Bac blanc — Samedi 9 janvier 2010

Mathématiques

NOM :

PRÉNOM :

GROUPE :

Le soin, la clarté et la précision de la rédaction sont des éléments importants d'appréciation de votre copie. **Soulignez vos résultats.**
Les calculatrices sont autorisées.

Durée : *4 heures.*

Exercice 1 (Liban — juin 2008 — 6 points)

Partie A. Démonstration de cours

Prérequis : définition d'une suite tendant vers plus l'infini.

« *une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A* ».

Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$. (1*pt*)

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous. Cette courbe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

1) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. (0.75*pts*)

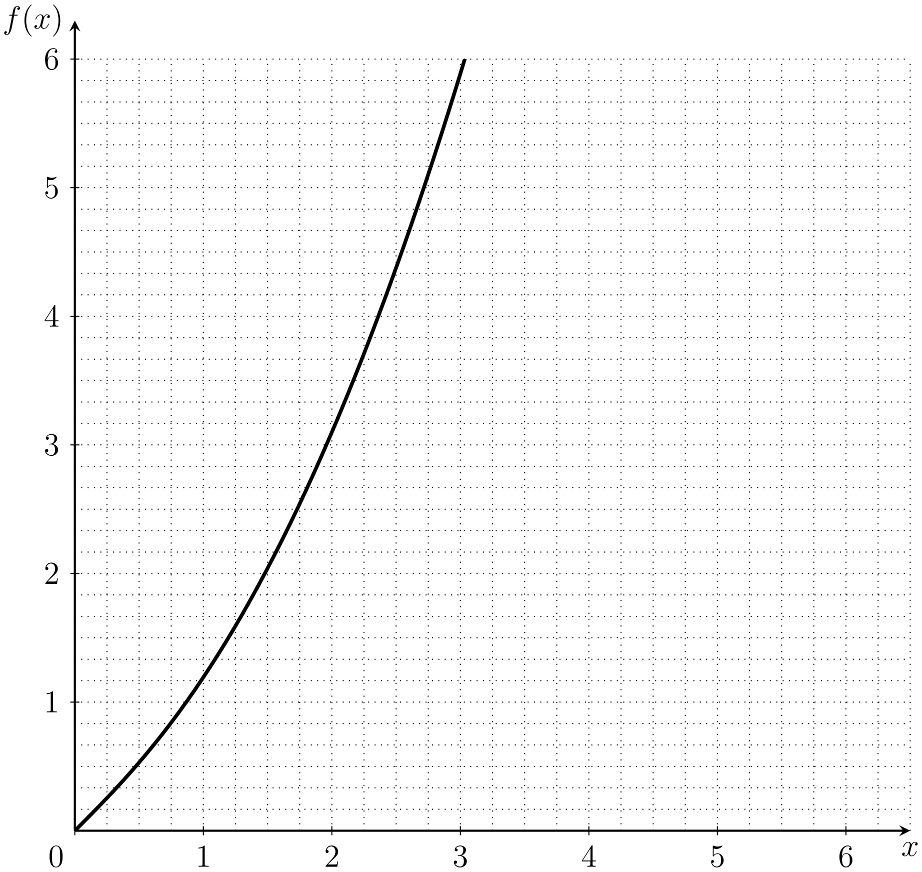
2) Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0. (0.5*pts*)

3) Tracer la droite $(\mathcal{T})$ sur le graphique. Dans la suite de l'exercice, on admet que, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la courbe $(\mathscr{C})$ est située au dessus de la droite $(\mathcal{T})$. (0.5*pts*)

Partie C

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Construire sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparents les traits de construction. (0.75*pts*)



2) À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation de la suite (u_n) et son comportement lorsque n tend vers $+\infty$? (0.5*pts*)

3) a) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$. $(0.5pts)$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante. $(0.5pts)$

c) (question ouverte) Montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée. $(0.5pts)$

d) En déduire la limite de la suite (u_n). $(0.5pts)$

Exercice 2 (5,25 points)

Pour chacune des questions, quatre propositions sont proposées dont une seule est exacte.
Pour chacune des questions donner, sans justification, la bonne réponse sur votre copie.
Une bonne réponse donne $0,75$ *point, une mauvaise réponse enlève* $0,25$ *point et l'absence de réponse est comptée* 0 *point.*
Tout total négatif est ramené à zéro.

Partie A

Soit $v = (v_n)_{n\geqslant 0}$ une suite. On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \mathrm{e}^{-v_n} + 1$$

1) a est un réel strictement positif et ln désigne la fonction logarithme népérien.
Si $v_0 = \ln a$ alors :

a) $u_0 = \dfrac{1}{a} + 1$ b) $u_0 = \dfrac{1}{1+a}$ c) $u_0 = -a + 1$ d) $u_0 = \mathrm{e}^{-a} + 1$

2) Si v est strictement croissante, alors :

a) u est strictement décroissante et majorée par 2

b) u est strictement croissante et minorée par 1

c) u est strictement croissante et majorée par 2

d) u est strictement décroissante et minorée par 1

3) Si v diverge vers $+\infty$, alors :

a) u converge vers 2 b) u diverge vers $+\infty$
c) u converge vers 1 d) u converge vers un réel ℓ tel que $\ell > 1$

4) Si v est majorée par 2, alors :

a) u est majorée par $1 + \mathrm{e}^{-2}$ b) u est minorée par $1 + \mathrm{e}^{-2}$
c) u est majorée par $1 + \mathrm{e}^{2}$ d) u est minorée par $1 + \mathrm{e}^{2}$

Partie B

5) Soit $a \in]0; +\infty[$ fixé. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a^x$ a pour dérivée :

a) $f'(x) = xa^{x-1}$ b) $f'(x) = e^a a^x$ c) $f'(x) = (\ln a)a^x$ d) $f'(x) = e^a a^{x-1}$

6) À tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \dfrac{z - 4\mathrm{i}}{z+2}$.

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est :

a) un cercle de rayon 1 b) une droite
c) une droite privée d'un point d) un cercle privé d'un point

7) Les notations sont les mêmes qu' à la question précédente.

L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel est :

a) un cercle b) une droite
c) une droite privée d'un point d) un cercle privé d'un point

Exercice 3 (Amérique du Sud — novembre 2008 — 5 points)

1) Résoudre l'équation différentielle :

$$2y' + y = 0 \quad \text{(E)},$$

dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) On considère l'équation différentielle :

$$2y' + y = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1) \quad \text{(E}'\text{)}$$

a) Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(mx^2 + px\right) \text{ soit solution de (E}'\text{)}$$

b) Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que g est solution de l'équation (E$'$) si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation (E).
Résoudre l'équation (E$'$).

3) Étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(x^2 + 2x\right)$.

4) Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction h.

Exercice 4 (Centres étrangers — juin 2009 — 4 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, on pourra donner un contre-exemple.

1) Pour tout complexe z, $\mathrm{Re}\left(z^2\right) = (\mathrm{Re}(z))^2$.

2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Pour tout nombre complexe z non nul, les points M d'affixe z, N d'affixe $\overline{z}$ et P d'affixe $\dfrac{z^2}{\overline{z}}$ appartiennent à un même cercle de centre O.

3) Pour tout nombre complexe z, si $|1 + \mathrm{i}z| = |1 - \mathrm{i}z|$, alors la partie imaginaire de z est nulle.

4) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Quels que soient les nombres complexes z et z' non nuls, d'images respectives M et M' dans le plan complexe, si z et z' vérifient l'égalité $|z + z'| = |z - z'|$, alors les droites (OM) et (OM') sont perpendiculaires.