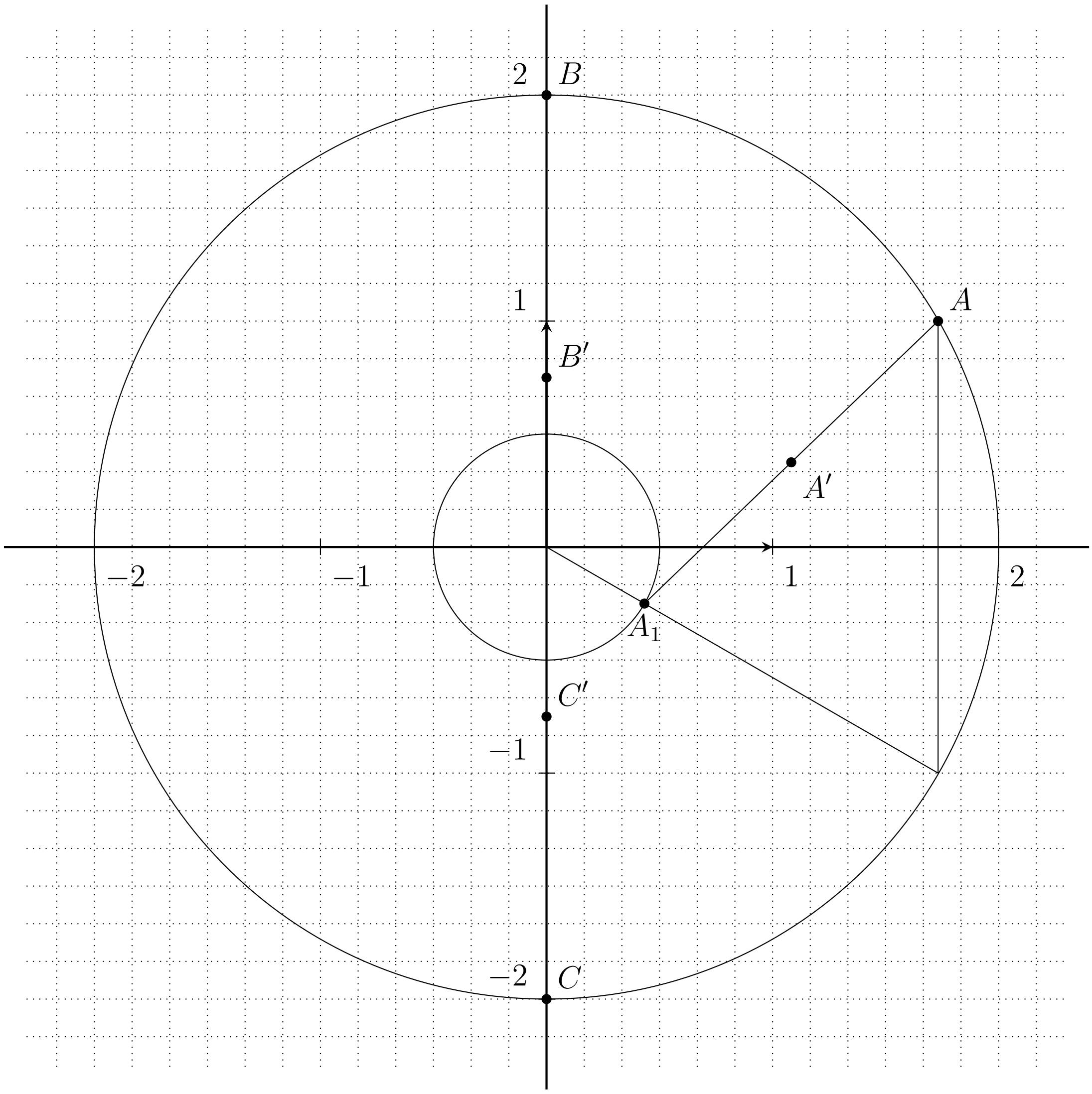
4) Notons $\mathscr{C}$ le cercle de centre $O(0)$ et de rayon 1.

$$M(z) \in \mathscr{C} \iff |z| = 1$$

Donc le point M' a pour affixe $z' = \dfrac{1}{2}(z + \dfrac{1}{z}) = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z}) = \Re(z) = \cos(\arg(z))$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos t \leq 1$. Donc $M' \in [KL]$.

On peut aussi prouver la réciproque (non demandée), c'est-à-dire que tout point du segment $[KL]$ admet un antécédent[1]. Soit $z' = x \in [-1;1]$ l'affixe d'un point M' du segment $[KL]$. Notons θ une solution de l'équation trigonométrique $\cos\theta = x$. Alors $M(z)$ avec $z = \cos\theta + i\sin\theta$ aura pour image $M'(z')$, et est un point du cercle $\mathscr{C}$.

[1] On aura alors montré que l'image du cercle $\mathscr{C}$ par l'application $z \mapsto \dfrac{1}{2}(z + 1/z)$ est exactement le segment $[KL]$


2
B
1
B′
A
A′
−2
−1
1
2
A1
C′
−1
−2
C