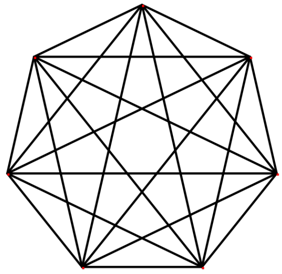

Exercices : graphes probabilistes

Exercice 1 (Nouvelle-Calédonie, Novembre 2006, 5 points)
Une association sportive propose à ses adhérents de pratiquer au choix soit le karaté, soit le judo ; chaque adhérent pratique un et un seul de ces deux sports.
Chaque année les adhérents renouvellent tous leur adhésion. L'association n'accueille pas de nouveaux adhérents. Elle compte 800 adhérents.
Pour le renouvellement des adhésions, les données des années précédentes permettent d'envisager le modèle suivant :
– 70 % des adhérents qui étaient inscrits au karaté se réinscrivent au karaté,
– 20 % des adhérents qui étaient inscrits au judo s'inscrivent au karaté.
En 2003, 200 adhérents étaient inscrits dans la section karaté et 600 adhérents étaient inscrits dans la section judo.
On appelle $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice traduisant la répartition des adhérents selon le sport pratiqué l'année $2003 + n$:
- a_n représente la proportion des adhérents inscrits au karaté l'année $2003 + n$
- b_n représente la proportion des adhérents inscrits au judo l'année $2003 + n$
- $a_n + b_n = 1$.

1) Représenter cette situation par un graphe probabiliste.

2) Déterminer l'état initial $P_0 = (a_0 \quad b_0)$.

3) **a.** Déterminer la matrice de transition M associée au graphe. (Rappel M est la matrice telle que : $P_{n+1} = P_n \times M$.)

b. En admettant que, en 2005, 36, 25 % des adhérents sont inscrits au karaté et 63,75 % des adhérents sont inscrits au judo, déterminer la répartition que le modèle envisagé permet de prévoir pour 2006. (Exprimer les résultats sous forme de pourcentages, puis donner les nombres d'adhérents correspondants.)

4) Soit $P = (x \quad y)$ Ia matrice correspondant à l'état stable, c'est à dire telle que $P \times M = P$. (Rappel : x et y sont des nombres réels tels que $x + y = 1$)

a. Déterminer les nombres x et y.

b. En déduire la limite de a_n quand n tend vers l'infini.
Interpréter ce résultat.

5) Dans la même ville, un club de judo accepte de nouveaux adhérents : chaque année le nombre de ses adhérents augmente de 10 %.
Le club comptait 405 adhérents en 2003. En utilisant une calculatrice, trouver en quelle année l'effectif de ce club sera pour la première fois supérieur à l'effectif de la section judo de l'association étudiée dans les questions précédentes ?

Exercice 2 (centres étrangers, juin 2005)
On a divisé une population en deux catégories : « fumeurs »et « non-fumeurs ».
Une étude statistique a permis de constater que, d'une génération à l'autre,
- 60 % des descendants de fumeurs sont des fumeurs,
- 10 % des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.

On suppose que le taux de fécondité des fumeurs est le même que celui des non-fumeurs.
On désigne par :
- f_n le pourcentage de fumeurs à la génération de rang n,

• $g_n = 1 - f_n$ le pourcentage de non-fumeurs à la génération de rang n, où n est un entier naturel.
On considère qu'à la génération 0, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs.
On a donc $f_0 = g_0 = 0,5$.

1) Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.

2) Justifier l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} & g_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & g_n \end{pmatrix} \times \text{ A où A désigne la matrice : } \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

3) Déterminer le pourcentage de fumeurs à la génération de rang 2.

4) Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.

5) Montrer que : pour tout entier naturel n, $f_{n+1} = 0,5f_n + 0,1$.

6) On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = f_n - 0,2$.

- **a.** Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- **b.** Donner l'expression de u_n en fonction de n.
- **c.** En déduire que, pour tout entier naturel n, $f_n = 0,3 \times 0,5^n + 0,2$.
- **d.** Déterminer la limite de la suite (f_n) lorsque n tend vers $+\infty$ et l'interpréter.

Exercice 3 (France 2008)

Deux fabricants de parfum lancent simultanément leur nouveau produit qu'ils nomment respectivement Aurore et Boréale.
Afin de promouvoir celui-ci, chacun organise une campagne de publicité.
L'un d'eux contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages hebdomadaires.
Chaque semaine, il interroge les mêmes personnes qui toutes se prononcent en faveur de l'un de ces deux produits.

Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Aurore et les autres préfèrent Boréale. Les arguments publicitaires font évoluer cette répartition : 10 % des personnes préférant Aurore et 15 % des personnes préférant Boréale changent d'avis d'une semaine sur l'autre.

La semaine du début de la campagne est notée semaine 0.
Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$, où a_n désigne la probabilité qu'une personne interrogée au hasard préfère Aurore la semaine n et b_n la probabilité que cette personne préfère Boréale la semaine n.

1) Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial.

2) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, A pour Aurore et B pour Boréale.

3)
- **a.** Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
- **b.** Montrer que la matrice ligne P_1 est égale à $\begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.

4)
- **a.** Exprimer, pour tout entier naturel n, P_n en fonction de P_0 et de n.
- **b.** En déduire la matrice ligne P_3. Interpréter ce résultat.

Dans la question suivante, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

5) Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste stable.

- **a.** Déterminer a et b.
- **b.** Le parfum Aurore finira-t-il par être préféré au parfum Boréale ? Justifier.