Mathématiques

NOM : GROUPE :

PRÉNOM :

Le soin, la clarté et la précision de la rédaction sont des éléments importants d'appréciation de votre copie. **Soulignez vos résultats.**
Les calculatrices sont autorisées.

Durée : *4 heures.*

Exercice 1 (Antilles, septembre 2008, 5 points)
Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation dínconnue z : (0,75*pts*)

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0.$$

2) On considère les points A d'affixe $z_A = \sqrt{3} - i$, B d'affixe $z_B = \sqrt{3} + i$ et C le milieu de [OB] d'affixe z_C.

a) Déterminer la forme exponentielle de z_A, z_B et z_C. (0,5*pts*)

b) Sur une figure, placer les points A, B et C, en prenant 2 cm pour unité. (0,5*pts*)

c) Montrer que le triangle OAB est équilatéral. (0,5*pts*)

3) Soit D l'image de C par la rotation r de centre O, d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et E l'image de D par la translation t de vecteur $2\overrightarrow{v}$.

a) Placer les points D et E sur une figure. (0,5*pts*)

b) Montrer que l'affixe z_E du point E vérifie : $z_E = \dfrac{1}{2}\left[1 + i\left(4 - \sqrt{3}\right)\right]$. (0,5*pts*)

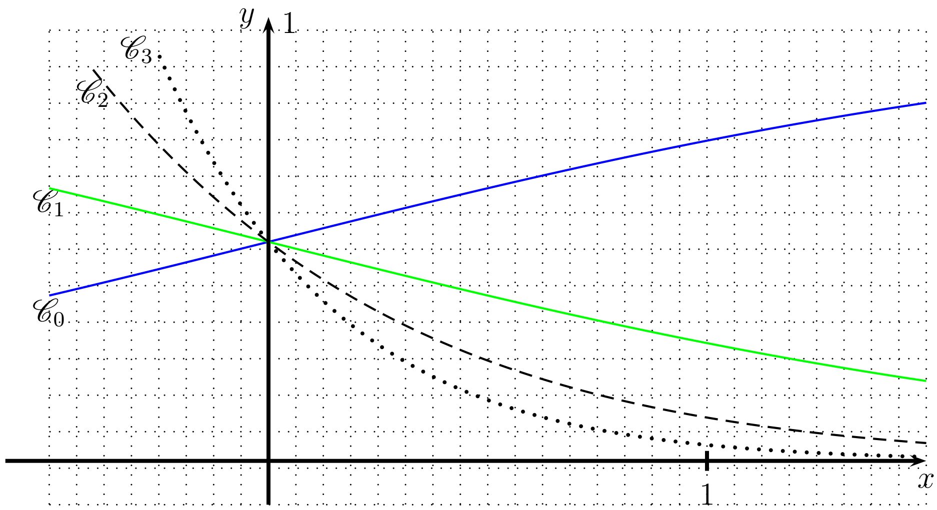
c) Montrer que OE = BE = $\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$. (0,75*pts*)

4) Montrer que les points A, C et E sont alignés. (1*pts*)
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative , même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 2 (Centres Étrangers, juin 2009, 6 points)
Soit n un entier naturel.
On note f_n, la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. Les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont représentées ci-dessous :



Partie A : *Quelques propriétés des fonctions f_n et des courbes $\mathscr{C}_n$*

1) Démontrer que pour tout entier naturel n les courbes $\mathscr{C}_n$ ont un point A en commun. On préciser ses coordonnées. (0,5*pts*)

2) Étude de la fonction f_0

a) Étudier le sens de variation de f_0. (0,5*pts*)

b) Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites. (0,5*pts*)

c) Dresser le tableau de variation de fonction f_0 sur $\mathbb{R}$. (0,25*pts*)

3) Étude de la fonction f_1

a) Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel x. (0,25*pts*)

b) En déduire les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation. (0,5*pts*)

c) Donner une interprétation géométrique de 3. a. pour les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$. (0,5*pts*)

4) Étude de la fonction f_n pour $n \geqslant 2$

a) Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout nombre réel x, on a : (0,5*pts*)

$$f_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}.$$

b) Étudier les limites de la fonction f_n en $-\infty$ et en $+\infty$. (0,5*pts*)

c) Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$. (0,5*pts*)

Partie B : *Étude d'une suite liée aux fonctions* f_n

On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1) Calculer u_1 puis montrer que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire u_0. (0,5*pts*)

2) Démontrer que, pour tout entier n : $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{-nx}\,dx$. (0,5*pts*)

3) Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 e^{-nx}\,dx$. En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite. (0,5*pts*)

Exercice 3 (France, septembre 2008, 4 points)

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.
La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.
La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.
Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.
La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1 euro et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1) Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré. (0,75*pts*)

2) Soient E et F les évènements :

E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges »
F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».

Montrer que $p(\text{E}) = 0{,}02$ et $p(\text{F}) = 0{,}17$. (0,5*pts*)

3) Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 euros ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 euros ; sinon il ne reçoit rien.
X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel le joueur mise 1 euro).

a) Déterminer la loi de probabilité de X. (0,5pts)

b) Calculer l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation. (0,75pts)

4) Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2)

a) Démontrer que la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que $p_n = 1 - (0{,}9)^n$. (0,5pts)

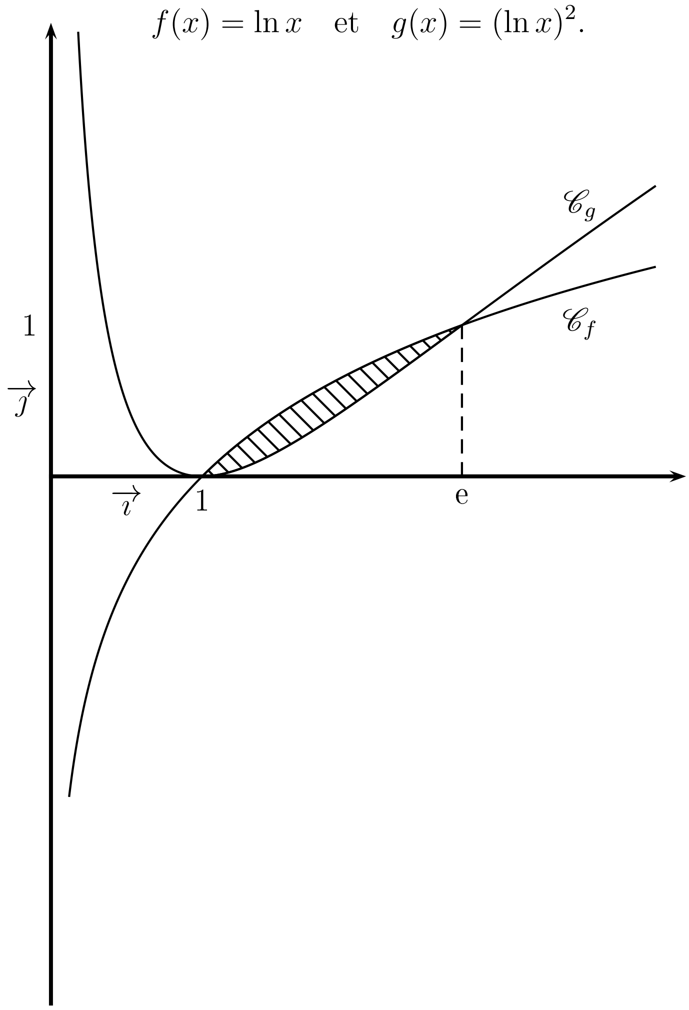
b) Justifier que la suite de terme général p_n est convergente et préciser sa limite. (0,5pts)

c) Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0{,}9$? (0,5pts)

Exercice 4 (France, juin 2008, 5 points)

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = (\ln x)^2.$$



1) On cherche à déterminer l'aire $\mathscr{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.

On note $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x$.

a) Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I. (1pts)

b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = \mathrm{e} - 2I$. (1pts)

c) En déduire J. (0,5pts)

d) Donner la valeur de $\mathscr{A}$. (0,5pts)

2) *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n 'aboutit pas.*

Pour x appartenant à l'intervalle $[1; e]$, on note M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et N le point de la courbe $\mathscr{C}_g$ de même abscisse. Pour quelle valeur de x la distance MN est maximale ? Calculer la valeur maximale de MN. (2pts)