Mathématiques

NOM :

GROUPE :

PRÉNOM :

Spécialité maths

Le soin, la clarté et la précision de la rédaction sont des éléments importants d'appréciation de votre copie. **Soulignez vos résultats.**
Les calculatrices sont autorisées.

Durée : *4 heures.*

Exercice 1 (5 points)
Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation díinconnue z :

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0.$$

2) On considère les points A d'affixe $z_A = \sqrt{3} - i$, B d'affixe $z_B = \sqrt{3} + i$ et C le milieu de [OB] d'affixe z_C.

a) Déterminer la forme exponentielle de z_A, z_B et z_C.

b) Sur une figure, placer les points A, B et C, en prenant 2 cm pour unité.

c) Montrer que le triangle OAB est équilatéral.

3) Soit D l'image de C par la rotation r de centre O, d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et E l'image de D par la translation t de vecteur $2\overrightarrow{v}$.

a) Placer les points D et E sur une figure.

b) Montrer que l'affixe z_E du point E vérifie : $z_E = \dfrac{1}{2}\left[1 + i\left(4 - \sqrt{3}\right)\right]$.

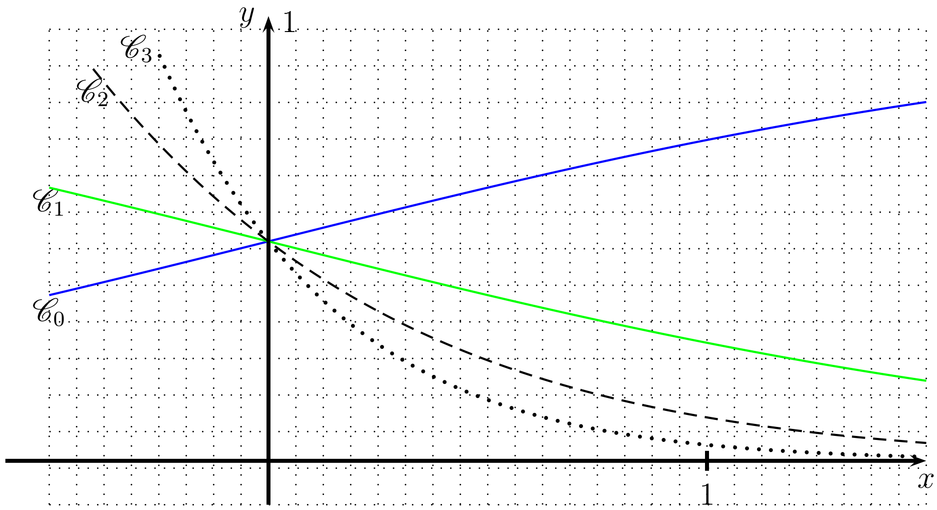
c) Montrer que $\mathrm{OE} = \mathrm{BE} = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$.

4) Montrer que les points A, C et E sont alignés.
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative , même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 2 (6 points)
Soit n un entier naturel.
On note f_n, la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. Les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont représentées ci-dessous :



Partie A : *Quelques propriétés des fonctions f_n et des courbes $\mathscr{C}_n$*

1) Démontrer que pour tout entier naturel n les courbes $\mathscr{C}_n$ ont un point A en commun. On préciser ses coordonnées.

2) Étude de la fonction f_0

a) Étudier le sens de variation de f_0.

b) Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.

c) Dresser le tableau de variation de fonction f_0 sur $\mathbb{R}$.

3) Étude de la fonction f_1

a) Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel x.

b) En déduire les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation.

c) Donner une interprétation géométrique de 3. a. pour les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.

4) Étude de la fonction f_n pour $n \geqslant 2$

a) Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout nombre réel x, on a :

$$f_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}.$$

b) Étudier les limites de la fonction f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.

Partie B : *Étude d'une suite liée aux fonctions f_n*

On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1) Calculer u_1 puis montrer que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire u_0.

2) Démontrer que, pour tout entier n : $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{-nx}\,dx$.

3) Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 e^{-nx}\,dx$. En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice 3 (4 points)

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.
La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.
La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.
Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.
La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1 euro et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1) Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2) Soient E et F les évènements :

E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges »
F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».

Montrer que $p(\text{E}) = 0{,}02$ et $p(\text{F}) = 0{,}17$.

3) Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 euros ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 euros ; sinon il ne reçoit rien.
X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel le joueur mise 1 euro).

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation.

4) Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2)

a) Démontrer que la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que $p_n = 1 - (0{,}9)^n$.

b) Justifier que la suite de terme général p_n est convergente et préciser sa limite.

c) Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0{,}9$?

Exercice 4 (5 points)

Pour chacune des propositions suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1) **Proposition 1** : « Pour tout entier naturel n non nul, n et $2n + 1$ sont premiers entre eux. » (1*pts*)

2) Soit x un entier relatif.
Proposition 2 : « $x^2 + x + 3 = 0$ (modulo 5) si et seulement si $x \equiv 1$ (modulo 5). » (1*pts*)

3) Soit N un entier naturel dont l'écriture en base 10 est $\overline{aba7}$.
Proposition 3 : « Si N est divisible par 7 alors $a + b$ est divisible par 7. » (1*pts*)

4) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Proposition 4 : « La similitude directe de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de centre le point d'affixe $1 - \mathrm{i}$ a pour écriture complexe $z' = \left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right) z + \sqrt{3} - \mathrm{i}\sqrt{3}$. » (1*pts*)

5) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère un point A. On désigne par a son affixe. On note s la réflexion d'axe $(\mathrm{O}\ ; \vec{u})$ et s_A la symétrie centrale de centre A.
Proposition 5 : « L'ensemble des nombres complexes a tels que $s \circ s_{\mathrm{A}} = s_{\mathrm{A}} \circ s$ est l'ensemble des nombres réels. » (1*pts*)