$\boxed{\text{Devoir de mathématiques pour le mardi 3 février}}$

Extrait de « France, juin 2002 »

Exercice 1

Une personne place, le 1$^{\text{er}}$ janvier 2001, sur un compte rémunéré à intérêts composés au taux annuel de 4 %, une somme de a euros.
De plus, chaque 1$^{\text{er}}$ janvier des années suivantes, c'est-à-dire au le 1$^{\text{er}}$ janvier 2002, 1$^{\text{er}}$ janvier 2003, ..., etc, elle place sur ce compte la somme de 1 000 euros.
On pose $U_0 = a$. Plus généralement, pour tout entier naturel n, on appelle U_n la somme disponible sur le compte, le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $(2001 + n)$.

1) **a.** D'une année sur l'autre (passage de $2001+n$ à $2001+(n+1)$) la somme a augmenté de 4% : $U_n + (4/100)\times U_n = 1{,}04U_n$. De plus elle place sur ce compte la somme de 1000 euros. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} = 1{,}04U_n + 1000$$

b. Si la suite était arithmétique, alors la différence entre deux termes consécutifs serait constante : on aurait $U_1 - U_0 = \cdots = U_{n+1} - U_n = \cdots = r$. Or ici

$$U_{n+1} - U_n = 0{,}04U_n + 1000$$

Ce qui n'est constant que si U_n est constant, et ce n'est pas le cas (on rajoute 1000 euros chaque mois). Donc $\boxed{\text{ce n'est pas une suite arithmétique}}$.

Si la suite était géométrique (et jamais nulle), alors le quotient de deux termes consécutifs serait constant : on aurait $U_1/U_0 = \cdots = U_{n+1}/U_n = \cdots = q$. Or ici

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1{,}04 + \frac{1000}{U_n}$$

Ce qui n'est constant que si U_n est constant, et ce n'est pas le cas. Donc la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\text{n'est pas une suite géométrique}}$.

2) *Commentaire : Comme toujours pour ce type de question, nous allons essayer de trouver la formule de récurrence, celle qui permet de passer de V_n à V_{n+1}. Pour obtenir le résultat, nous n'avons pas 36 possibilités : il faut utiliser la formule de récurrence définissant la suite (U_n). La méthode consiste donc à*

- *Écrire V_{n+1} en fonction de U_{n+1},*
- *Remplacer U_{n+1} par son expression en fonction de U_n,*
- *Remplacer U_n par son expression en fonction de V_n.*

Remarque : si $V_n = U_n + 25000$, alors $U_n = V_n - 25000$. C'est débile, mais ça peut ne pas sauter aux yeux.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\begin{aligned}
V_{n+1} &= U_{n+1} + 25000 \\
&= 1{,}04U_n + 1000 + 25000 && \text{(d'après la question 1.a)} \\
&= 1{,}04(V_n - 25000) + 1000 + 25000 && (\text{car } U_n = V_n - 25000) \\
&= 1{,}04V_n - 26000 + 1000 + 25000 \\
&= 1{,}04V_n
\end{aligned}$$

La suite (V_n) est donc une $\boxed{\text{suite géométrique}}$ de premier terme $V_0 = U_0 + 25000 = \boxed{a + 25000}$ et de raison $\boxed{q = 1{,}04}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{V_n = (a+25000) \times (1{,}04)^n}$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{U_n = V_n - 25000 = (a+25000) \times (1{,}04)^n - 25000}$.

3) En $2005 = 2001 + 4$ la somme sur le compte sera $U_4 = (a+25000) \times (1{,}04)^4 - 25000$. On veut que $U_4 = 15000$. Résolvons l'équation.

$$\begin{aligned}
(a+25000) \times (1{,}04)^4 - 25000 = 15000 &\iff (a+25000) \times (1{,}04)^4 - 25000 = 15000 \\
&\iff (a+25000) \times (1{,}04)^4 = 35000 \\
&\iff a + 25000 = \frac{35000}{1{,}04^4} \\
&\iff a = \frac{35000}{1{,}04^4} - 25000
\end{aligned}$$

Le placement initial minimal est $a = 4918{,}15$ (on arrondit par excès).

Exercice 2

64 page 359 : **1)** $p_0 = 150000$ et $p_{n+1} = (1 - \frac{20}{100})p_n = 0{,}8p_n$. Donc c'est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme 150000. Ainsi $\boxed{p_n = 150000 \times (0{,}8)^n}$.

2) Somme d'une suite géométrique, entre 0 et n :

$$S_n = p_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 150000 \times \frac{1-0{,}8^{n+1}}{1-0{,}8}$$

Ici $1996 = 1987 + 9$ donc $n = 9$: $S_9 = 150000 \times \dfrac{1-0{,}8^{10}}{0{,}2} \simeq 669469$ tonnes.

16 page 354 : L'objectif de cet exercice est de savoir manier la calculatrice.

1) Voici les résultats que vous devez avoir obtenu.

n	u(n)
0	-1
1	2.1
2	5.54
3	11.61
4	28.09
5	110.02
6	1323.4
7	176465.6
8	3114187385.7
9	9.70E+017
10	9.41E+034
11	8.85E+068
12	7.83E+136
13	6.12E+272

2) Au vu des premiers termes, la suite semble croissante.

3) Une suite (w_n) est croissante si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} \geq w_n$. Ce qui s'écrit aussi $w_{n+1} - w_n \geq 0$. Or

$$w_{n+1} - w_n = (3 + w_n + w_n^2) - w_n = 3 + w_n^2$$

Ce qui est positif, vu qu'un carré est toujours positif et que 3 est positif. Donc $\boxed{(w_n)_n \text{ est croissante}}$.