Université Paris Dauphine
DU 2 MI2E
Analyse 3

Examen Partiel

Exercice 1
Étudier la nature des séries de terme général :

$$\text{(i) } u_n = \frac{n!}{n^n}, \qquad \text{(ii) } v_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n n + \ln n}, \qquad \text{(iii) } w_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right),$$
$$\text{(iv) } x_n = \frac{(\ln n)^\alpha}{n},\ \alpha \in \mathbb{R}, \qquad \text{(v) } y_n = (-1)^n \frac{(\ln n)^\alpha}{n},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Solution.

(i) Critère de d'Alembert :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)!\, n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln(1+1/(n+1))} \to 1/e$$

Or $1/e < 1$ donc $\boxed{\text{la série converge.}}$

(ii) Déterminons un équivalent :

$$v_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n n + \ln n} = \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{\ln n}{(-1)^n n}} \sim \frac{1}{n}$$

Or la série des $1/n$ diverge, donc $\boxed{\text{la série des } v_n \text{ diverge.}}$

(iii) $w_n = (-1)^n \sin(1/n)$ avec $a_n = \sin(1/n)$ une suite positive, décroissante (car sin est croissante sur $[0, \pi/2]$) de limite nulle ($\sin 0 = 0$). Donc, d'après le critère des séries alternées, $\boxed{w_n \text{ est une série convergente.}}$
(On peut aussi effectuer un développement limité à l'ordre 2, un équivalent ne permet en aucun cas d'obtenir la convergence — la série n'est pas à termes positifs).

(iv) Cours. Comparaison entre série et intégrale.

(v) Posons $a_n = \frac{(\ln n)^\alpha}{n}$. La fonction $f(t) = \frac{(\ln t)^\alpha}{t}$ est décroissante pour $t > C_\alpha$, où C_α est une constante qui ne dépend que de α, donc la suite a_n est décroissante pour n assez grand. De plus c'est une suite positive, de limite nulle.
Donc, d'après le critère des séries alternées, $\boxed{\text{la série } y_n \text{ converge pour tout } \alpha \in \mathbb{R}.}$

□

Exercice 2
Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$\text{(i) } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt \qquad \text{(ii) } \int_{-1}^{1} \frac{dt}{1 - \sqrt{1 - t^2}} \qquad \text{(iii) } \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1 + 1/t)}{(t^2 - 1)^\alpha} dt \ (\alpha \in \mathbb{R})$$

Solution.

(i) Au voisinage de 0 : $e^t = 1 + t + o(t)$ donc $\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{e^t-1}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{t}\right) = 1$, par conséquent la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{e^t-1}$ est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable.

Au voisinage de $+\infty$: $\left|\frac{\sin t}{e^t-1}\right| \leq \frac{1}{e^t-1}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, or $\frac{1}{e^t-1} \sim \frac{1}{e^t}$ en $+\infty$, qui est une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$. Ainsi la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{e^t-1}$ est dominée par une fonction intégrable, donc intégrable.

Conclusion : $\boxed{\text{La fonction } t \mapsto \frac{\sin t}{e^t-1} \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[.}$

(ii) La fonction $t \mapsto 1/(1-\sqrt{1-t^2})$ est paire donc, si l'intégrale converge,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1-\sqrt{1-t^2}} = 2\int_0^1 \frac{dt}{1-\sqrt{1-t^2}}$$

Le problème se situe en 0 :

$$\frac{1}{1-\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{1-(1-\frac{1}{2}t^2+o(t^2))} \sim \frac{1}{t^2}$$

Or $t \mapsto 1/t^2$ n'est pas intégrable en 0, donc $\boxed{\text{l'intégrale diverge.}}$

(iii) Au voisinage de 1 : posons $t = 1+u$, le dénominateur s'écrivant $((t-1)(t+1))^\alpha$, on calcule facilement un équivalent :

$$\frac{\ln(1+1/(1+u))}{u^\alpha(u+2)^\alpha} \sim \frac{\ln 2}{2^\alpha u^\alpha}$$

Or la fonction $u \mapsto 1/u^\alpha$ est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $\alpha < 1$. Donc la condition sur α pour que la fonction soit intégrable au voisinage de 1 est $\alpha < 1$.

Au voisinage de $+\infty$: on calcul un équivalent $(t^2-1)^\alpha \sim t^{2\alpha}$ et $\ln(1+1/t) \sim 1/t$ par conséquent $\frac{\ln(1+1/t)}{(t^2-1)^\alpha} \sim 1/t^{2\alpha+1}$, qui est intégrable au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $2\alpha+1 > 1$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha > 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{La fonction } t \mapsto \frac{\ln(1+1/t)}{(t^2-1)^\alpha} \text{ est intégrable sur } [1,+\infty[\text{ si et seulement si } \alpha \in]0,1[.}$

$\square$

Exercice 3

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par

$$\forall t \in [0,1], \qquad f_n(t) = (1-t^2)^n.$$

   (a) Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f et que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

   (b) Montrer que la convergence est uniforme sur $[\varepsilon, 1]$ pour tout $\varepsilon \in]0,1[$.

   (c) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (1-t^2)^n dt = 0.$$

2. On considère la suite de fonctions (g_n) définie par :

$$\forall x \in [-1,1], \qquad g_n(x) = \frac{\int_0^x (1-t^2)^n dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n dt}.$$

   (a) Montrer que les fonctions g_n sont impaires.

(b) (i) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2(n+1)} \leq \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

(ind. $t(1-t^2)^n \leq (1-t^2)^n$ sur $[0,1]$)

(ii) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-1,1]$, $|g_n(x) - 1| \leq 2(n+1)(1-x^2)^n$.

(iii) Déduire la limite simple de (g_n).

(c) Montrer que (g_n) converge uniformément vers 1 sur $[\varepsilon, 1]$ pour tout $\varepsilon \in]0,1[$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1,1]$, on pose $h_n(x) = \int_0^x g_n(t)dt$. Montrer que (h_n) est une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction $x \mapsto |x|$.

Solution.

1. (a) Convergence simple : En 0, $f_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 1$.
Pour tout $t \in]0,1]$, $|1-t^2| < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$.
Ainsi la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f définie sur $[0,1]$ par

$$\boxed{\begin{array}{rcll} f(t) & = & 1 & \text{si } t = 0 \\ f(t) & = & 0 & \text{si } t \in]0,1] \end{array}}$$

Convergence uniforme : (f_n) est une suite de fonctions continues, donc s'il y avait convergence uniforme, sa limite serait continue. Or f n'est pas continue en 0, ainsi $\boxed{\text{la convergence n'est pas uniforme sur } [0,1].}$

(b) Soit $\varepsilon \in]0,1[$ fixé.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions f_n sont décroissantes positives sur $[0,1]$ donc

$$\sup_{[\varepsilon,1]} |f_n| = (1-\varepsilon^2)^n$$

Or $|(1-\varepsilon^2)| < 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} \sup_{[\varepsilon,1]} |f_n| = 0$.
En conclusion, $\boxed{(f_n) \text{ converge uniformément vers } 0 = f_{|[\varepsilon,1]} \text{ sur } [\varepsilon,1].}$

(c) Soit $\varepsilon \in]0,1[$ fixé.

$$\int_0^1 (1-t^2)^n dt = \underbrace{\int_0^\varepsilon f_n(t)dt}_{I_1} + \underbrace{\int_\varepsilon^1 f_n(t)dt}_{I_2}$$

$\mathbf{I_1}$: Pour tout $t \in [0,\varepsilon]$, $|f_n(t)| \leq 1$ donc $|I_1| \leq \varepsilon$.
$\mathbf{I_2}$: D'après le résultat de la question 1b, la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[\varepsilon, 1]$ donc on peut intervertir intégrale et limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\varepsilon^1 f_n(t)dt = \int_\varepsilon^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_\varepsilon^1 0\, dt = 0$$

Par conséquent il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|I_2| \leq \varepsilon$.
En conclusion, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$

$$\left| \int_0^1 (1-t^2)^n dt \right| \leq |I_1| + |I_2| \leq 2\varepsilon$$

et ce pour tout $\varepsilon \in]0,1[$. Donc la limite existe et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (1-t^2)^n dt = 0.}$

2. (a) Les polynômes $t \mapsto (1-t^2)^n$ sont de degré pair, donc les fonctions g_n sont, à un coefficient multiplicatif près, des primitives de fonctions paires. Elles sont donc $\boxed{\text{impaires.}}$

(b) (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$, $t(1-t^2)^n \leq (1-t^2)^n$, donc en intégrant cette inégalité sur $[0,1]$,

$$\int_0^1 t(1-t^2)^n dt \leq \int_0^1 (1-t^2)^n dt$$

Or $\displaystyle\int_0^1 t(1-t^2)^n = \left[\frac{(1-t^2)^n}{2(n+1)}\right]_0^1 = \frac{1}{2(n+1)}$.

Il vient donc $\boxed{\displaystyle\frac{1}{2(n+1)} \leq \int_0^1 (1-t^2)^n dt.}$

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1,1]$.

$$\begin{aligned}
|g_n(x) - 1| &= \left|\frac{\int_0^x (1-t^2)^n dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n dt} - 1\right| = \left|\frac{\int_0^x (1-t^2)^n dt - \int_0^1 (1-t^2)^n dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n dt}\right| \\
&= \frac{\left|-\int_x^1 (1-t^2)^n dt\right|}{\int_0^1 (1-t^2)^n dt} \\
&\leq 2(n+1)\int_x^1 (1-t^2)^n dt \qquad \text{(d'après la question 2(b)i)} \\
&\leq 2(n+1)(1-x)\sup_{[x,1]} f_n = 2(n+1)(1-x)(1-x^2)^n \\
&\leq 2(n+1)(1-x^2)^n
\end{aligned}$$

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-1,1]$, $\boxed{|g_n(x) - 1| \leq 2(n+1)(1-x^2)^n.}$

(iii) Si $x = 0$, alors $g_n(0) = 0$ pour tout n, donc $\lim_{n\to+\infty} g_n(0) = 0$.
Si $x > 0$, alors $|1-x^2| < 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} 2(n+1)(1-x^2)^n = 0$. La majoration de la question précédente entraîne $\lim_{n\to+\infty} |g_n(x) - 1| = 0$. En se souvenant que les g_n sont impaires, on trouve donc que la suite de fonction (g_n) converge simplement vers la fonction g définie sur $[-1,1]$ par

$$\boxed{\begin{array}{lcll} g(t) & = & -1 & \text{si } t \in [-1,0[\\ g(t) & = & 0 & \text{si } t = 0 \\ g(t) & = & 1 & \text{si } t \in]0,1] \end{array}}$$

(c) On utilise la même méthode que lors de la réponse à la question 1b. Soit $\varepsilon \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$ fixés.

$$\sup_{[\varepsilon,1]} |g_n - 1| \leq 2(n+1) \sup_{x\in[\varepsilon,1]} (1-x^2)^n = 2(n+1)(1-\varepsilon^2)^n$$

Or $|1-\varepsilon^2| < 1$, donc $\lim_{n\to+\infty}(\sup_{[\varepsilon,1]} |g_n - 1|) = 0$ ce qui entraîne, par conséquent, que $\boxed{\text{la suite } (g_n) \text{ converge uniformément vers 1 sur } [\varepsilon,1].}$

3. Les fonction h_n sont des primitives de fonctions elles-mêmes primitives de polynômes, donc ce sont des $\boxed{\text{fonctions polynomiales}}$.
On se contentera de montrer la convergence uniforme sur $[0,1]$, la convergence sur $[-1,1]$ s'obtenant grâce à la parité des fonction h_n.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Il faut déterminer le $\sup_{x\in[0,1]} |h_n(x) - x|$. Or $(1-t^2)^n \geq 0$ pour tout $t \in [0,1]$, donc $g_n(x) \leq 1$ pour tout $x \in [0,1]$. Ainsi le maximum de la fonction $x \mapsto |h_n(x) - x|$ est atteint en $x = 1$.

$$\sup_{x\in[0,1]} |h_n(x) - x| = 1 - h_n(1) = \int_0^1 1 - g_n(t) dt$$

Par un raisonnement identique à celui de la question 1c, on montre que $\lim_{+\infty}(h_n(1) - 1) = 0$.
En conclusion, $\boxed{\text{la suite } (h_n) \text{ converge uniformément sur } [-1, 1] \text{ vers la fonction } x \mapsto |x|.}$

$\square$