Analyse 3 - Contrôle Continu 1

3/11/08

Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. On attachera une grande importance à la précision de la rédaction - Durée 1h30

Exercice 1

Déterminez les valeurs de a et b pour que la série de terme général :

$$v_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$$

converge, et calculez la somme $\sum_{1}^{\infty} v_n$.

$$v_n = (1+a+b)\ln(n) + a\ln(1+\frac{1}{n}) + b\ln(1+\frac{2}{n})$$

Pour que la série $\sum v_n$ converge il faut que $lim_{n\to+\infty} v-n = 0$. Il faut donc que $(1+a+b) = 0$, ce que nous supposerons dans la suite.
Développons v_n :

$$v_n = \frac{a+b}{n} - \frac{a+4b+\epsilon(n)}{2n^2} \text{ avec } \lim_{n\to\infty} \epsilon(n) = 0$$

La série $\sum v_n$ converge donc si $(1+a+b) = 0$ et $(a+b) = 0$, c'est à dire si $a = -2$ et si $b = 1$.
Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = -\ln(2) - \ln(n+1) + \ln(n+2) = -\ln(2) + \ln(\frac{n+2}{n+1})$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k = -\ln(2)$$

Exercice 2

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de réels <u>strictement positifs</u>, telle que la série $\sum u_n$ converge. Que peut-on dire de la convergence des séries $\sum \frac{1}{u_n}$, $\sum \sin(u_n)$, $\sum \sqrt{1+u_n^2} - 1$.

   Puisque $\sum u_n$ est une série convergente, $\lim u_n = 0$. On a donc :
   - $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$, et donc la série $\sum \frac{1}{u_n}$ diverge.
   - $\sin(u_n) \sim u_n$, et puisque les séries considérées dans cette équivalence sont à termes positifs, on déduit par comparaison que $\sum \sin(u_n)$ converge.

– Puisque u_n tend vers 0, $u_n^2 \leq u_n$ à partir d'un certain rang et $\sum u_n^2$ converge. De plus $\sqrt{1+u_n^2}-1 \sim u_n^2$, donc, puisque les séries considérées sont à termes positifs $\sum \sqrt{1+u_n^2}-1$ converge.

2. Soit trois suites quelconques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq w_n.$$

On suppose que les séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent. En considérant la série $\sum w_n - u_n$, montrer que la série $\sum v_n$ converge.

On a :

$$0 \leq v_n - u_n \leq w_n - u_n.$$

Puisque les séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent, il en va de même pour $\sum w_n - u_n$. Puisque $0 \leq v_n - u_n$, les séries considérées sont à termes positifs. On peut donc appliquer les théorèmes de comparaison du cours et conclure que $\sum v_n - u_n$ converge. Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n - u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ existe, et $\sum v_n$ converge.

Exercice 3

Étudiez en fonction de α ($\alpha > 0$) la convergence de la série dont le terme général est défini par :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$$

On développe u_n.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\left[1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} - \frac{1+\epsilon(n)}{2n^{\frac{3\alpha}{2}}} \text{ avec } \lim_{n\to\infty} \epsilon(n) = 0$$

– la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ est pour $\alpha > 0$ une série alterné dont le terme général tend vers 0 en décroissant, donc convergente ;
– le série $\sum \frac{1+\epsilon(n)}{2n^{\frac{3\alpha}{2}}}$ est, pour n assez grand, une série à termes positifs, majorée par la série $\frac{2}{2n^{\frac{3\alpha}{2}}}$ qui converge pour $\alpha > \frac{2}{3}$ et diverge pour $0 < \alpha \leq \frac{2}{3}$.

Il y a donc convergence si et seulement si les deux séries convergent simultanément, c'est à dire pour $\alpha > \frac{2}{3}$.

Exercice 4

1. Montrez que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{sint}{t}dt$ converge.
   D'après le cours :
   La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$. On a donc deux bornes à étudier, 0 et $+\infty$. Pour la première, en remarquant que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

on voit que f est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1, et donc l'intégrale converge en 0.
Nous allons maintenant montrer que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

est convergente en utilisant une intégration par parties. En effet, soit $X \geq 1$, alors

$$\begin{aligned}\int_1^X \frac{\sin x}{x} dx &= \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2} dx, \\ &= \cos 1 - \frac{\cos X}{X} - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2} dx.\end{aligned}$$

La fonction cosinus étant bornée, on a

$$\frac{\cos X}{X} \xrightarrow[X \to +\infty]{} 0$$

et, pour tout $x \geq 1$,

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

Il s'ensuit que l'intégrale de

$$x \mapsto \frac{\cos x}{x^2}$$

est absolument convergente sur $[1, +\infty[$ et donc convergente. On en déduit ainsi la convergence de

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt$:
   (a) calculez les intégrales J_0 et J_1 ;

$$\begin{aligned}J_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2} \\ J_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3t}{\sin t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t * \cos t + \cos 2t * \sin t}{\sin t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t * \cos t}{\sin t} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t \ dt \ \left(\text{et } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t \ dt = 0\right) \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t * \cos^2 t}{\sin t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 1) \ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t \ dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \\ &= \frac{\pi}{2} = J_0\end{aligned}$$

Remarque :
Pour calculer $\sin 3t$ on peut également utiliser la formule de Moivre :

$$\sin 3 = Im(e^{i3t}) = Im(\cos t + i \sin t)^3 \text{ d'où } \sin 3t = 3\cos^2 t * \sin t - \sin^3 t$$

(b) montrez par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $J_n = J_{n-1}$;
On a déja montré que $I_1 = I_0$.
Pour tout $n > 1$, l'intégrale J_n est bien définie car on peut prolonger $\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$ par continuité en 0.

$$\begin{aligned}
J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n)t * \cos t + \cos(2n)t * \sin t}{\sin t} dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n)t * \cos t}{\sin t} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n)t \ dt \ \left(\text{et : } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n)t \ dt = 0\right) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)t * \cos^2 t + \cos(2n-1)t * \sin t * \cos t}{\sin t} dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)t * \cos^2 t}{\sin t} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2n-1)t * \cos t) \ dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)t}{\sin t} \ dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(2n-1)t * \sin t) \ dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2n-1)t * \cos t) \ dt \\
&= J_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n)t \ dt \\
&= J_{n-1}
\end{aligned}$$

(c) en déduire la valeur de J_n.
Par une récurrence immédiate, $J_n = J_{n-1} = \cdots = J_1 = J_0 = \frac{\pi}{2}$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(2n+1)t}{t} dt$. En considérant la différence $I_n - J_n$, montrer que : $\displaystyle\lim_{n \to \infty} I_n = \frac{\pi}{2}$.
(on pourra prolonger $\varphi :]0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{sint}$ en une application de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$).

La différence $I_n - J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n+1)t \left[\frac{\sin t - t}{t * \sin t}\right] dt$ est bien définie car I_n et J_n le sont.
Au voisinage de 0, $\varphi(t) = \dfrac{\sin t - t}{t * \sin t} \sim \dfrac{t^3}{6 * t^2} \sim \dfrac{t}{6}$ donc $\displaystyle\lim_{t \to 0} \varphi(t) = 0$. On peut donc prolonger φ par continuité en une fonction de classe $C^0_{[0,\frac{\pi}{2}]}$. On montre facilement en faisant le d.l. de $\varphi'(t) = \dfrac{t^2 * \cos t - \sin^2 t}{(t * \sin t)^2}$ que $\varphi \in C^1_{[0,\frac{\pi}{2}]}$.

On calcule $I_n - J_n$ en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} I_n - J_n &= \frac{-1}{2n+1}\left[\cos(2n+1)t * \varphi(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n+1)t\ \varphi'(t)dt \\ &= \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n+1)t\ \varphi'(t)dt \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$|I_n - J_n| \leq \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi'(t)|\ dt \ \text{ qui tend vers 0 lorsque } n \to +\infty$$

Donc :

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$$

4. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Par définition de la convergence, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \int_0^X \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$.

En particulier, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$.

Or $\displaystyle\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)u}{u} du = I_n$ (on pose $t = (2n+1)u$).

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{sint}{t} dt = \lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi}{2}$.