Devoir sur table | Mercredi 25 novembre 2009

Mathématiques

NOM : | GROUPE :

PRÉNOM :

Le soin, la clarté et la précision de la rédaction sont des éléments importants d'appréciation de votre copie. **Soulignez vos résultats.**
Les calculatrices sont autorisées.

Durée : *2 heures.*

Exercice 1 (Antilles-Guyane, juin 2009, partiel)
La température de refroidissement d'un objet fabriqué industriellement est une fonction f du temps t.
f est définie sur l'ensemble des nombres réels positifs et vérifie l'équation différentielle :

$$f'(t) + \frac{1}{2}f(t) = 10.$$

La température est exprimée en degrés Celsius (°C) et le temps t en heures.

1) Déterminer $f(t)$ pour $t \geqslant 0$, sachant que pour $t = 0$, la température de l'objet est 220 °C.

2) On pourra admettre désormais que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(t) = 200e^{-\frac{t}{2}} + 20$$

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal.

a) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.

b) Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
En déduire l'existence d'une asymptote $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

Exercice 2
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1) On pose $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$.

a) Déterminer le module et un argument de z_1, z_2 et $z_3 = \dfrac{z_2}{z_1}$

b) Calculer z_3 sous forme algébrique. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

c) Déterminer la forme algébrique de z_2^{2010}

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère les points A et B d'affixe respective $a = 1 + 3i$ et $b = -2 + i$. Caractériser géométriquement :

a) L'ensemble $\mathscr{E}_1$ de tous les points M d'affixe z tels que :

$$|z + 2 - i| = \sqrt{2}$$

b) L'ensemble $\mathscr{E}_2$ de tous les points M d'affixe z tels que :

$$|z - 1 - 3i| = |z|$$

Exercice 3 (Amérique du Nord, juin 2009, partiel)
Dans cet exercice on étudie une épidémie dans une population.
Au début de l'épidémie on constate que 0,01% de la population est contaminé.
Pour t appartenant à $[0; 30]$, on note $y(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours.
On a donc $y(0) = 0{,}01$.
On admet que la fonction y ainsi définie sur $[0; 30]$ est dérivable, strictement positive et vérifie :

$$y' = 0{,}05y(10 - y).$$

1) On considère la fonction z définie sur l'intervalle $[0;30]$ par $z = \dfrac{1}{y}$.

Démontrer que la fonction y satisfait aux conditions $\left\{\begin{array}{lcl} y(0) & = & 0{,}01 \\ y' & = & 0{,}05y(10-y) \end{array}\right.$ si et seulement si la fonction z satisfait aux conditions

$\left\{\begin{array}{lcl} z(0) & = & 100 \\ z' & = & -0{,}5z + 0{,}05 \end{array}\right.$

2) **a)** En déduire une expression de la fonction z puis celle de la fonction y.

b) Calculer le pourcentage de la population infectée après 30 jours. On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche.

Exercice 4 (Obligatoire)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthononnal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on associe à tout point M d'affixe z non nulle, le point M' milieu du segment $[MM_1]$ où M_1 est le point d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

Le point M' est appelé l'image du point M.

1) **a)** Montrer que les distances OM et OM_1 vérifient la relation $OM \times OM_1 = 1$. et que les angles $\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM_1}\right)$ et $\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM}\right)$ vérifient l'égalité des mesures suivantes $\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM_1}\right) = -\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM}\right)$ à 2π près.

b) Sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie) le point A appartient au cercle de centre O et de rayon 2. Construire le point A' image du point A. (On laissera apparents les traits de construction).

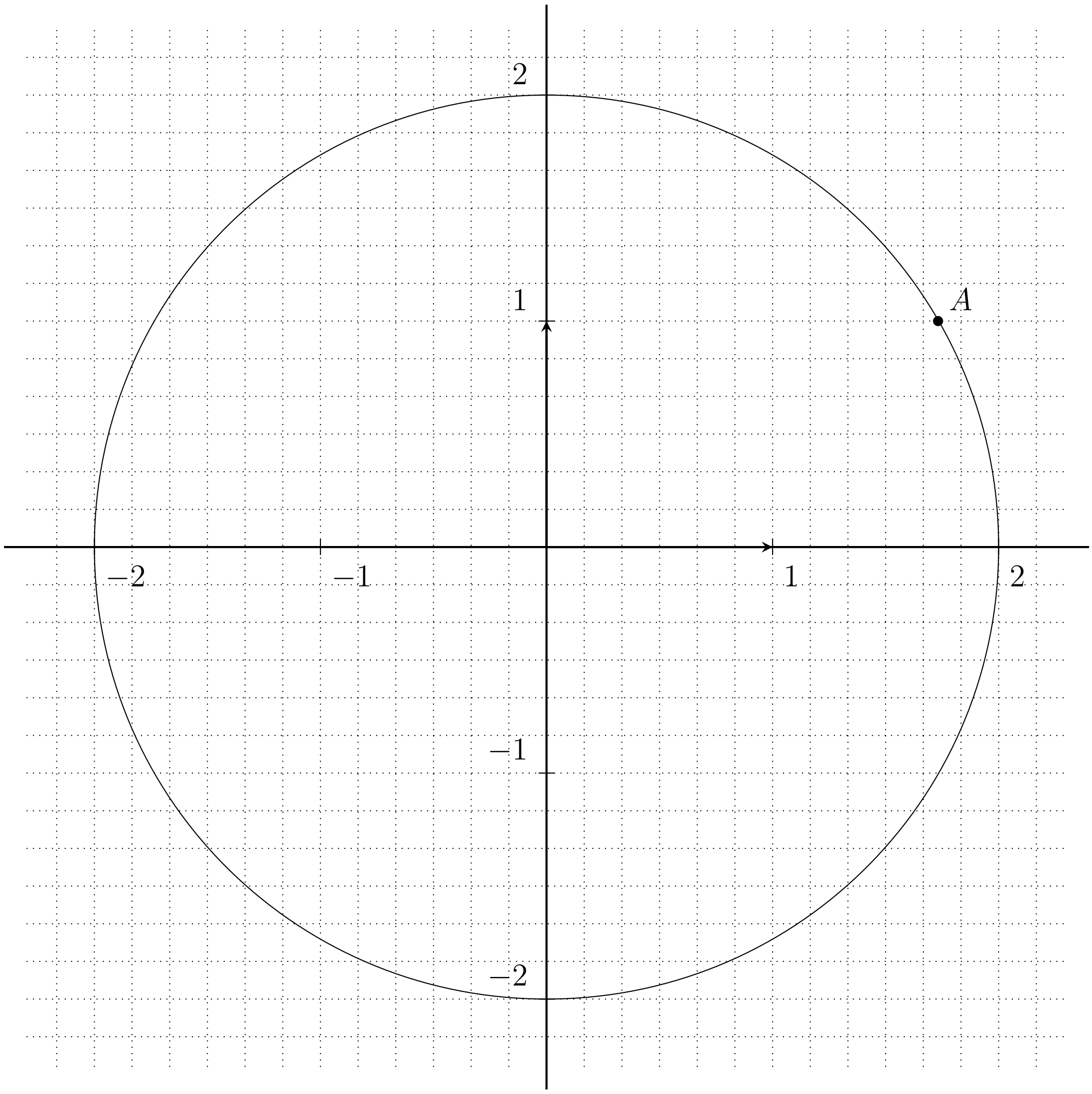
2) **a)** Justifier que pour tout nombre complexe z non nul, le point M' a pour affixe $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

b) Soient B et C les points d'affixes respectives $2i$ et $-2i$. Calculer les affixes des points B' et C' images respectives des points B et C.

c) Placer les points B, C, B' et C' sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie).

3) Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.

4) *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.* Montrer que si le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 alors son image M' appartient au segment $[KL]$ où K et L sont les points d'affixes respectives -1 et 1.


2
1
A
−2
−1
1
2
−1
−2