Devoir de mathématiques pour le mercredi 18 mars

Correction.

Exercice 24

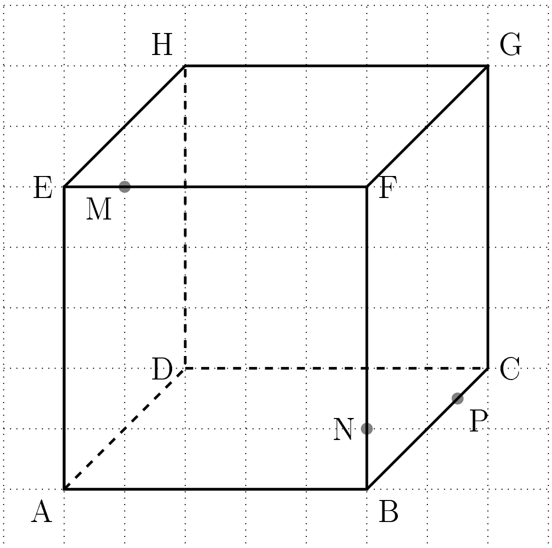
Il faut bien identifier les plans qui nous intéressent. Tout d'abord, quelles sont les droites parallèles ((AB) et (CD)), puis quelle est la droite intersection de deux plans ((NM)).

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles, et contenues dans les plans (ABM) et (SCD). Les plans (ABM) et (SCD) sont sécants, d'après l'énoncé, selon la droite (MN).

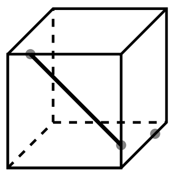
Donc, d'après le théorème du toit, $(ABM) \cap (SCD) = (MN)$ est parallèle à (AB) et (CD).

Exercice 68

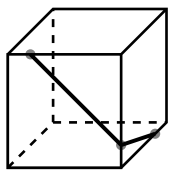
Construire une section, c'est construire la trace du plan par lequel on coupe (ici, MNP) sur chacune des faces.



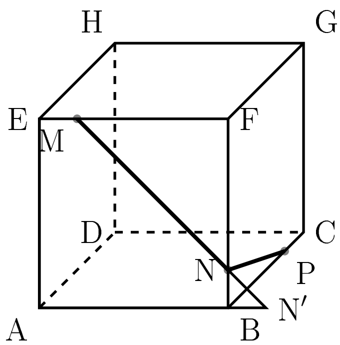
- Face $ABFE$.
  $M \in (EF) \subset (BFE)$ et $M \in (MNP)$ donc $M \in (BFE) \cap (MNP)$;
  $N \in (FB) \subset (BFE)$ et $N \in (MNP)$ donc $N \in (BFE) \cap (MNP)$.
  Ainsi $\boxed{(BFE) \cap (MNP) = (MN).}$



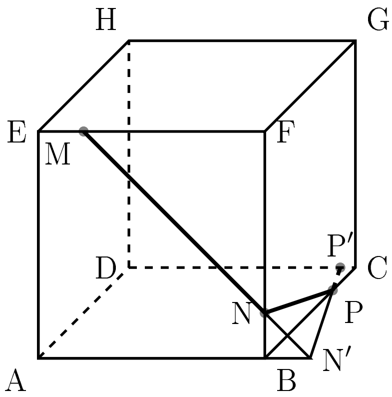
- Face $BCGF$.
  $N \in (FB) \subset (BFC)$ et $N \in (MNP)$ donc $N \in (BFC) \cap (MNP)$.
  $P \in (BC) \subset (BFC)$ et $P \in (MNP)$ donc $P \in (BFC) \cap (MNP)$.
  Ainsi $\boxed{(BFC) \cap (MNP) = (NP).}$

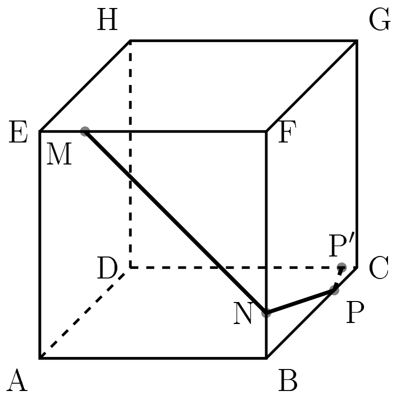


- Face $ABCD$.
  Pour construire cette section, on va commencer par chercher comment passer d'une face où l'on connaît la section (face $BCGF$) à une face contiguë (face $ABCD$).
  Pour cela, il faut réussir à « tourner autour » de l'arête (AB).
  On prolonge donc la droite (MN), pour chercher son intersection N' avec (AB).



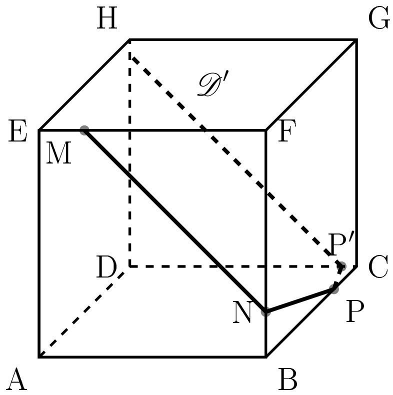
Le point N' appartient à (MNP) et à la face $ABCD$ par construction, donc à l'intersection $(MNP) \cap (ABC)$. De même pour le point P. Donc la section est la droite $(N'P)$. Il ne reste plus qu'à tracer.
On note P' le point d'intersection de $(N'P)$ et (DC).



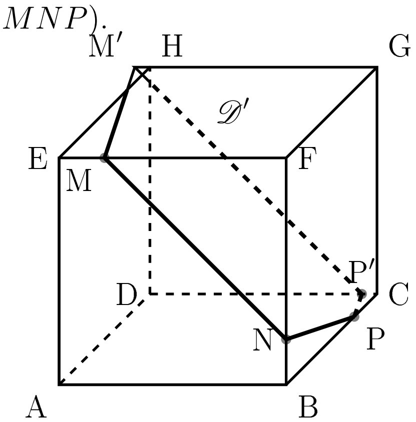


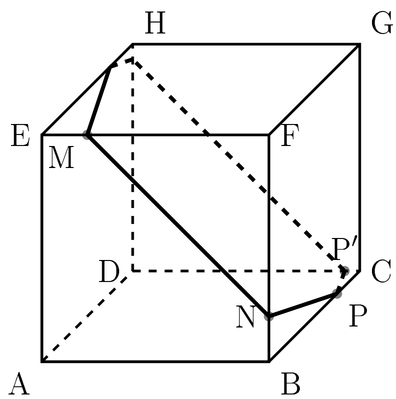
Dans la deuxième figure on supprime les constructions pour alléger le dessin (mais sur votre copie il faut bien sûr les laisser).

- Face $DCGH$.
  Le plan (ABE) est parallèle au plan (DCH) et (MNP) coupe ces deux plans, donc les droites $(ABE) \cap (MNP) = (MN)$ et $(DCH) \cap (MNP) = \mathscr{D}'$ sont parallèles. De plus $P' \in (DCH) \cap (MNP) = \mathscr{D}'$, donc $\mathscr{D}'$ est la parallèle à (MN) passant par P'.



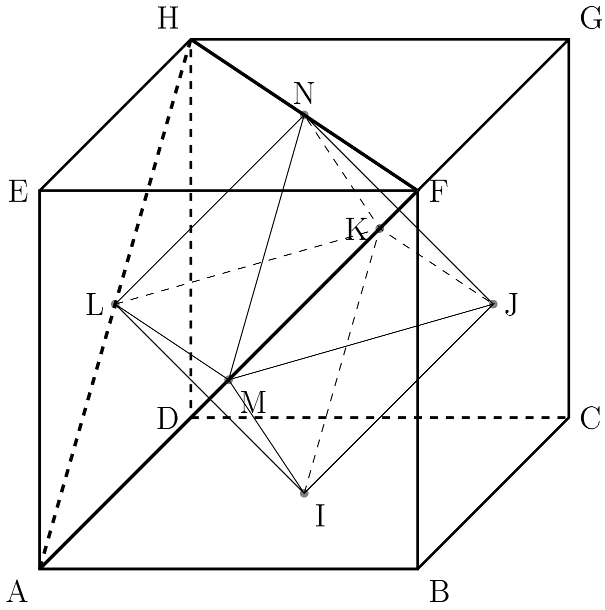
- Face $EFGH$ et conclusion (face $ADHE$).
  On a déjà le point M, il nous manque donc un point. Pour l'obtenir, on prolonge $\mathscr{D}'$ et on note M' sont intersection avec l'arête (HG). On a $M' \in (HG) \subset (EFG)$ et $M' \in (MNP)$, donc $(MM') = (EFG) \cap (MNP)$.



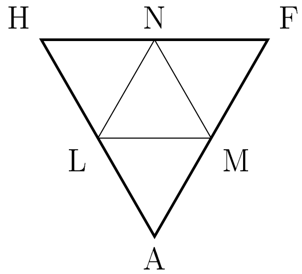


Exercice 3

Figure :



1) Le point N est le milieu de $[FH]$, donc appartient au plan (AFH). De même pour M et L. Nous avons donc la situation suivante dans le plan (AFH) :



L est le milieu de $[AH]$ et M est le milieu de $[AF]$, donc, d'après le théorème des milieux,

$$(LM) \text{ est parallèle à } (HF) \qquad \text{et} \qquad LM = \frac{1}{2}HF$$

On peut, de plus, calculer la longueur HF en fonction de la longueur d'un arête du cube : $EFGH$ est un carré de coté a, donc sa diagonale est de longueur $HF = a\sqrt{2}$ (Pythagore). Ainsi

$$LM = \frac{1}{2}a\sqrt{2} = a\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) **a.** En continuant à observer la figure ci-dessus, on constate que le triangle AHF semble équilatéral, et que l'on peut refaire le raisonnement de la question précédente.

On fait donc le même raisonnement avec les points N et M et le coté $[HA]$ du triangle (qui est la diagonale d'une face), puis avec les points L et N et le coté $[AF]$:

$$NM = \frac{1}{2}HA = a\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad LN = \frac{1}{2}HA = a\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Le triangle LMN est donc équilatéral de coté $a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b. On peut faire un raisonnement identique dans les plans (EGB), (FHC), (EGD), (ACH), (ACF), (BDG) et (BDE).

Ce qui prouve que $\boxed{\text{toutes les faces de l'octaèdre sont des triangles équilatéraux.}}$

c. Le quadrilatère $JKLM$ a $\underline{\text{tous ses cotés de même longueur}}$ $(a\sqrt{2}/2)$. Il reste à prouver
- que les quatre points sont coplanaires ;
- que les cotés sont perpendiculaires deux à deux.

D'après la réponse à la question 1, (LM) est parallèle à (HF), et (KJ) est aussi parallèle à (HF). Donc (LM) est parallèle à (KJ) : ces deux droites sont donc coplanaires. Donc tous les points les constituant sont coplanaires, en particulier $\underline{J,\ K,\ L \text{ et } M \text{ sont coplanaires.}}$

Comme ci-dessus, on sait que (LM) est parallèle à (HF), et de même que (MJ) est parallèle à (EG). Or (HF) et (EG) sont les diagonales du carré $EFGH$, et sont donc perpendiculaires. Ainsi $\underline{(LM) \perp (MJ)}$ (elles ont un point commun).

On montre de même que $\underline{(MJ) \perp (JK),\ (JK) \perp (KL) \text{ et } (KL) \perp (LM)}$.

En conclusion, $\boxed{\text{le quadrilatère } JKLM \text{ est un carré.}}$

Par symétrie, le résultat est le même pour les autres quadrilatères.

d. Les diagonales $[LJ]$ et $[KM]$ du carré $JKLM$ sont concourantes en leur milieu (et perpendiculaires). De même pour les diagonales $[LJ]$ et $[IN]$ du carré $IJLN$. Donc les droites (KM) et (IN) passent par le milieu du segment $[LJ]$, elle sont donc concourantes. Et dans le carré $IKMN$ les diagonales sont perpendiculaires : les diagonales (LJ), (IN) et (KM) sont $\boxed{\text{concourantes et deux à deux perpendiculaires.}}$

(Le point d'intersection est forcément le centre du cube, pour des raisons de symétrie).

3) L'octaèdre $IJKLMN$ est composé de deux pyramides ($JKLMN$ et $JKLMI$) à base carré.

Le volume d'une pyramide est $\dfrac{1}{3}\mathscr{B} \times h$ où $\mathscr{B}$ est l'aire de la base et h la hauteur.

La base est un carré de coté $LM = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\mathscr{B} = \left(a\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2 \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{a^2}{2}$.

En considérant le rectangle $EGCA$, on remarque que $h = \dfrac{1}{2}NI = \dfrac{1}{2}EA = \dfrac{a}{2}$.

Donc le volume d'une pyramide est $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{a^2}{2} \times \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3}{12}$. Or il y en a deux, donc

$$\boxed{\mathscr{V} = \frac{a^3}{6}}$$