Université de Paris Dauphine
Année universitaire 2008-2009
Analyse 3, DUMI2E

Chapitre 3: Suites de fonctions

Exercice 1. Soit $f_n(x) = \frac{e^{nx}+2}{e^{nx}+1}$, pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement mais pas uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\begin{cases} f(x) = 2 \text{ si } x < 0 \\ f(0) = \frac{3}{2} \\ f(x) = 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Exercice 2. Soit $f_n(x) = (1 + x^n)^{\frac{1}{n}}$, pour $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f à déterminer.

Exercice 3. Soit $f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n+1}\right)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$.

2) La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$? (On pourra regarder $f_n(x_n)$ avec $x_n = (n+1)\frac{\pi}{2}$)

Exercice 4. Soit $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, pour $x \in \mathbb{R}^+$.

1) Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = e^x$.

2) Montrer que la convergence est uniforme sur $[0, A]$, quel que soit $A > 0$.

3) A-t-on convergence sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 5. Etudier la convergence simple et uniforme sur $[0, 1]$ de la suite de fonctions (f_n) dans chacun des cas suivants.

$$(i)\ f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}, \qquad (ii)\ f_n(x) = n^2 x^{2n}(1-x).$$

Exercice 6. On considère la suite de fonctions (f_n) définies sur $[0, 1]$ par,

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = \frac{n(x^3 + x)e^{-x}}{nx + 1}.$$

1) Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.

2) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, et pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2}{nx + 1}.$$

3) Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[\varepsilon, 1]$, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$. Converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

4) Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx.$$

Commenter le résultat.

Exercice 7. Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par,

$$\forall x\in[0,1],\quad f_n(x)=x^n\ln(\cos x).$$

1) Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement mais pas uniformément sur $[0,1]$.

2) Soit $0<a<1$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,a]$ et déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^a f_n(x)dx.$$

3) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n\ln(\cos x)dx=0.$$

Exercice 8. (*Examen janvier 2003*)

Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x)=\begin{cases}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n, \text{ si } x\in[0,n],\\ 0 \text{ si } x>n.\end{cases}$$

1) Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction e^{-x}.

2)

a) Soit, pour tout $x\geq 0$, $h(x)=xe^{-x}$. Montrer que, pour tout $x\geq 0$,

$$|h(x)|\leq e^{-1}.$$

b) Pour $n>1$, on pose

$$g_n(x)=\begin{cases}e^{-x}-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n, \text{ si } x\in[0,n],\\ e^{-x} \text{ si } x>n.\end{cases}$$

Montrer que, pour tout $x\in[0,n]$, $g_n'(x)=e^{-x}h_n(x)$, avec

$$h_n(x)=-1+e^x\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}.$$

c) Calculer $h_n'(x)$, pour $x\in[0,n]$. En déduire qu'il existe $\alpha_n\in[1,n]$ tel que

$$g_n'(\alpha_n)=0;\qquad \forall x\in[0,\alpha_n[,\ g_n'(x)>0;\qquad \forall x\in]\alpha_n,n],\ g_n'(x)<0.$$

d) Montrer que $g_n(\alpha_n)=\frac{1}{n}\alpha_n e^{-\alpha_n}$ et donner le tableau de variation de g_n sur $\mathbb{R}^+$.

e) En déduire que (f_n) converge uniformément vers e^{-x} sur $\mathbb{R}^+$ et calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx.$$

Exercice 9. On note $I = [0, \frac{1}{2}]$. Le but de l'exercice est de construire une application continue $f : I \to \mathbb{R}$, telle que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x \big(f(t) + f(t^2)\big)\, dt.$$

On considère les applications $f_n : I \to \mathbb{R}$ définies par récurrence:

$$\begin{cases} f_0(x) = 1, \quad \forall x \in I, \\ f_{n+1}(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x \big(f_n(t) + f_n(t^2)\big)\, dt. \end{cases}$$

1) Calculer f_1 et f_2. Montrer que, pour tout entier n, f_n est un polynôme.

2) On note, pour $n \geq 1$,

$$D_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

Calculer D_1 et D_2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in I, \quad |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2} D_n,$$

et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$D_n \leq \frac{1}{2^n}.$$

3) On pose $u_n(x) = f_k(x) - f_{k-1}(x)$.

a) Soit x fixé dans I. Montrer que la série numérique $\sum_k u_k(x)$ est absolument convergente.

b) On note, pour tout $x \in I$, $S(x) = \sum_{k \geq 1} u_k(x)$. En remarquant que

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = f_n(x) - 1,$$

montrer que la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction que l'on notera f. Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de $S(x)$.

4) Montrer que, pour tout $x \in I$, et pour tout $p > n$,

$$|f_p(x) - f_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{p} u_k(x) \right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

En déduire que (f_n) converge uniformément sur I vers f, et que f répond à la question posée.