Contrôle de Mathématiques (**A**)

Exercice 1

1) Tracer, dans un repère orthonormé, la représentation graphique de la fonction $f(x) = 2x - 1$.

2) Tracer la droite passant par $A(-1, 1)$ et $B(2, -1)$. Déterminer la valeur du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine correspondants.

Exercice 2

Les deux premières questions sont une étude de signe, et l'expression est déjà factorisée : il suffit de dresser le tableau de signes. Dans la dernière question, il faut se ramener à une étude de signes, factoriser, puis dresser le tableau de signes.

1) $x(3x - 2)(3 - 4x) < 0$

2) $(-2x - 1)(x - \sqrt{2}) \geq 0$

3) $(x - 2)^2 < 25 \iff (x - 2)^2 - 25 < 0$

De plus $(x - 2)^2 - 25 = (x - 2)^2 - 5^2 = (x - 2 - 5)(x - 2 + 5) = (x - 7)(x + 3)$. Donc

$$(x - 2)^2 < 25 \iff (x - 7)(x + 3) < 0$$

Exercice 3

1) $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) \leq g(x)$, c'est-à-dire tel que $f(x) - g(x) \leq 0$.

2)

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \underline{(8x - 5)}(6x - 5) - (1 - 6x)\underline{(8x - 5)} \\ &= \underline{(8x - 5)}\left[(6x - 5) - (1 - 6x)\right] \\ &= (8x - 5)(6x - 5 - 1 + 6x) \\ &= (8x - 5)(12x - 6) \end{aligned}$$

(puisque l'on nous donne le résultat, on pouvait aussi tout développer et montrer que les deux membres sont égaux)

3) Tableau de signe :

4) $S =$

5) Donc $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ pour tout $x \in S =$.

Exercice 4

En s'inspirant de la démarche de l'exercice précédent, étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans les cas suivants.

1) $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) - g(x) \leq 0$.

Or $f(x) - g(x) = (4x - 1)(2x + 1) - (4x - 1)(3x + 2) = (4x - 1)(2x + 1 - 3x - 2) = (4x - 1)(-x - 1)$.

Donc $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ pour tout $x \in S =$.

2) $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) - g(x) \leq 0$.

Or $(1 - x)^2 = (1 - x)(1 - x)$:

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (1 - x)^2 - (1 - x)(5x + 2) \\ &= \underline{(1 - x)}(1 - x) - \underline{(1 - x)}(5x + 2) \\ &= \underline{(1 - x)}(1 - x - 5x - 2) \\ &= (1 - x)(-6x - 1) \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ pour tout $x \in S =$.

3) $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) - g(x) \leq 0$.
Pour factoriser, il faut constater que $-3x+1$ est l'opposé de $3x-1$: $-3x+1 = -(3x-1)$.
En remplaçant, il vient $g(x) = (-(3x-1))^3 = (-1)^3(3x-1)^3 = -(3x-1)^3$.

$$f(x) - g(x) = (3x-1)^2(2x+3) + (3x-1)^3 = (3x-1)^2\left[(2x+3) + (3x-1)\right] = (3x-1)^2(5x+2)$$

De plus, un carré est toujours positif : $(3x-1)^2 \geq 0$. Donc il suffit d'étudier le signe de $5x+2$.

Contrôle de Mathématiques (**B**)

Exercice 1

1) Tracer, dans un repère orthonormé, la représentation graphique de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$.

2) Tracer la droite passant par $A(1, -1)$ et $B(-3, 2)$. Déterminer la valeur du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine correspondants.

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes

1) $x(3 - 2x)(3x - 4) \geq 0$

2) $(-3x - 2)(2x - \sqrt{3}) < 0$

3) $(x + 1)^2 > 9$

Exercice 3

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (6x - 5)(11x - 3) \qquad g(x) = (1 - 6x)(6x - 5)$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentant la fonction f, et $\mathscr{C}_g$ la courbe représentant la fonction g. Le but est d'étudier la position relative de ces deux courbes (quand est-ce que $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$?).

1) Décrire le problème par une inéquation, puis se ramener à une étude de signe.

2) Montrer que $f(x) - g(x) = (6x - 5)(17x - 4)$.

3) Dresser le tableau de signe de $f(x) - g(x)$.

4) En déduire les solution de l'inéquation $f(x) - g(x) \leq 0$.

5) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 4

En s'inspirant de la démarche de l'exercice précédent, étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans les cas suivants.

1) $f(x) = (7x - 2)(5x + 2)$ et $g(x) = (7x - 2)(7x + 4)$.

2) $f(x) = (3 - 2x)^2$ et $g(x) = (1 - x)(3 - 2x)$.

3) (bonus) $f(x) = (3x - 1)^2(2x + 3)$ et $g(x) = (-3x + 1)^3$