Exercices : Probabilités

Exercice 1

Une librairie organise un sondage sur la lecture, en interrogeant 500 clients.
La première question concerne le nombre de livres lus par an ; parmi les 500 clients :
– 55% déclarent lire au moins 12 livres par an ;
– 40 % déclarent lire plus de 4 et moins de 12 livres par an ;
– les autres lisent au plus quatre livres par an.
La deuxième question concerne ce qui guide le choix des lectures des personnes interrogées :
– 220 clients déclarent être influencés dans leur choix par les médias (presse, radio, télévision,...) ;
– les autres clients déclarent ne pas être influencés par les médias.

1) Compléter le tableau suivant (qui comporte des données supplémentaires) :

Nombre de livres lus Choix	Au plus 4	Plus de 4 et moins de 12	Au moins 12
influencé par les médias	16		
non influencé par les médias			180

2) On considère les deux phrases suivantes :
A : « le client interrogé déclare être influencé par les médias dans le choix de ses lectures » ;
B : « le client interrogé lit au moins 12 livres par an ».
La phrase A (par exemple) est vraie ou fausse selon la personne choisie. C'est une « proposition ».
On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des gens qui sont influencés par les médias, c'est-à-dire l'ensemble des gens qui *vérifient* A. De même, $\mathscr{B}$ est l'ensemble des gens qui vérifient B.
Entourer dans le tableau les ensembles $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$.

3) Entourer dans le tableau l'ensemble des gens influencé par les médias **et** lisant au moins 12 livres par an. Décrire cet ensemble à l'aide de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$.

4) Faire de même pour A *ou* B.

5) On cherche à décrire l'ensemble des gens tels que A soit faux.

a) Décrire par une phrase la plus proche de A possible. On la note $\overline{A}$. C'est la « négation de A ».

b) Entourer dans le tableau l'ensemble correspondant.

c) Décrire cet ensemble à partir de l'ensemble $\mathscr{A}$.

6) Mêmes questions pour $\overline{B}$.

7) Mêmes questions pour $\overline{A \text{ ou } B}$.

8) Mêmes questions pour $\overline{A \text{ et } B}$.

Exercice 2

Parmi les phrases suivantes, lesquelles sont vraies. Si la phrase est fausse, indiquer sa négation (qui doit donc être vraie...)
– « le lycée est entièrement peint en rouge et on est en avril »
– « Créteil est en Amérique ou les élèves de 2e6 sont en seconde »

– « $1 \leq 2$ »

Exercice 3

On considère les phrases suivantes :
A : « tous les élèves de seconde 6 ont les cheveux foncés ».
$B(x)$: « l'élève x dors au lycée ».

1) **a)** La phrase A est-elle vraie dans la classe ? Pourquoi ? Écrire la négation de A.

b) Si on note $A'(x)$ la phrase « l'élève x a les cheveux foncé », décrire A à l'aide de $A'(x)$.

c) Même question pour la négation de A.

2) On considère la phrase « Il existe un élève x à Gutenberg tel que $B(x)$ ». Est-elle vraie ? Écrire sa négation à l'aide de $\overline{B(x)}$.

Exercice 4

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$(\forall t > 0, \quad -t < x < t) \Longleftrightarrow (x = 0)$$

où « $\forall$ » signifie « pour tout ».

Exercice 5
Exprimer les propriétés suivantes à l'aide de quantificateurs (f est une fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$).
- f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- f ne prend pas de valeur négative.
- f est constante.
- f ne prend jamais deux fois la même valeur.

Exercice 6
Écrire la négation de chacune des propositions.
Déterminer pour chacune des affirmations suivante si elle est vraie ou fausse, en justifiant.
$\forall$ signifie « pour tout » et $\exists$ signifie « il existe ».

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 > 0$

2) $\exists x \in \mathbb{R} \quad 2x - 1 = 12$

3) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists p \in \mathbb{N} \quad n = 2p$

4) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists p \in \mathbb{N} \quad p = 3n$

5) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists p \in \mathbb{N} \quad n(n+1) = 2p$

6) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x \geq y$

7) $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} \quad x \geq y$

8) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq y$

9) $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq y$

Exercice 7 (syllogismes)
le syllogisme est un raisonnement logique à deux propositions (également appelées prémisses) conduisant à une conclusion qu'Aristote a été le premier à formaliser. Voici un exemple classique :

1) Tous les hommes sont mortels

2) Socrate est un homme

3) Conclusion : Socrate est mortel

Si on note $A(x)$ la proposition « x est mortel » et $B(x)$ la proposition « x est un homme », on peut traduire en :

1) Pour tout x, ($B(x)$ est vraie implique $A(x)$ est vraie).

2) B(Socrate) est vraie

3) Conclusion : A(Socrate) est vraie

La première proposition est vraie *pour tout* x, donc en particulier pour $x =$ Socrate. L'exemple suivant est repris de Lewis Carroll (*Logique sans peine*) :

– Les seuls animaux dans cette maison sont des chats ;
– Tout animal qui aime contempler la lune est apte à devenir un animal familier ;
– Quand je déteste un animal, je l'évite soigneusement ;
– Aucun animal n'est carnivore, à moins qu'il n'aille rôder dehors la nuit ;
– Aucun chat ne manque jamais de tuer les souris ;
– Aucun animal ne s'attache jamais à moi, excepté ceux qui sont dans la maison ;
– Les kangourous ne sont pas aptes à devenir des animaux familiers ;
– Aucun animal non carnivore ne tue de souris ;
– Je déteste les animaux qui ne s'attachent pas à moi ;
– Les animaux qui vont rôder dehors la nuit aiment toujours contempler la lune ;
Conclusion : J'évite toujours soigneusement les kangourous.

Vérifier le raisonnement.