Théorie homotopique de Morel-Voevodsky et applications

Sam Zoghaib

Mémoire de M2 encadré par Denis-Charles Cisinski.

M2 «Algèbre et Géométrie» de l'université Paris 6 – Pierre et Marie Curie
Année universitaire 2006/2007

Introduction

Dans ce mémoire, on se propose d'étudier la théorie de l'homotopie de Morel et Voevodsky en suivant les idées de la construction de ([MV]), qui fournit un cadre commode pour définir une théorie de l'homotopie dans un cadre très général (essentiellement celui d'un site quelconque muni d'un objet «intervalle»), et qui permet aussi bien de retrouver de manière relativement simple des résultats déjà connus, par exemples relatifs aux aux variétés topologiques, que d'obtenir des résultats nouveaux dans d'autres situations, notamment en géométrie algébrique dans le cadre des schémas lisses sur une base noethérienne. La théorie de l'homotopie de Morel et Voevodsky repose sur la machinerie des catégories de modèles, qui est un formalisme axiomatique permettant de définir les notions fondamentales nécessaires à une théorie homotopique, et fournissant un analogue non-abélien commode des catégories dérivées. Il s'agira alors d'exploiter la structure de catégorie de modèle de tout topos simplicial, puis d'effectuer une localisation (i.e., une inversion formelle) à la Bousfield d'une classe de morphismes liée à l'intervalle choisi.

Au delà de donner un sens aux notions homotopiques usuelles, la théorie de Morel et Voevodsky permet d'exprimer de manière concise et commode un certains nombres de résultats valables de manière très générale.

Supposant quelques définitions et propriétés élémentaires des topos[1] connues, nous commencerons naturellement par introduire les notions d'algèbre homotopique dont nous aurons besoin, ce qui nous permettra de construire les catégories homotopiques usuelles d'un topos, à savoir la catégorie homotopique simpliciale et la catégorie homotopique avec intervalle. Nous démontrerons au passage la correspondance de Dold-Kan pour un topos quelconque et en déduirons la représentabilité dans la catégorie homotopique de la cohomologie singulière. À titre d'application de cette exposition formelle de la théorie nous démontrerons que si le site sous-jacent au topos considéré est constitué de variétés topologiques contractiles et muni d'un intervalle contractile, alors la théorie de Morel-Voevodsky nous donne le résultat attendu, à savoir que la catégorie homotopique correspondante est la catégorie homotopique usuelle. Enfin, nous conclurons sur une interprétation homotopique de la classification des torseurs sur un topos, dont l'essence est, étant donné un groupe G, la représentabilité dans la catégorie homotopique de $H^1(-, G)$, défini de manière usuelle comme l'ensemble des classes d'isomorphismes de G-torseurs, par l'espace classifiant $\mathrm{B}G$.

Je tiens à remercier Denis-Charles Cisinski, qui a encadré ce mémoire, pour l'orientation du contenu mathématique de ce travail, agréablement réparti entre la théorie abstraite et les exemples géométriques concrets, ainsi que pour sa très grande disponibilité et ses nombreuses explications aussi bien techniques que sur l'intuition à avoir des objets manipulés. Je souhaite également remercier Joël Riou pour les discussions très intéressantes que j'ai eu avec lui ainsi que pour la clarté de son mémoire de DEA et de sa thèse, qui m'ont été d'une aide précieuse.

[1]dans tout ce mémoire, le mot «topos» désignera une catégorie de faisceaux sur un site. Du point de vue plus général des topos élémentaires, cela revient à dire que le topos considéré est muni d'un morphisme borné (voir [PTJ]) vers le topos de base, les sites considérés étant alors des catégories internes au topos de base. Dans ce mémoire tous les topos auront pour base le topos des ensembles.

Table des matières

Chapitre 1

Un peu d'algèbre homotopique

L'algèbre homotopique telle qu'introduite par Quillen dans [Qui] fournit un cadre formel commode pour axiomatiser la théorie de l'homotopie. Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions et résultats dont nous aurons besoin. Le concept central est celui de *catégorie de modèles*, qui sont des catégories munies de trois classes de morphismes, les fibrations, cofibrations et équivalences faibles, vérifiant certains axiomes, et au sein desquelles on a une théorie générale satisfaisante de la notion d'homotopie. Pour plus de détails concernant les catégories de modèles, nous renvoyons le lecteur à [Qui], [GZ] et [GJ]. Une fois exposé ce cadre général, nous pourrons aborder les structures homotopiques des catégories de faisceaux simpliciaux.

1.1 Catégories de modèles fermées

Définition 1.1.1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie quelconque, $g : X' \to Y'$ un morphisme de $\mathcal{C}$. On dit qu'un morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$ est une rétracte de g s'il existe un diagramme commutatif de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_X"] & X' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_Y"'] & Y' \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

Définition 1.1.2 (Catégorie de modèles fermée). Une *catégorie de modèles fermée* est une catégorie $\mathcal{C}$ munie de trois classes de morphismes, les *fibrations*, *cofibrations* et *équivalences faibles*, notées généralement respectivement $\mathbf{F}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{W}$, et vérifiant les axiomes suivants :

CM1 $\mathcal{C}$ admet les limites et colimites finies.

CM2 si f et g sont deux morphismes composables de $\mathcal{C}$ et que deux morphismes parmi f, g et $g \circ f$ sont des équivalences faibles, alors le troisième l'est aussi.

CM3 Si f est une rétracte de g et g est une fibration, une cofibration ou une équivalence faible, alors f l'est également.

CM4 Les fibrations ont la propriété de relèvement à droite vis-à-vis des cofibrations triviales (i.e. qui sont aussi des équivalences faibles), et les fibrations triviales ont la propriété de relèvement à droite vis-à-vis des cofibrations. On résume cela par la condition suivante :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ V \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & Y \end{tikzcd}$$

Étant donné un tel diagramme commutatif, où i est une cofibration et p une fibration, la flèche en pointillés existe si i ou p est aussi une équivalence faible.

CM5 Tout morphisme f de $\mathcal{C}$ peut se factoriser en :
- $p \circ i$ où p est une fibration et i une cofibration triviale.
- $q \circ j$ ou q est une fibration triviale et j une cofibration.

En pratique, les catégories de modèles fermées que nous serons amenés à considérer satisfont des axiomes un peu plus forts, que nous citons ici.

CM1$^+$ $\mathcal{C}$ admet les petites limites et colimites.

CM5$^+$ Les factorisations de l'axiome **CM5** sont *fonctorielles*.

Proposition 1.1.3 (Astuce de Joyal). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie munie de fibrations, cofibrations et équivalences faibles, telle que les axiomes **CM1** et **CM2** soient vérifiés. Supposons également que
- les cofibrations soient stables par composition et produits fibrés.
- les fibrations aient la propriété de relèvement à droite vis-à-vis des cofibrations triviales.
- tout morphisme f de $\mathcal{C}$ puisse se factoriser en $q \circ j$ où j est une cofibration et q une fibration triviale.

Alors l'axiome **CM4** est vérifié.

Donnons maintenant quelques propriétés des trois classes de morphismes dans une catégorie de modèles fermée, ce qui nous permet de caractériser une catégorie de modèles fermée à partir de seulement deux des classes de morphismes.

Proposition 1.1.4.
- Les fibrations sont les morphismes ayant la propriété de relèvement à droite vis-à-vis des cofibrations triviales.
- Les fibrations triviales sont les morphismes ayant la propriété de relèvement à droite vis-à-vis des cofibrations.
- Les cofibrations sont les morphismes ayant la propriété de relèvement à gauche vis-à-vis des fibrations triviales.
- Les cofibrations triviales sont les morphismes ayant la propriété de relèvement à droite vis-à-vis des fibrations.

Corollaire 1.1.5.
- Les fibrations (resp. fibrations triviales) sont stables par composition et par produits fibrés.
- Les cofibrations (resp. cofibrations triviales) sont stables par composition et par sommes amalgamées.
- Les isomorphismes sont dans $\mathbf{F} \cap \mathbf{C} \cap \mathbf{W}$.

Définition 1.1.6. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de modèles fermée, X un objet de $\mathcal{C}$. On dit que X est *fibrant* (resp. *cofibrant*) si le morphisme $X \to \bullet$ est une fibration (resp. $\varnothing \to X$ est une cofibration).

Nous allons maintenant définir la notion d'homotopie au sein d'une catégorie de modèles fermée. On se donne pour la suite une catégorie de modèles fermée $\mathcal{C}$.

Définition 1.1.7. Soit A un objet de $\mathcal{C}$. On appelle *objet cylindre pour* A la donnée d'un objet $\tilde{A}$, d'une cofibration $i = (i_0, i_1) : A \sqcup A \to \tilde{A}$ et d'une équivalence faible $\sigma : \tilde{A} \to A$ de sorte que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \sqcup A \arrow[d, "i=(i_0,i_1)"'] \arrow[dr, "\nabla"] & \\ \tilde{A} \arrow[r, "\sigma"'] & A \end{tikzcd}$$

où ∇ désigne la codiagonale, soit commutatif.

Remarque 1.1.8. L'axiome **CM5** assure que tout objet de $\mathcal{C}$ admet un objet cylindre ; il suffit en effet de prendre la factorisation de $\nabla : A \sqcup A \to A$ en une cofibration suivie d'une fibration triviale.

Définition 1.1.9 (Homotopie à gauche). Soit f et g deux morphismes dans $\mathcal{C}$. Une *homotopie à gauche entre f et g relativement à un objet cylindre* $(\tilde{A}, i, \sigma)$ *de* A est un morphisme $h : \tilde{A} \to B$ tel que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} A \sqcup A \arrow[r, "f \sqcup g"] \arrow[d, "i=(i_0,i_1)"'] & B \\ \tilde{A} \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. On dit alors que f et g sont homotopes à gauche.

Proposition 1.1.10. Soit A un objet cofibrant et $\tilde{A}$ un objet cylindre pour A. Alors les morphismes i_0 et i_1 définis ci-dessus sont des cofibrations triviales.

Démonstration. Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "r"] \\ A \arrow[r, "l"'] & A \sqcup A \end{tikzcd}$$

qui est évidemment cocartésien (l et p étant alors les inclusions canoniques $A \to A \sqcup A$). Le morphisme canonique $\varnothing \to A$ est une cofibration par hypothèse. Par conséquent, l et r sont également des cofibrations, et donc les composés $i_0 = (i_0, i_1) \circ l$ et $i_1 = (i_0, i_1) \circ r$ sont également des cofibrations. Enfin, d'après l'axiome **CM2**, σ étant une équivalence faible, i_0 et i_1 le sont également. □

Proposition 1.1.11. Soit A un objet cofibrant de $\mathcal{C}$. Pour tout objet B de $\mathcal{C}$, la relation d'homotopie à gauche est une relation d'équivalence sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Démonstration. La symétrie et la refléxivité sont évidentes, en remarquant que l'action de l'automorphisme $\tau : A \sqcup A \to A \sqcup A$ qui intervertit les deux termes de la somme préserve les objets cylindres. Reste à voir la transitivité. On considère les diagrammes

$$\begin{tikzcd} A \sqcup A \arrow[d, "i_{0,\varepsilon} \sqcup i_{1,\varepsilon}"'] \arrow[dr, "\nabla"] & \\ \tilde{A}_\varepsilon \arrow[r, "\sigma"'] & A \end{tikzcd}$$

où $\varepsilon \in \{0,1\}$, et le diagramme cocartésien :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_{0,1}"] \arrow[d, "i_{1,0}"'] & A_1 \arrow[d, "i_{1*}"] \\ A_0 \arrow[r, "i_{0*}"'] & \tilde{A} \end{tikzcd}$$

Alors, le morphisme $i_{0*}i_{0,0} \sqcup i_{1*}i_{1,1} : A \sqcup A \to \tilde{A}$ se factorise en

$$A \sqcup A \xrightarrow{i_{0,0},\mathrm{id}} A_0 \sqcup A \xrightarrow{(i_{0*},i_{1*}i_{1,1})} \tilde{A}$$

.

D'après la proposition précédente, le morphisme $(i_{0,0}, \mathrm{id})$ est une cofibration, et on a le diagramme cocartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} A \sqcup A \arrow[r, "i_{0,0} \sqcup \mathrm{id}"] \arrow[d, "(i_{0,1},i_{1,1})"'] & A_0 \sqcup A \arrow[d, "i_{0*} \sqcup i_{1*}i_{1,1}"] \\ A_1 \arrow[r, "i_{1*}"'] & \tilde{A} \end{tikzcd}$$

On déduit de ce qui précède un objet cylindre pour A :

$$\begin{tikzcd} A \sqcup A \arrow[d, "i_{0*}i_{0,0} \sqcup i_{1*}i_{1,1}"'] \arrow[dr, "\nabla"] & \\ \tilde{A} \arrow[r, "\sigma_*"'] & A \end{tikzcd}$$

Ainsi, si on a deux homotopies à gauches $h_0 : A \to B$ et $h_1 : A_1 \to B$ respectivement de f_0 à f_1 et de f_1 à f_2, on en déduit une homotopie à gauche $h : \tilde{A} \to B$ entre f_0 et f_2, ce qui conclut la preuve. $\square$

Remarque 1.1.12. On peut définir de même les notions duales d'*objet chemin* et d'*homotopie à droite* et il est complètement formel de voir que les versions duales de ces propriétés sont également valides. Plus généralement, on voit aisément que $\mathcal{C}$ est une catégorie de modèles fermée si et seulement si $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ est une catégorie de modèles fermée (le foncteur $-^{\mathrm{op}}$ préservant les équivalences faibles, et envoie fibrations sur cofibrations et vice-versa). Par complétude, on donne les définitions d'objet chemin et d'homotopie à droite.

Définition 1.1.13. Soit B un objet d'une catégorie de modèles fermée $\mathcal{C}$. Un *objet chemin pour* B est la donnée d'un objet $\hat{B}$, d'une fibration $p = (p_0, p_1) : \hat{B} \to B \times B$ et d'une équivalence faible $s : B \to \hat{B}$ de sorte que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & \hat{B} \arrow[d, "p=(p_0,p_1)"] \\ B \arrow[ur, "s"] \arrow[r, "\Delta"'] & B \times B \end{tikzcd}$$

où Δ désigne la diagonale, soit commutatif.

Définition 1.1.14 (Homotopie à droite). Soit f et g deux morphismes dans $\mathcal{C}$. Une *homotopie à droite relativement à un objet chemin* $(\hat{B}, p, s)$ de B entre f et g est un morphisme $h : A \to B$ tel que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & \hat{B} \arrow[d, "(p_0,p_1)"] \\ A \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "(f,g)"'] & B \times B \end{tikzcd}$$

soit commutatif. On dit alors que f et g sont homotopes à droite.

Le cas le plus intéressant, au vu de la proposition 1.1.11 et de la remarque précédente, est celui où l'on considère les morphismes $A \to B$ où A est cofibrant et B fibrant. Les notions d'homotopie à gauche et à droite coïncident alors, et il n'est pas nécessaire de spécifier le choix d'un objet cylindre ou chemin. On note alors $\pi(A, B)$ le quotient de $\mathrm{Hom}(A, B)$ par la relation d'homotopie, et on dit d'une application $f : A \to B$ que c'est une *équivalence d'homotopie* si la classe de f dans $\pi(A, B)$ est un isomorphisme (c'est-à-dire, s'il existe $g \in \mathrm{Hom}(A, B)$ tel que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient homotopes à l'identité).

Définition 1.1.15 (Localisation stricte). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et W une classe de morphismes dans $\mathcal{C}$. On s'intéresse aux catégories $\mathcal{D}$ munies d'un foncteur $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tel que $Q(w)$ soit un isomorphisme pour tout $w \in W$. Si elle existe, on appelle *catégorie localisée stricte*, et on note $\mathcal{C}[W^{-1}]$ la catégorie universelle pour cette propriété, i.e., celle telle que pour tout autre catégorie $\mathcal{D}$ munie d'un foncteur $R : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ satisfaisant cette propriété, il existe un unique foncteur $\Theta : \mathcal{C}[W^{-1}] \to \mathcal{D}$ prolongeant R (i.e. tel que $\Theta \circ Q = R$).

Lemme 1.1.16 (Lemme fondamental de l'algèbre homotopique). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de modèles fermée, $\mathbf{W}$ la classe des équivalences faibles dans $\mathcal{C}$. Alors il existe une[1] catégorie localisée stricte $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathbf{W}$ existe, et on l'appelle *catégorie homotopique de la catégorie* $\mathcal{C}$. On note $\gamma : \mathcal{C} \to \mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ le foncteur de localisation, et pour A cofibrant et B fibrant, on a $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathcal{C})}(A, B) = \pi(A, B)$.

Démonstration. [GJ, théorème 1.11, p. 75]. □

Proposition 1.1.17. Les équivalences faibles sont exactement les morphismes qui deviennent des isomorphismes dans $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$.

[1] nécessairement unique à équivalence près par universalité

Définition 1.1.18 (Adjonctions et équivalences de Quillen). Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories de modèles fermées, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ deux foncteurs adjoints ($G \dashv F$). On dit que (G, F) est une *adjonction de Quillen* si G préserve les cofibrations et F les fibrations. On dit que (G, F) est une *équivalence de Quillen* si de plus, pour tout objet cofibrant X de $\mathcal{D}$ et tout objet fibrant Y de $\mathcal{C}$, si $f : X \to FY$ et $g : GX \to Y$ sont les transposés l'un de l'autre par l'adjonction, alors f est une équivalence faible dans $\mathcal{D}$ si et seulement si g est une équivalence faible dans C.

1.2 Raisonnement du petit objet

En pratique, pour montrer qu'une catégorie $\mathcal{C}$ est une catégorie de modèles fermée, l'axiome le plus difficile à vérifier est souvent l'axiome **CM5**, concernant l'existence de factorisations. Le «raisonnement du petit objet» permet d'obtenir facilement toutes les factorisations à partir de familles plus restreintes.

Définition 1.2.1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie admettant les limites inductives, X un objet de $\mathcal{C}$, et κ un cardinal. On dit que X est *κ-accessible* si le foncteur $\mathrm{Hom}(X, -)$ commute aux limites inductives filtrantes indexées par les ensembles ordonnés filtrants grands devant κ (i.e. les ensembles dont toute partie de cardinal inférieur ou égal à κ admet un majorant).

Proposition 1.2.2. Soit κ un cardinal, γ un cardinal infini successeur strictement supérieur à κ. Alors, γ est grand devant κ.

Pour engendrer les objets possédant la propriété de relèvement nécessaire, on utilise la construction ci-dessous :

Définition 1.2.3. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie admettant les limites inductives et $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un foncteur muni d'une transformation naturelle $\lambda : \mathrm{Id} \to \Phi$. On définit par récurrence transfinie :
- pour tout ordinal α, un foncteur $\Phi^\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.
- pour tout ordinal $\beta \leqslant \alpha$ une transformation naturelle $\Theta_{\beta,\alpha} : \Phi^\beta \to \Phi^\alpha$ vérifiant $\Theta_{\beta',\alpha} = \Theta_{\beta,\alpha} \circ \Theta_{\beta',\alpha}$ pour tout ordinal $\beta' \leqslant \beta \leqslant \alpha$ et $\Theta_{\alpha,\alpha} = \mathrm{Id}_{\Phi^\alpha}$.

Ces objets vérifiants les propriétés suivantes :
- $\Phi^0 = \mathrm{Id}$.
- pour tout ordinal α, $\Phi^{\alpha+1} = \Phi \circ \Phi^\alpha$, et pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $(\Theta_{\alpha,\alpha+1})_X = \lambda_{\Phi^\alpha X}$, et pour tout ordinal $\beta \leqslant \alpha$, $\Theta_{\beta,\alpha+1} = \Theta_{\alpha,\alpha+1} \circ \Theta_{\beta,\alpha}$.
- si $\alpha \neq 0$ est un ordinal limite, alors pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $\Phi^\alpha(X) = \varinjlim_{\beta\in\alpha} \Phi^\beta(X)$, où les éléments de α sont ordonnés par inclusion et les morphismes de transition sont les $(\Theta_{\beta,\beta'})_X$ pour $\beta \leqslant \beta'$.

Définition 1.2.4. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie admettant les limites inductives et $(S_i \to T_i)$ une famille de morphismes indexée par un ensemble I. Pour tout morphisme $f : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$, on considère l'ensemble des diagrammes commutatifs D de la forme :

$$\begin{tikzcd} S_{i(D)}(D) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "i(D)"'] & X \arrow[d, "f"] \\ T_i \arrow[r, "q(D)"'] & Y \end{tikzcd}$$

Ils permettent de construire une factorisation fonctorielle de f :

$$\begin{tikzcd}
\coprod_D S_{i(D)} \arrow[r, "p(D)"] \arrow[d, "\coprod i(D)"'] & X \arrow[d, "\lambda_f"] \arrow[dd, bend left, "f"] \\
\coprod_D T_{i(D)} \arrow[r] \arrow[dr, dashed, "q(D)"'] & \Phi_I(f) \arrow[d, "\mu_f"] \\
 & Y
\end{tikzcd}$$

où le carré est cocartésien.

Il est clair que cette factorisation est fonctorielle en f.

On obtient alors, pour tout objet Y de $\mathcal{C}$, un foncteur $\Phi_{I,Y} : \mathcal{C}/Y \to \mathcal{C}/Y$ muni d'une transformation naturelle $\lambda : \mathrm{Id} \to \Phi_{I,Y}$. La catégorie $\mathcal{C}/Y$ admettant toutes les limites inductives, on peut définir comme précédemment un foncteur $\Phi^\alpha_{I,Y} : \mathcal{C}/Y \to \mathcal{C}/Y$ pour tout ordinal α, muni d'une transformation naturelle $\Lambda : \mathrm{Id} \to \Phi^\alpha_{I,Y}$.

De la même manière que dans la définition précédente, on obtient une factorisation (dont on vérifie aisément qu'elle est fonctorielle en f) :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Lambda_f"] \arrow[rr, bend left, "f"] & \Phi^\alpha_I(f) \arrow[r, "\Pi_f"] & Y
\end{tikzcd}$$

où l'on a posé $\Phi^\alpha_I(f) = \Phi^\alpha_{I,Y}(f)$.

On peut maintenant énoncer le théorème sous-jacent au «raisonnement du petit objet» :

Théorème 1.2.5. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie admettant les limites inductives et $(S_i \to T_i)_{i\in I}$ une famille de flèches de $\mathcal{C}$. Soit κ un cardinal tel que pour tout $i \in I$, l'objet S_i soit κ-accessible. Soit γ un ordinal limite grand devant κ.

Alors, pour toute flèche $X \to Y$ dans $\mathcal{C}$ le morphisme $\Pi_f : \Phi^\gamma_I(f) \to Y$ possède la propriété de relèvement à droite par rapport à tous les morphismes de I.

Démonstration. On veut montrer l'existence d'un relèvement dans le carré commutatif suivant, pour tout p et q et pour i dans I :

$$\begin{tikzcd}
S_i \arrow[r, "p"] \arrow[d, "i"'] & \Phi^\gamma_I(f) \arrow[d, "\Pi_f"] \\
T_i \arrow[r, "q"'] & Y
\end{tikzcd}$$

γ étant un ordinal limite, on identifie Φ^γ_I à $\varinjlim_{\beta\in\gamma} \Phi^\beta_I$. Comme γ est grand devant κ et S_i est κ-accessible, il existe un $\beta \in \gamma$ tel que p se factorise par Φ^β_I.

On peut donc compléter le diagramme ainsi :

$$\begin{tikzcd}
S_i \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "p"] \arrow[dd, "i"'] & \Phi_I^{\gamma}(f) \arrow[r] \arrow[d] & \Phi_I^{\beta}(f) \arrow[dd] \\
 & \Phi_I^{\beta+1}(f) \arrow[ur] & \\
T_i \arrow[ur, dashed] \arrow[rr, "q"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

□

1.3 Foncteurs dérivés

Le but de ce paragraphe est de donner l'équivalent des foncteurs dérivés de l'algèbre homologique dans le cadre des catégories de modèles.

Définition 1.3.1 (Foncteur dérivé). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie munie d'un ensemble de flèches W et F un foncteur $\mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ou $\mathcal{A}$ est une catégorie quelconque. Supposons l'existence de la catégorie localisée stricte $\mathcal{C}[W^{-1}]$ et notons $\gamma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[W^{-1}]$ le foncteur de localisation. S'il existe, on appelle *foncteur dérivé total à droite de* F la donnée d'un foncteur $\mathrm{R}F : \mathcal{C}[W^{-1}] \to \mathcal{A}$ muni d'une transformation naturelle $\varepsilon : F \to \mathrm{R}F \circ \gamma$ qui soient universels parmi ces telles données.

On définit de manière duale les foncteurs dérivés totaux à gauche.

Lemme 1.3.2 (Lemme de Ken Brown). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de modèles fermée, $\mathcal{A}$ une catégorie quelconque et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ un foncteur. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- F transforme équivalences faibles entre objets fibrants en isomorphismes.
- F transforme fibrations triviales entre objets fibrants en isomorphismes.

Proposition 1.3.3. Sous les conditions du lemme de Ken Brown, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ admet un foncteur dérivé total à droite $\mathrm{R}F : \mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \to \mathcal{A}$. Si X est un objet fibrant de $\mathcal{C}$, le morphisme $F(X) \to \mathrm{R}F(X)$ induit par ε est un isomorphisme.

De même que dans les catégories abéliennes les foncteurs dérivés sont calculés à l'aide de résolutions injectives ou projectives, les foncteurs dérivés sont ici calculés à l'aide de résolutions fibrantes ou cofibrantes.

La proposition suivante découle du lemme de Ken Brown :

Proposition 1.3.4. Si (G, F) est une adjonction de Quillen, alors G préserve les équivalences faibles entre objets cofibrants et F celles entre objets fibrants.

Définition 1.3.5. On note $\mathrm{R}G : \mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{D})$ (resp. $\mathrm{L}G : \mathrm{Ho}(\mathcal{D}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{C})$) le foncteur dérivé total à droite (resp. à gauche) du foncteur $\gamma \circ F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ho}(\mathcal{D})$ (resp. $\gamma \circ G : \mathcal{D} \to \mathrm{Ho}(\mathcal{C})$).

Certaines propriétés de foncteurs sont partagées avec leurs foncteurs dérivés ; cela fait l'objet du théorème suivant.

Théorème 1.3.6. Si (G, F) est une adjonction de Quillen, alors $(\mathrm{L}G, \mathrm{R}F)$ forme une paire de foncteurs adjoints. Par ailleurs, $\mathrm{L}G$ et $\mathrm{R}F$ sont des équivalences de catégories si et seulement si (G, F) est une équivalence de Quillen.

Enfin, on a une définition analogue à la définition dans le cadre abélien de la notion de faisceau acyclique.

1.4 Limites et colimites homotopiques

Le but de cette section est de définir une notion de limite et de colimite qui respecte les équivalences faibles. En effet, il est facile de vérifier que ce n'est pas le cas du foncteur $\varinjlim$ dans la catégorie des espaces topologiques. Intuitivement, pour donner un sens homotopique à la limite d'un diagramme d'espaces topologiques, il faut au moins remplacer les morphismes de transition du diagramme par des cofibrations. Il est alors naturel de définir les limites homotopiques *via* les foncteurs dérivés des foncteurs usuels.

Dans le cas le plus général, on ne peut définir de cette manière que les limites et colimites *finies*. Cependant, dans le cas ou la catégorie de modèles fermée concernée est un topos simplicial, la méthode décrite ci-dessous permet de définir toutes les petites limites et colimites ; cela nous sera suffisant.

Définition 1.4.1. Une catégorie I est dite *très petite* ou *directe* ([Hov]) si elle possède un nombre fini d'objets, que pour tous objets X et Y, $\mathrm{Hom}(X, Y)$ soit un ensemble fini, et qu'il existe un entier N tel que pour toute chaîne de morphismes composables (f_i) de I de longueur $n > N$, au moins l'un des f_i soit l'identité.

Le lecteur est renvoyé à [Hov] pour le lemme et la proposition suivante :

Lemme 1.4.2. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de modèles fermée, et I une catégorie *très petite*. La catégorie $\mathcal{C}^I$ munie pour fibrations des fibrations terme à terme et pour équivalences faibles des équivalences faibles terme à terme est une catégorie de modèles fermée.

Proposition 1.4.3. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de modèles fermée, I une catégorie très petite. Alors les foncteurs «diagramme constant» $\Delta : \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$ et $\varprojlim : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^I$ forment une adjonction de Quillen et par conséquent, les foncteurs dérivés totaux $\mathrm{L}\Delta : \mathrm{Ho}(\mathcal{C}^I) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ et $\mathrm{R}\varprojlim : \mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{C}^I)$ existent. On pose alors

$$\mathrm{ho}\varprojlim = \mathrm{R}\varprojlim$$

et on définit dualement le foncteur

$$\mathrm{ho}\varinjlim = \mathrm{L}\varinjlim$$

Remarque 1.4.4. Il convient de prendre garde à ne pas confondre les foncteurs «limite homotopique» et «colimite homotopique» avec les foncteurs «limite» et «colimite» *dans la catégorie homotopique*. On a évidemment un foncteur naturel $\mathrm{Ho}(\mathcal{C}^I) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{C})^I$, mais celui-ci n'est pas en général une équivalence de catégories. Autrement dit, le foncteur $\mathrm{ho}\varprojlim$ par exemple n'est *pas* l'adjoint à gauche du foncteur «diagramme constant» : $\mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{C})^I$.

Chapitre 2

Théorie homotopique des topos

L'objectif de ce chapitre est de construire deux structures de catégorie de modèles fermée sur un topos simplicial. La première, dite *structure simpliciale*, est définie pour un topos quelconque. La catégorie homotopique correspondante à été introduite bien avant la théorie de l'homotopie de Morel-Voevodsky ([MV]), par exemple dans la thèse de Luc Illusie [Ill]. La seconde dépend du choix d'un *intervalle* I (qui peut être par exemple $\mathbb{R}$, ou encore le disque complexe unité ouvert), et est obtenue à partir de la première par localisation de la projection $X \times I \to X$; c'est elle qui donne notamment la théorie homotopique des schémas de Morel-Voevodsky (dans ce cas, on prend pour intervalle la droite affine $\mathbb{A}^1$). Dans ce chapitre, nous exposons les constructions en toute généralité, pour un site T dont nous supposerons toutefois par commodité qu'il possède suffisamment de points. Une fois ces constructions effectuées, nous pourrons notamment, au chapitre suivant, étudier des cas particuliers topologiques où la théorie coïncide avec la théorie homotopique usuelle.

Pour ce qui concerne les topos, nous renvoyons le lecteur à [SGA4], et pour plus de détails concernant l'algèbre simpliciale, à [GJ].

2.1 Ensembles simpliciaux

Les ensembles simpliciaux fournissent un premier exemple de catégorie de modèles fermée, et jouent un rôle fondamental dans la construction de la catégorie homotopique d'un topos. Nous rappelons brièvement quelques définitions et propriétés, et renvoyons le lecteur à [GJ] pour plus de détails.

Définition 2.1.1. On note Δ la catégorie dont les objets sont les éléments $\underline{n}$ ou $\underline{n} = \{0 \ldots n\}$ et les morphismes $\underline{n} \to \underline{m}$ sont les fonctions croissantes de $\underline{n}$ dans $\underline{m}$. De manière équivalente, Δ est la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{Cat}$ formée des catégories de la forme $\underline{n} = (0 \to 1 \to \ldots \to n)$.

Définition 2.1.2 (Ensembles simpliciaux). La catégorie des *ensembles simpliciaux* $\boldsymbol{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns$ est la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur Δ.

Parmi les morphismes de Δ deux types sont particulièrement intéressants. Il s'agit des morphismes de cofaces, $d^i : \underline{n-1} \to \underline{n}$ (pour $0 \leqslant i \leqslant n$) et de codégénérescences, $s^j : \underline{n+1} \to \underline{n}$ (pour $0 \leqslant j \leqslant n$), définis par :

$$\begin{aligned} d^i(0 \to 1 \to \ldots \to n-1) &= (0 \to 1 \to \ldots i-1 \to i+1 \ldots n) \\ s^j(0 \to 1 \to \ldots \to n+1) &= (0 \to 1 \to \ldots j \xrightarrow{\mathrm{id}} j \ldots n) \end{aligned}$$

où le morphisme de coface correspond à composer $i-1 \to i \to i+1$. Il est aisé de voir que ces morphismes satsifont les *identités cosimpliciales*, et la donnée de ces morphismes et identités fournit alors un ensemble de générateurs et relations pour Δ.

$$\begin{array}{rcll} d^j d_i & = & d_i d_{j-1} & \text{pour } i < j \\ s_j d_i & = & d_i s_{j-1} & \text{pour } i < j \\ s_j d_j & = & s_j d_{j+1} = 1 & \\ s_j d_i & = & d_{i-1} s_j & \text{pour } i > j+1 \\ s_j s_i & = & s_i s_{j+1} & \text{pour } i \leqslant j \end{array}$$

Le lemme de Yoneda fournit un plongement pleinement fidèle de Δ dans $\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns$, on note alors Δ^n l'image de $\underline{n}$ par ce plongement. On appelle *n-simplexe* d'un ensemble simplicial X, et on note X_n un élément de $X(\underline{n}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns}(\Delta^n, X)$.

On souhaite maintenant définir une *réalisation topologique* des ensembles simpliciaux. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $|\Delta^n| = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1\}$. On en déduit un foncteur $|\Delta^\bullet| : \Delta \to \mathbf{Top}$ qui à $\underline{n}$ associe $|\Delta^n|$ ($\mathbf{Top}$ désignant la catégorie des espaces topologiques). Le lecteur est renvoyé à [GJ] pour plus de détails.

Définition 2.1.3 (Foncteur «ensemble simplicial singulier»). On note $S : \mathbf{Top} \to \mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns$ le foncteur *ensemble simplicial singulier* qui à un espace topologique X associe le préfaisceau $\underline{n} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|\Delta^n|, X)$, et on appelle SX l'*ensemble simplicial singulier* de X.

Proposition 2.1.4. Le foncteur $S : \mathbf{Top} \to \mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns$ admet un adjoint à gauche $|-|$ appelé réalisation topologique, défini par

$$|X| = \varinjlim_{\Delta^n \to X \in \Delta/X} |\Delta^n|$$

Démonstration. On a les isomorphismes suivants, le premier venant du fait que tout préfaisceau est limite inductive de représentables, et le deuxième des isomorphismes $(SY)_n \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|\Delta^n|, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns}(\Delta^n, SY)$.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|X|, Y) & \simeq & \varprojlim_{\Delta^n \to X} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|\Delta^n|, Y) \\ & \simeq & \varprojlim_{\Delta^n \to X} \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns}(\Delta^n, SY) \\ & \simeq & \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns}(X, SY) \end{array}$$

□

On dit qu'un n-simplexe est *non-dégénéré* s'il n'est pas dans l'image des dégénérescences.

Définition 2.1.5. Soit $\mathcal{X}$ un objet de $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$, et $n \geqslant 0$. On note $\mathcal{X}_n^{\deg} \subset \mathcal{X}_n$ l'union des images des morphismes de dégénérescence $\mathcal{X}_{n-1} \to \mathcal{X}_n$:

$$\mathcal{X}_n^{\deg} = \bigcup_{i=0}^{n-1} s_i^{n-1}(\mathcal{X}_{n-1})$$

On définit le *n-squelette* de $\mathcal{X}$, que l'on note $\mathrm{sk}_n(\mathcal{X})$, comme l'image du morphisme $\mathcal{X}_n \times \Delta^n \to \mathcal{X}$. On pose $\mathrm{sk}_{-1}(\mathcal{X}) = \varnothing$.

On rappelle qu'une équivalence faible d'espaces topologiques est une application continue $f : X \to Y$ induisant une bijection $\pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ et pour tout point $x \in X$ et $n \geqslant 1$ une bijection $\pi_n(X,x) \to \pi_n(Y, f(x))$.

Définition 2.1.6 (Bords et cornets).

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\partial\Delta^n$ et on appelle *bord de* Δ^n le sous-préfaisceau de Δ^n engendré par les simplexes non-dégénérés de dimension $n-1$ dans Δ^n.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note Λ^n_k et on appelle *cornet de* Δ^nle sous-ensemble simplicial de Δ^n engendré par les $n-1$ simplexes de Δ^n de la forme $d_i(\mathrm{id}_{\underline{n}})$ pour $i \neq k$.

Définition 2.1.7. Dans $\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns$, on pose que les cofibrations sont les monomorphismes, les équivalences faibles sont les morphismes f tels que $|f|$ soit une équivalence faible d'espaces topologiques, et les fibrations sont les morphismes ayant la propriété de relèvement à droite vis-à-vis des inclusions $\Lambda^n_k \to \Delta^n$.

Théorème 2.1.8. La catégorie $\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns$ munie des cofibrations, fibrations et équivalences faibles définies ci-dessus est une catégorie de modèles fermée. En outre, un morphisme de $\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns$ est une fibration triviale si et seulement si il possède la propriété de relèvement à droite par rapport aux inclusions $\partial\Delta^n \to \Delta^n$.

Démonstration. [GJ, théorème 11.2 et 11.3, pp. 61-62]. □

On définit de manière similaire la catégorie des faisceaux simpliciaux sur un site T :

Définition 2.1.9. Soit T un site et $\widetilde{T}$ le topos correspondant. On note $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$ la catégorie des objets simpliciaux de $\widetilde{T}$, i.e. la catégorie des foncteurs $\Delta^{\mathrm{op}} \to \widetilde{T}$. Il est facile de voir que $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$ est un topos. Un faisceau simplicial $\mathcal{X}$ peut être vu comme une collection de faisceaux $\mathcal{X}_n$ pour $n \geqslant 0$ munie de morphismes $d^n_i : \mathcal{X}_n \to \mathcal{X}_{n-1}$ (pour $n \geqslant 1$ et $i \in [\![0 \dots n]\!]$, appelés faces) et $s^n_i : \mathcal{X}_n \to \mathcal{X}_{n+1}$ (pour $n \geqslant 0$ et $i \in [\![0 \dots n]\!]$, appelés dégénérescences), vérifiant les *identités simpliciales* :

$$
\begin{array}{rcll}
d_i d_j & = & d_{j-1} d_i & \text{pour } i < j \\
d_i s_j & = & s_{j-1} d_i & \text{pour } i < j \\
d_j s_j & = & d_{j+1} s_j = 1 & \\
d_i s_j & = & s_j d_{j-1} & \text{pour } i > j+1 \\
s_i s_j & = & s_{j+1} s_i & \text{pour } i \leqslant j
\end{array}
$$

2.2 La catégorie homotopique simpliciale d'un topos

Définition 2.2.1. Soit $\mathcal{X}$ un faisceau simplicial sur T. On dit que $\mathcal{X}$ est de *dimension simpliciale* inférieure ou égale à n si le morphisme $\mathcal{X}_n \times \Delta^n \to \mathcal{X}$ est épi, ou de manière équivalente, si $\mathrm{sk}_n(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$. On identifie les faisceaux d'ensembles aux faisceaux de dimension simpliciale 0.

On va maintenant définir une structure de catégorie de modèles fermée sur $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$.

Définition 2.2.2. Soit $\mathcal{X}$ un objet de $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$. On définit le n^e *faisceau d'homotopie* de $\mathcal{X}$, que l'on note $\Pi_n(\mathcal{X})$, comme le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \{(\gamma, x), x \in \mathcal{X}(U)_0, \gamma \in \pi_n(\mathcal{X}(U), x)\}$. C'est un faisceau en groupes pour $n \geqslant 1$, abéliens si $n \geqslant 2$.

Définition 2.2.3. Soit $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un morphisme de faisceaux simpliciaux. On dit que :

- f est une *équivalence faible simpliciale* si :
  - $\Pi_0\mathcal{X} \to \Pi_0\mathcal{Y}$ est un isomorphisme.
  - pour tout $n \geqslant 1$, le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \Pi_n\mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d] & \Pi_n\mathcal{Y} \arrow[d] \\ \mathcal{X}_0 \arrow[r, "f_0"'] & \mathcal{Y}_0 \end{tikzcd}$$

  est cartésien.
- f est une *cofibration* si f est un monomorphisme.
- f est une *fibration* si f a la propriété de relèvement à droite vis-à-vis des cofibrations triviales.

On note $\mathbf{W}_s$ (resp. $\mathbf{C}$, $\mathbf{F}_s$) les équivalences faibles simpliciales (resp. les cofibrations et fibrations simpliciales).

Dans le cas où le site T admet suffisamment de points, on a une caractérisation plus commode des équivalences faibles. Cela fait l'objet de la proposition suivante :

Proposition 2.2.4. Soit T un site ayant suffisamment de points, et $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un morphisme dans $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est une équivalence faible simpliciale.
- pour tout point $x : \mathcal{E}ns \to \widetilde{T}$ d'une famille conservative de points, le morphismes $x^*f : x^*\mathcal{X} \to x^*\mathcal{Y}$ d'ensembles simpliciaux est un équivalence faible.

Démonstration. La preuve résulte immédiatement du lemme suivant. □

Lemme 2.2.5. Soit $x : \mathcal{E}ns \to \widetilde{T}$ un point du topos $\widetilde{T}$. Pour tout objet $\mathcal{X}$ de $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$, il existe une bijection canonique $x^*\Pi_0(\mathcal{X}) \xrightarrow{\sim} \pi_0(x^*\mathcal{X})$ et pour tout $n \geqslant 1$, l'application $x^*\Pi_n(\mathcal{X}) \to x^*\mathcal{X}_0$ s'identifie canoniquement à l'application $\coprod_{f \in x^*\mathcal{X}_0} \pi_n(x^*\mathcal{X}, f) \to x^*\mathcal{X}_0$.

Démonstration. D'après [SGA4, IV 6.8.4], le foncteur fibre x^* est proreprésentable. Le pro-objet X correspondant est donné par la catégorie filtrante $\mathrm{V}ois_{x^*}$ dont les objets sont les couples (U, u) où $U \in T$, $u \in x^*(U)$ dans laquelles un morphisme $(U, u) \to (U', u')$ est un morphisme $f : U \to U'$ de T tel que $u' = x^*(f)(u)$. Les foncteurs $\pi_0(-)$ et $\pi_n(-, \bullet)$ commutent aux limites inductives filtrantes, d'où le résultat. □

Corollaire 2.2.6. Soit $\varphi : \widetilde{T} \to \widetilde{T}'$ un morphisme de topos admettant suffisamment de points. Alors, pour toute équivalence faible simpliciale f dans $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}'$, le morphisme $\varphi^*(f)$ est une équivalence faible simpliciale dans $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$.

Démonstration. Pour tout point $x : \mathcal{E}ns \to \widetilde{T}$, $(\varphi \circ x) : \mathcal{E}ns \to \widetilde{T}'$ est un point de $\widetilde{T}'$, donc $(x^* \varphi^*)(f)$ est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux. Par conséquent $\varphi^*(f)$ l'est également, d'après la proposition précédente. □

Théorème 2.2.7. Pour tout petit site T, la donnée de $\mathbf{W}_s$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{F}_s$ fait de $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$ une catégorie de modèles fermée.

Démonstration. Par commodité, nous donnons la preuve dans le cas où T admet suffisamment de points, bien que cette condition puisse être relâchée. Il est évident que l'axiome $\mathbf{CM1}^+$ est vérifié. En vertu de la proposition 2.2.4, l'axiome **CM2** est également vérifié. Puisque les monomorphismes et les morphismes possédant des propriété de relèvement sont stables par rétracte, il reste à le vérifier pour les équivalences faibles pour que l'axiome **CM3** soit vérifié. Cela résulte de la proposition 2.2.4 et du fait qu'il est vérifié pour les ensembles simpliciaux. Pour vérifier la validité de **CM4**, on suppose vérifié l'axiome **CM5**. Les fibrations simpliciales ont par définition la propriété de relèvement à droite vis-à-vis des cofibrations triviales. Par ailleurs, les monomorphismes dans un topos sont stables par composition et sommes amalgamées ; ces propriétés ainsi que l'axiome **CM5** assurent, d'après l'astuce de Joyal (lemme 1.1.3) que l'axiome **CM4** est vérifié. Il reste à montrer que **CM5+** est vérifié.

On se donne un cardinal α infini majorant le cardinal de l'ensemble des parties de l'ensemble des flèches de T, le cardinal d'une famille conservative de foncteurs fibres $(x_j)_{j \in J}$, et le cardinal de l'ensembles des objets de la catégorie $Vois_{x_j}$ pour tout $j \in J$.

Définition 2.2.8. Soit $F \in \widehat{T}$. On dit que F est α-borné si pour tout objet U de T, le cardinal de $F(U)$ est inférieur à α. On dit qu'un objet $\mathcal{X}$ de $\mathbf{\Delta}^{op}\widehat{T}$ est α-borné si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{X}_n$ est α-borné.

Lemme 2.2.9. Soit $i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un monomorphisme dans $\mathbf{\Delta}^{op}\widehat{T}$ tel que $a(i)$ soit une équivalence faible simpliciale, et soit $\mathcal{B}_0$ un sous-préfaisceau simplicial α-borné de $\mathcal{B}$. Alors il existe un sous-préfaisceau simplicial α-borné $\mathcal{B}_\omega$ de $\mathcal{B}$ tel que l'inclusion $a(\mathcal{B}_w \cap \mathcal{A}) \to a(\mathcal{B}_\omega)$ soit une équivalence faible simpliciale.

Démonstration. [Jar, p. 65]. □

Lemme 2.2.10. Soit $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un morphisme dans $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$. f est une fibration simpliciale si et seulement si f possède la propriété de relèvement à droite par rapport aux monomorphismes i de $\mathbf{\Delta}^{op}\widehat{T}$ dont le but est α-borné et tel que $a(i)$ soit une équivalence faible simpliciale (a désigne comme d'habitude le foncteur «faisceautisation»).

Démonstration. Soit $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un morphisme dans $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$ possédant la propriété de relèvement à droite par rapport aux monomorphismes i de $\mathbf{\Delta}^{op}\widehat{T}$ dont le but est α-borné et tel que $a(i)$ soit une équivalence faible simpliciale.

Considérons un diagramme commutatif comme ci-dessous, ou i est une inclusion dans $\mathbf{\Delta}^{op}\widehat{T}$ telle que $a(i)$ soit une équivalence faible simpliciale.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & \mathcal{X} \arrow[d, "f"] \\ \mathcal{B} \arrow[r] & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

Pour obtenir le relèvement désiré, on montre qu'il existe un sous-préfaisceau simplicial $i' : \mathcal{B}'$ de $\mathcal{B}$ contenant $\mathcal{A}$ tel que $a_{i'}$ soit une équivalence faible simpliciale et tel qu'il existe un morphisme φ rendant le diagramme ci-dessous commutatif. Il suffira alors d'appliquer le lemme de Zorn, puisque $\mathcal{B}$ est α-borné.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & \mathcal{X} \arrow[dd, "f"] \\ \mathcal{B} \arrow[ur, dashed, "\varphi"] \arrow[d] & \\ \mathcal{B} \arrow[r] & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

L'existence d'un tel $\mathcal{B}'$ découle du lemme 2.2.9. □

On admettra les deux lemmes suivants :

Lemme 2.2.11. Si $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ dans $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$ possède la propriété de relèvement à droite vis-à-vis des monomorphismes dans $\mathbf{\Delta}^{op}\widehat{T}$ dont le but est α-borné, alors f est une fibration triviale simpliciale.

Lemme 2.2.12. Tout objet de $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$ est accessible.

Soit B l'ensemble de tous les morphismes dans $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$ obtenus en appliquant a à un monomorphisme de $\mathbf{\Delta}^{op}\widehat{T}$ dont le but est α-borné, et B' le sous-ensemble de B formé des morphismes qui sont également des équivalences faibles simpliciales. D'après au lemmes 2.2.12, on peut appliquer le raisonnement du petit objet a B et B' dans $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$, ce qui donne deux types de factorisations, dont il faut maintenant montrer qu'elles satisfont l'axiome $\mathbf{CM}^+$. Soit $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ dans $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$. Comme les morphismes de B et B' sont des monomorphismes, par induction ordinale on obtient que $\mathcal{X} \to \Phi^{\gamma}_{B}(f)$ et $\mathcal{X} \to \Phi^{\gamma}_{B'}(f)$ sont des cofibrations simpliciales. On vérifie au niveau des foncteurs fibres, grâce à la stabilité par sommes amalgamées des cofibrations triviales d'ensembles simpliciaux, que $\mathcal{X} \to \Phi^{\gamma}_{B'}(f)$ est aussi une équivalence faible simpliciale. Il découle des lemmes 2.2.10 et 2.2.11 que le morphisme $\Phi^{\gamma}_{B}(f) \to \mathcal{Y}$ est une fibration simpliciale et que $\Phi^{\gamma}_{B'}(f) \to \mathcal{Y}$ est une fibration triviale simpliciale. L'axiome $\mathbf{CM5}^+$ est donc vérifié. □

Le lemme fondamental de l'algèbre homotopique (lemme 1.1.16) assure l'existence de la catégorie localisée stricte de $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$. On note $\mathrm{Ho}_s(T)$ cette catégorie, que l'on appelle *catégorie homotopique simpliciale du site* T.

Nous donnons maintenant quelques propriétés élémentaires de la structure homotopique simpliciale de $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$. On fait encore l'hypothèse de confort que T admette suffisamment de points. On note $\mathcal{H}om$ le Hom. interne dans un topos, i.e. l'adjoint à droite du foncteur $- \times -$, et $\mathbf{hom}$ les sections globales de $\mathcal{H}om$.

Proposition 2.2.13. Soit $i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ une cofibration et $p : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ une fibration dans $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$.

- Le morphisme naturel $\mathcal{H}om(\mathcal{B},\mathcal{X}) \to \mathcal{H}om(\mathcal{A},\mathcal{X}) \times_{\mathcal{H}om(\mathcal{A},\mathcal{Y})} \mathcal{H}om(\mathcal{B},\mathcal{Y})$ est une fibration qui est triviale si i ou p est triviale.
- Le morphisme naturel $\mathbf{hom}(\mathcal{B},\mathcal{X}) \to \mathbf{hom}(\mathcal{A},\mathcal{X}) \times_{\mathbf{hom}(\mathcal{A},\mathcal{Y})} \mathbf{hom}(\mathcal{B},\mathcal{Y})$ est une fibration qui est triviale si i ou p est triviale.

Proposition 2.2.14. Soit $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux objets simplicialement fibrants de $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$ et $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un morphisme. Les proprositions suivantes sont équivalentes :
- f est une équivalence d'homotopie.
- f est une équivalence faible simpliciale.
- pour tout U dans T, le morphisme $\mathcal{X}(U) \to \mathcal{Y}(U)$ est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux.

2.3 La correspondance de Dold-Kan

On se propose dans cette section d'une part de démontrer la correspondance de Dold-Kan dans un topos quelconque, c'est-à-dire l'équivalence de catégories entre la catégorie $\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{A}b_{\widetilde{T}}$ des faisceaux simpliciaux en groupes abéliens et la catégorie $\mathbf{Ch}_+(\mathcal{A}b_{\widetilde{T}})$ des complexes de faisceaux en groupes abéliens bornés à gauche, et d'autre part, de faire le lien avec la cohomologie singulière, notamment de montrer la représentabilité des foncteurs $H^i(-; G)$ par les espaces d'Eilenberg-MacLane $K(G, n)$ dans la catégorie homotopique.

Dans toute cette section, on se fixe un topos $\widetilde{T}$, et on note $\mathcal{A}b_{\widetilde{T}}$ la sous-catégorie des faisceaux en groupes abéliens de $\widetilde{T}$.

Définition 2.3.1. Soit A un faisceau simplicial en groupe abéliens dans $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$. On définit le *complexe de Moore* associé à A, que l'on note également A, dont la composante en degré n est A_n, et dont le morphisme de bord $\partial : A_n \to A_{n-1}$ est donné par $\partial = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i$. On note NA le *complexe normalisé* de A, qui est le sous-complexe de A définit par $NA_n = \bigcap_{i=0}^{n} \ker d_i \subset A_n$.

Si X est un faisceau simplicial, on note $C_*(X)$ le complexe de Moore associé au faisceau simplicial $\mathbb{Z}X$ où $\mathbb{Z}$ est le foncteur «groupe abélien libre», adjoint à gauche du foncteur d'oubli $\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{A}b_{\widetilde{T}} \to \mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$.

Enfin, soit $D(A_n)$ le sous-faisceau en groupes abéliens engendré par les simplexes dégénérés de A_n. L'application de bord ∂ du complexe de Moore associé à A induit un morphisme $\partial : A_n/D(A_n) \to A_{n-1}/D(A_{n-1})$ de faisceaux en groupes abéliens. On note A/DA le complexe ainsi obtenu.

Proposition 2.3.2. Soit A un objet de $\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{A}b_{\widetilde{T}}$. L'application composée :

$$NA \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A/D(A)$$

où i est l'inclusion naturelle et p le morphisme de quotient canonique, est un isomorphisme de complexes de faisceaux en groupes abéliens.

Démonstration. Par commodité, on suppose dans cette preuve que T a suffisamment de points, ce qui permettra de raisonner sur les éléments de l'image de A par un point de $\widetilde{T}$ quelconque dans une famille conservative plutôt qu'a raffinement près. Il est toutefois clair que le résultat reste valide sans cette hypothèse.

Soit φ un élément d'une famille conservative de points de $\widetilde{T}$. On fera l'abus de notation d'écrire A (resp. A_n, NA, etc.) pour φ^*A (resp. φ^*A_n, φ^*NA, etc.)

On pose $N_jA_n = \bigcap_{i=0}^{j} \ker d_i \in A_n$, et D_jA_n le sous-groupe de N_jA_n engendré par les images des morphismes de dégénérescence s_i pour $i \leqslant j$. On va montrer que le morphisme

$$N_jA_n \xrightarrow{i} A_n \xrightarrow{p} A_n/D_j(A_n)$$

est un isomorphisme pour tout n et $j < n$. Notons Φ ce morphisme. On procède par récurrence sur j. Pour $j = 0$, une classe $\bar{x}$ de A_n/s_0A_{n-1} est représentée par $x - s_0d_0x$, or $d_0(x - s_0d_0x) = 0$, donc Φ est surjective. Reste à voir l'injectivité. On considère $x \in N_0A_n$, soit $d_0x = 0$, et on suppose $x = s_0y$ (i.e. x a pour image 0 dans $A_n/D_0(A_n)$, ou encore $x = s_0y$). Alors $d_0s_0y = d_0x = y = 0$, d'où le résultat.

Supposons maintenant que le morphisme

$$N_kA_m \xrightarrow{i} A_m \xrightarrow{p} A_n/D_k(A_m)$$

soit un isomorphisme pour $k < j$. On considère le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} N_{j-1}A_n \arrow[r, "\Phi"] & A_n/D_{j-1}(A_n) \arrow[d] \\ N_jA_n \arrow[u] \arrow[r, "\Phi"'] & A_n/D_j(A_n) \end{tikzcd}$$

La flèche du haut étant un isomorphisme par hypothèse de récurrence, et celle de gauche un monomorphisme de manière évidente. Ainsi, une classe $\bar{x}$ dans $A_n/D_j(A_n)$ est représentée par un élément x dans $N_{j-1}A_n$. Par conséquent, $x - s_jd_jx$ appartient à N_jA_n et est un représentant de $\bar{x}$, donc la flèche du bas dans le diagramme est surjective. Par ailleurs, d'après les identités simpliciales, le morphisme de dégénérescence $s_j : A_{n-1} \to A_n$ envoie $N_{j-1}A_{n-1}$ dans $N_{j-1}A_n$ et $D_{j-1}(A_{n-1})$ sur $D_{j-1}A_n$, d'où le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} N_{j-1}A_{n-1} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "s_j"'] & A_{n-1}/D_{j-1}(A_{n-1}) \arrow[d, "s_j"] \\ N_{j-1}A_n \arrow[r, "\Phi"'] & A_n/D_{j-1}(A_n) \end{tikzcd}$$

où Φ est un isomorphisme par hypothèse de récurrence.

On a par ailleurs une suite exacte :

$$0 \longrightarrow A_{n-1}/D_{j-1}(A_{n-1}) \xrightarrow{s_j} A_n/D_{j-1}(A_n) \longrightarrow A_n/D_j(A_n)$$

Par conséquent, si $\Phi(x) = 0$, alors $x = s_jy$ pour $y \in N_{j-1}(A_n)$. Comme $d_0x = 0$, on a $d_jx = d_js_jy = y = 0$, d'où $x = 0$, ce qui prouve l'injectivité de Φ. □

Remarque 2.3.3. Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de faisceaux en groupes abéliens munie de morphismes $\partial : C_n \to C_{n-1}$ pour $n > 0$. À chaque ordinal $\underline{n}$ on associe le groupe C_n et à chaque injection d'un ordinal dans un autre, on associe un morphisme de groupes de la manière suivante :

$$f \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } f \text{ n'est pas de la forme } d^n \\ C_n \xrightarrow{(-1)^n \partial} C_{n-1} & \text{si } f = d^n \end{cases}$$

on obtient alors un faisceau en groupes abéliens dont les n-simplexes sont de la forme $\bigoplus_{\substack{\underline{n} \to \underline{k} \\ \text{épi}}} NA_k$.

Par ailleurs, chaque applications entre ordinaux $\theta : \underline{m} \to \underline{n}$ définit un morphisme $\theta^* : \bigoplus_{\substack{\underline{n} \to \underline{k} \\ \text{épi}}} NA_k \to \bigoplus_{\substack{\underline{m} \to \underline{r} \\ \text{épi}}} NA_r$ dont le terme correspondant à la flèche $\sigma : \underline{n} \to \underline{k}$ est

$$NA_k \xrightarrow{d^*} NA_s \to \bigoplus_{\substack{\underline{m} \to \underline{r} \\ \text{épi}}} NA_r$$

où s est défini en regard de la factorisation épi-mono $\underline{m} \xrightarrow{\text{épi}} \underline{s} \xrightarrow{\text{mono}} \underline{k}$ de $\underline{m} \to \underline{n} \to \underline{k}$.

Le lemme suivant nous sera très utile dans la démonstration de la correspondance de Dold-Kan.

Lemme 2.3.4. Le morphisme

$$\Psi : \bigoplus_{\substack{\underline{n} \to \underline{k} \\ \text{épi}}} NA_k \to A_n$$

dont le terme d'indice $\underline{n} \to \underline{k}$ est obtenu à partir de $\sigma : \underline{n} \to k$ en composant

$$NA_k \to A_k \xrightarrow{\sigma^*} A_n$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Par récurrence sur n. Voir [GJ, proposition 2.2] pour plus de détails. □

La remarque précédente montre que l'on a un foncteur $K : \mathbf{Ch}_+(\mathcal{A}b_{\widetilde{T}}) \to \mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{A}b_{\widetilde{T}}$ tel que $K(C)_n = \bigoplus_{\substack{\underline{n} \to \underline{k} \\ \text{épi}}} C_k$

Nous avons maintenant tout ce qu'il faut pour énoncer et démontrer la correspondance de Dold-Kan.

Théorème 2.3.5 (Correspondance de Dold-Kan). Les foncteurs $N : \mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{A}b_{\widetilde{T}} \to \mathbf{Ch}_+(\mathcal{A}b_{\widetilde{T}})$ et $K : \mathbf{Ch}_+(\mathcal{A}b_{\widetilde{T}}) \to \mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{A}b_{\widetilde{T}}$ sont quasi-inverses et induisent une équivalence de catégories $\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{A}b_{\widetilde{T}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Ch}_+(\mathcal{A}b_{\widetilde{T}})$.

Démonstration. L'isomorphisme naturel $KN(A) \simeq A$ découle du lemme 2.3.4. L'isomorphisme $NK(C) \simeq C$, se déduit quant à lui de la proposition 2.3.2. □

On en déduit une structure de catégorie de modèles fermée sur $\mathbf{Ch}_+(\mathcal{A}b_{\widetilde{T}})$. On peut par exemple prendre pour cofibrations les monomorphismes et pour équivalences faibles les quasi-isomorphismes de complexes (une preuve pour les complexes non bornés est donnée dans [B00] elle reste valide pour les complexes bornés).

Proposition 2.3.6. L'inclusion $NA \to A$ dans $\mathbf{Ch}_+(\mathcal{A}b_{\widetilde{T}})$ est une équivalence d'homotopie (fonctorielle en A)

Lemme 2.3.7. Le foncteur $C_*(-)$ envoie les équivalences faibles sur des quasi-isomorphismes.

Théorème 2.3.8. Le foncteur $N\mathbb{Z}- : \mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{A}b_{\widetilde{T}} \to \mathbf{Ch}_+(\mathcal{A}b_{\widetilde{T}})$ admet un adjoint à droite $K : \mathbf{Ch}_+(\mathcal{A}b_{\widetilde{T}}) :\to \mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{A}b_{\widetilde{T}}$, et le couple $(N\mathbb{Z}-, K)$ forme une adjonction de Quillen. Par ailleurs, $N\mathbb{Z}-$ et K préservent les équivalences faibles, d'où un couple d'adjoints $C_*(-) : \mathrm{Ho}_s(T) \to \mathcal{D}^{\leqslant 0}\mathcal{A}b_{\widetilde{T}}$, $K : \mathcal{D}^{\leqslant 0}\mathcal{A}b_{\widetilde{T}} \to \mathrm{Ho}_s(T)$.

Démonstration. Les foncteurs $C_*(-)$ et $N\mathbb{Z}$ préservent les équivalences faibles. D'après la proposition 2.3.6, le morphisme canonique $N\mathbb{Z} \to C_*(-)$ induit un isomorphisme au niveau des foncteurs correspondant entre les catégories homotopiques. Il suffit alors d'étudier l'adjonction $\mathbb{Z}- \dashv U$, où U désigne le foncteur d'oubli $\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{A}b_{\widetilde{T}} \to \mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$, et la correspondance de Dold-Kan donnera l'adjonction désirée. U préservant fibrations et équivalences faibles, $\mathbb{Z}- \dashv U$ est une adjonction de Quillen, donc il en est de même pour $C_*(-) \dashv K$. □

Nous allons maintenant faire le lien entre ce qui précède et la cohomologie singulière.

Définition 2.3.9. Soit $G \in \mathcal{A}b\widetilde{T}$ un faisceau en groupes abéliens, G' une résolution fibrante de G. On définit $\mathrm{RHom}(C_*(X), G) = \mathrm{Hom}(C_*(X), G')$ Pour $n \in \mathbb{N}$ et $X \in \mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$, on note $H^n(X; G)$ le n^{e} objet de cohomologie du complexe $\mathrm{RHom}(C_*(X), G)$,. Ces groupes sont la *cohomologie singulière de X à coefficients dans G*.

Théorème 2.3.10. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $G \in \mathcal{A}b_{\widetilde{T}}$. On a un isomorphisme canonique de foncteurs $\mathrm{Ho}_s(T) \to \mathcal{A}b_{\widetilde{T}}$:

$$H^n(X; G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(T)}(X, K(G[n]))$$

Démonstration. On a une équivalence faible $K(G) \to K(G')$, d'où une équivalence faible $K(G[n]) \to K(G'[n])$, K préservant les équivalences faibles. $K(G'[n])$ est fibrant car K préserve les fibrations (car il est l'adjoint à droite d'une adjonction de Quillen) et $G'[n]$ est fibrant (G' l'étant). On a donc $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(T)}(X, K(G[n])) = \pi(X, K(G[n]))$. Par le théorème 2.3.8, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(T)}(X, K(G[n])) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\leqslant 0}(\mathcal{A}b_{\widetilde{T}})}(C_*(X), G[n])$. Or on a :

$$\begin{aligned} H^n(X, G) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\leqslant 0}(\mathcal{A}b_{\widetilde{T}})}(C_*(X), G[n]) &= \mathrm{Hom}(C_*(X), G'[n]) \\ &= \pi(C_*(X, G'[n]) \\ &= H^0(\mathrm{Hom}(C_*(X), G'[n]) \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat. □

2.4 La I-localisation d'un topos

Nous allons maintenant munir $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$, une fois fait le choix d'un objet «intervalle» I, d'une autre structure de catégorie de modèle, dite structure *I-localisée*. Il s'agira de définir la notion d'objet I-local et de I-équivalence faibles de sorte que $\mathbf{W}_s \subset \mathbf{W}_I$, les cofibrations étant les monomorphismes, et les fibrations définies de manière usuelle en vertu du lemme 1.1.4. Nous étudierons ensuite la fonctorialité de ces constructions.

2.5 Définitions et généralités

Dans toute cette section, on fixe un site T admettant suffisamment de points.

Définition 2.5.1 (Intervalle). Un intervalle de T est la donnée d'un faisceau d'ensemble $I \in \widetilde{T}$ muni de morphismes $\mu : I \times I \to I$ et $i_0, i_1 : \bullet \to I$ tels que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "(i_0,\mathrm{id})"] \arrow[dd, "(\mathrm{id},i_0)"'] \arrow[dr] & & I \times I \arrow[dd, "\mu"] \\ & \bullet \arrow[dr, "i_0"] & \\ I \times I \arrow[rr, "\mu"'] & & I \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \arrow[rr, "(i_1,\mathrm{id})"] \arrow[dd, "(\mathrm{id},i_1)"'] \arrow[ddrr, equal] & & I \times I \arrow[dd, "\mu"] \\ & & \\ I \times I \arrow[rr, "\mu"'] & & I \end{tikzcd}$$

et que le morphisme $(i_0, i_1) : \bullet \sqcup \bullet \to I$ soit un monomorphisme.

Définition 2.5.2. Soit (T, I) un site avec intervalle.
- Un faisceau simplicial $\mathcal{X}$ sur T est dit I-local si pour tout faisceau simplicial $\mathcal{Y}$, l'application $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}_s(T)}(\mathcal{Y} \times I, \mathcal{X}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}_s(T)}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ induit par $i_0 : \bullet \to I$ est bijective.
- Un morphisme $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ de faisceaux simpliciaux sur T est une I-équivalence faible si pour tout objet I-local $\mathcal{Z}$, l'application canonique $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}_s(T)}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}_s(T)}(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$ est bijective.

La catégorie homotopique $\mathrm{Ho}(T, I)$ (resp. $\mathrm{Ho}(\widetilde{T}, I)$) du site T (resp. du topos $\widetilde{T}$) muni de l'intervalle I est la catégorie localisée stricte de $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$ par rapport aux I-équivalences faibles.

Définition 2.5.3. Soit $f, g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ deux morphismes dans $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$. Une *$I$-homotopie élémentaire* de f à g est un morphisme $H : \mathcal{X} \times I \to \mathcal{Y}$ tel que $H \circ i_0 = f$ et $H \circ i_1 = g$. Deux morphismes sont dit *I-homotopes* s'il peuvent être reliés par des I-homotopies élémentaires. Un morphisme $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ est une *équivalence de I-homotopie stricte* s'il existe un morphisme $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ tel que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient I-homotopes respectivement à $\mathrm{Id}_{\mathcal{Y}}$ et $\mathrm{Id}_{\mathcal{X}}$.

Nous allons maintenant définir un endofoncteur Sing_*^I sur la catégorie $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$. des faisceaux simpliciaux sur le site T muni de l'intervalle I, vérifiant certaines propriétés ; cela permet notamment de démontrer que la structure de catégorie de modèles fermée sur $\mathrm{Ho}(T, I)$ est propre (pour ce résultat, nous renvoyons le lecteur à [MV, théorème 3.2]), mais aussi de construire des foncteurs de résolution.

Proposition 2.5.4. Soit T un site muni d'un intervalle I. Il existe un foncteur $\mathrm{Sing}_*^I : \mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T} \to \mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$ et une transformations naturelle $s : \mathrm{Id} \to \mathrm{Sing}_*^I$ vérifiant les propriétés suivantes :
- Sing_*^I commute aux limites projectives.
- Sing_*^I envoie le morphisme $i_0 : \bullet \to I$ sur une équivalence faible.
- pour tout faisceau simplicial $\mathcal{X}$, le morphisme $s_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to \mathrm{Sing}_*^I(\mathcal{X})$ est un monomorphisme et une I-équivalence faible.

– Sing_*^I préserve les I-fibrations.

Démonstration. On commence par définir un objet cosimplicial $\Delta_I^\bullet : \Delta \to \widetilde{T}$. Pour cela, on pose $\Delta_I^n = I^n$. Si $f : \underline{n} \to \underline{m}$ est un morphisme dans la catégorie Δ, on définit

$$\Phi(f)(i) = \begin{cases} \min\{l \in \underline{n} \mid f(l) \geqslant i\} & \text{si cet ensemble est non vide} \\ n+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $p_k : I^n \to I$ la k^{e} projection, et p le morphisme naturel $I \to \bullet$. Alors, on définit $\Delta_I^\bullet(f)$ de la manière suivante :

$$p_k \circ a(f) = \begin{cases} p_{\Phi(f)(k)} & \text{si } \Phi(f)(k) \in [\![1 \dots n]\!] \\ i_0 \circ p & \text{si } \Phi(f)(k) = n+1 \\ i_1 \circ p & \text{si } \Phi(f)(k) = n+1 \end{cases}$$

Maintenant, si $\mathcal{X}$ est un faisceau simplicial, on pose que $\mathrm{Sing}_*^I(\mathcal{X})$ est le faisceau simplicial diagonal du faisceau bisimplicial dont les composantes sont les $\mathcal{H}om(\Delta_I^m, \mathcal{X}_n)$. Il y a une transformation naturelle canonique $s : \mathrm{Id} \to \mathrm{Sing}_*^I$ de sorte que pour tout $\mathcal{X}$, $s_{\mathcal{X}}$ soit un monomorphisme d'après la définition de Sing_*^I. Il reste à voir que ce foncteur satisfait les propriétés du théorème. La première est claire par construction. La deuxième est démontrée par le corollaire 2.5.6, la troisième par le corollaire 2.5.9 et la quatrième par la proposition 2.5.10. □

Proposition 2.5.5. Soit $f, g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ et H une I-homotopie élémentaire de f à g. Alors il existe une homotopie simpliciale élémentaire de $\mathrm{Sing}_*^I(f)$ vers $\mathrm{Sing}_*^I(g)$.

Démonstration. Le foncteur Sing_*^I commutant aux limites projectives, il suffit de montrer que les morphismes $\mathrm{Sing}_*^I(i_0), \mathrm{Sing}_*^I(i_1) : \bullet \to \mathrm{Sing}_*^I(I)$ sont élémentairement simplicialement homotopes. L'homotopie recherchée est donnée par le morphisme $\bullet \to \mathrm{Sing}_1(I) = \mathcal{H}om(I, I)$ correspondant à l'identité de I. □

Corollaire 2.5.6. Pour tout faisceau simplicial $\mathcal{X} \in \mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$, le morphisme $\mathrm{Sing}_*^I(\mathcal{X}) \xrightarrow{\mathrm{Id} \times i_0} \mathrm{Sing}_*^I(\mathcal{X} \times I)$ est une équivalence d'homotopie simpliciale.

Démonstration. D'après la proposition précédente, il suffit de montrer que le morphisme composé $\mathcal{X} \times I \to \mathcal{X} \xrightarrow{\mathrm{Id} \times i_0}$ est élémentairement I-homotope à l'identité. Le morphisme $\mathrm{Id} \times \mu : \mathcal{X} \times I \times I \to \mathcal{X} \times I$ fournit une telle homotopie. □

Lemme 2.5.7. Toute I-homotopie stricte est une I-équivalence faible.

Démonstration. Soit $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ une équivalence de I-homotopie stricte et g un inverse d'homotopie de f. Les deux morphismes $f \circ g$ et $g \circ f$ sont par définition I-homotopes à l'identité. Il est clair d'après la définition que deux morphismes élémentairement I-homotopes sont égaux dans la catégorie homotopique, ce qui permet de conclure. □

Lemme 2.5.8. Pour tout faisceau simplicial $\mathcal{X}$, le morphisme canonique $\mathcal{X} \to \mathcal{H}om(I, \mathcal{X})$ est une équivalence de I-homotopie stricte, et donc une I-équivalence faible.

Démonstration. Considérons le morphisme $\mathcal{H}om(I, \mathcal{X}) \times I \to \mathcal{H}om(I, \mathcal{X})$ dont l'adjoint est donné par μ. Il définit une équivalence de I-homotopie stricte de $\mathcal{H}om(p, \mathcal{X}) \circ \mathcal{H}om(i_0, \mathcal{X})$ vers $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}om(I,\mathcal{X})}$. Comme $\mathcal{H}om(i_0, \mathcal{X}) \circ \mathcal{H}om(p, \mathcal{X}) = \mathrm{Id}_{\mathcal{X}}$, le résultat est démontré. □

Corollaire 2.5.9. Pour tout faisceau simplicial $\mathcal{X}$, le morphisme canonique $\mathcal{X} \to \mathrm{Sing}_*^I(\mathcal{X})$ est une I-équivalence faible.

Démonstration. On voit aisément que le i^{e} terme du faisceau simplicial $\mathrm{Sing}_*^I(X)$ est isomorphe à $\mathcal{H}om(I^i, \mathcal{X}_i)$ et que le morphisme canonique $\mathcal{X} \to \mathrm{Sing}_*^I(\mathcal{X})$ coïncide terme à terme avec les morphismes naturels $\mathcal{X}_i \to \mathcal{H}om(I^i, \mathcal{X}_i)$, qui sont des équivalences faibles, d'où le résultat. □

Il reste à voir que le foncteur Sing_*^I préserve les I-fibrations. Pour cela, nous allons construire à un adjoint à gauche de Sing_*^I dont nous montrerons qu'il préserve les cofibrations et les I-équivalences faibles.

Pour tout objet cosimplicial $D^\bullet$ de $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$, et tout faisceau simplicial $\mathcal{X}$, on note $|\mathcal{X}|_{D^\bullet}$ la cofin (cf. [MacL]) du foncteur $\begin{array}{ccc} \Delta^{\mathrm{op}} \times \Delta & \to & \mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T} \\ (\underline{n}, \underline{m}) & \mapsto & \mathcal{X}_n \times D^m \end{array}$. Il est clair qu'un morphisme d'objets cosimpliciaux $D^\bullet \to D'^\bullet$ induit un morphisme de foncteurs de réalisation $|-|_{D^\bullet} \to |-|_{D'^\bullet}$. On vérifie alors que le foncteur $|-|_{\Delta^\bullet \times \Delta_I^\bullet}$ est adjoint à gauche du foncteur Sing_*^I.

Proposition 2.5.10. Le foncteur Sing_*^I préserve les I-fibrations.

Démonstration. Il suffit de montrer que $|-|_{\Delta^\bullet \times \Delta_I^\bullet}$, adjoint à gauche de Sing_*^I, préserve les monomorphismes (i.e. les cofibrations) et les I-équivalences faible. Cela fait l'objet des lemmes 2.5.14 et 2.5.15. □

Définition 2.5.11.

- Soit $D^\bullet$ un faisceau simplicial cosimplicial et $n \geqslant 0$. On note ∂D^n le faisceau simplicial $|\partial \Delta^n|_{D^\bullet}$.
- Un faisceau simplicial cosimplicial $D^\bullet$ est dit *non augmentable* si le morphisme $D^0 \sqcup D^0 \to D^1$ induit par les morphismes de cofaces est un monomorphisme.

Remarque 2.5.12. Les faisceaux $\Delta^\bullet$, $\Delta_I^\bullet$ et $\Delta^\bullet \times \Delta_I^\bullet$ sont non augmentables.

Lemme 2.5.13. Soit $D^\bullet$ un faisceau simplicial cosimplicial. Alors les morphismes $\partial D^n \to D^n$ sont des monomorphismes.

Lemme 2.5.14. Pour tout faisceau simplicial cosimplicial non augmentable $D^\bullet$, le foncteur $|-|_{D^\bullet}$ préserve les monomorphismes.

Démonstration. En utilisant le raisonnement du petit objet, il suffit de montrer le résultat pour les monomorphismes de la forme $(\mathcal{X} \times \Delta^n) \sqcup_{\mathcal{X} \times \partial\Delta^n} (\mathcal{Y} \times \Delta^n) \to \mathcal{Y} \times \Delta^n$ où $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ est un monomorphisme de faisceaux simpliciaux de dimension 0. Alors on a $|\mathcal{Y} \times \Delta^n|_{D^\bullet} \simeq \mathcal{Y} \times D^n$ et $|(\mathcal{X} \times \Delta^n) \sqcup_{\mathcal{X} \times \partial\Delta^n} (\mathcal{Y} \times \Delta^n) \to \mathcal{Y} \times \Delta^n|_{D^\bullet} \simeq (\mathcal{X} \times D^n) \sqcup_{\mathcal{X} \times \partial D^n} (\mathcal{Y} \times D^n) \to \mathcal{Y} \times \Delta^n$ □

Lemme 2.5.15. Pour tout faisceau simplicial $\mathcal{X}$, les morphismes $|\mathcal{X}|_{\Delta^\bullet \times \Delta_I^\bullet} \to \mathcal{X}$ et $|\mathcal{X}|_{\Delta^\bullet \times \Delta_I^\bullet} \to |\mathcal{X}|_{\Delta_I^\bullet}$ induits par $\Delta^\bullet \times \Delta_I^\bullet \to \Delta^\bullet$ et $\Delta^\bullet \times \Delta_I^\bullet \to \Delta_I^\bullet$ sont des I-équivalences faibles.

Démonstration. Les deux cas se traitent similairement. Nous traiterons le premier. Il s'agit de se ramener par le raisonnement du petit objet et des propriétés élémentaires des I-équivalence faibles vis-à-vis des colimites (voir [MV, lemme 2.11 et corollaire 2.13]) au cas où $\mathcal{X}$ s'écrit $\mathcal{Y} \times \Delta^n$ avec $\mathcal{Y}$ de dimension simpliciale 0 et $n \geqslant 0$. Alors $|\mathcal{Y} \times \Delta^n| \to \mathcal{Y} \times \Delta^n$ est isomorphe à la projection $\mathcal{Y} \times \Delta^n \times \Delta^n_I \to \mathcal{Y} \times \Delta^n$ qui est une I-équivalence faible ([MV, lemme 2.15]). □

2.6 Fonctorialité

Nous nous intéressons maintenant à la fonctorialité des catégories homotopiques de sites avec intervalle. La première remarque fondamentale est que l'on ne peut se limiter aux morphismes de sites (ceux induisant des morphismes de topos) ; par exemple, le foncteur d'inclusion $Sm_t/S \to Sch_t/X$ est une application continue qui n'est pas un morphisme de sites (le morphisme d'image inverse induit ne commute pas aux limites projectives finies) ; pourtant, c'est un foncteur géométriquement intéressant, qu'on ne peut pas se permettre d'occulter de notre étude. Nous allons donc définir la notion d'application *raisonnable* entre sites, qui n'induit pas nécessairement un morphisme de topos, mais qui fournit une fonctorialité suffisante au niveau homotopique.

Nous commençons par rappeler le résultat de fonctorialité concernant les morphismes de sites.

Proposition 2.6.1. Soit $f : T \to T'$ un morphisme de sites. Alors le foncteur f^* préserve les équivalences faibles et le foncteur qu'il induit entre les catégories homotopiques est l'adjoint à gauche du foncteur $\mathrm{R}f_*$. Si $g : T' \to T''$ est un morphisme de sites, alors la transformation naturelle canonique $\mathrm{R}(g \circ f)_* \to \mathrm{R}g_* \circ \mathrm{R}f_*$ est un isomorphisme.

Définition 2.6.2. Soit $f : T \to T'$ une application continue entre sites. Un faisceau simplicial $\mathcal{Y}$ sur T' est dit *f-admissible* si pour tout faisceau simplicial fibrant $\mathcal{X}$ sur T et tout ensemble simplicial K, l'application

$$\pi(\mathcal{Y} \times K, f_*(\mathcal{X})) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}_s(T')}(\mathcal{Y} \times K, f_*(\mathcal{X}))$$

est bijective.

On dit que T' *possède suffisamment de f-admissibles* s'il existe un foncteur $ad_f : \mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T'} \to \mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T'}$ et une transformation naturelle $ad_f \to \mathrm{Id}$ tels que l'image de ad_f soit constituée d'objets f-admissibles et que pour tout faisceau simplicial $\mathcal{Y}$ sur T', la flèche $ad_f(\mathcal{Y}) \to \mathcal{Y}$ soit une équivalence faible. On dit que $(ad_f, ad_f \to \mathrm{Id})$ est une *résolution f-admissible.*

Définition 2.6.3. On dit qu'une application continue $f : T \to T'$ est *raisonnable* si tout faisceau représentable sur T' est f-admissible.

Proposition 2.6.4. Soit $f : T \to T'$ et $g : T' \to T''$ deux applications continues raisonnables. Alors on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(g \circ f)^* &\simeq \mathrm{L}f^* \circ \mathrm{L}g^* \\ \mathrm{R}(g \circ f)_* &\simeq \mathrm{R}g_* \circ \mathrm{R}f_* \end{aligned}$$

Lemme 2.6.5. Soit (T, I) et (T', I') deux sites avec intervalle et $f : T \to T'$ une application raisonnable. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\mathrm{R}f_*$ envoie objets I-locaux sur objets I'-locaux.
- $\mathrm{L}f^*$ envoie I'-équivalences faibles sur I-équivalences faibles.
- pour tout faisceau simplicial $\mathcal{X}$ sur T' le morphisme $\mathrm{L}f^*(\mathcal{X} \times I') \to \mathrm{L}f^*(\mathcal{X})$ est une I-équivalence faible.

Définition 2.6.6. Une application entre sites avec intervalle est dite *raisonnable* s'il s'agit d'une application continue raisonnable satisfaisant les conditions équivalentes du lemme précédent.

Étant donné une application raisonnable $f : T \to T'$ entre sites avec intervalles, le foncteur $\mathrm{L}f^*$ induit un foncteur au des catégories I-localisée $\mathrm{L}_I\, f^*$: $\mathrm{Ho}(T', I') \to \mathrm{Ho}(T, I)$. Le foncteur $\mathrm{R}f^*$ induit quant à lui un foncteur $\mathrm{R}^I\, f_*$: $\mathrm{Ho}(T, I) \to \mathrm{Ho}(T', I')$. En utilisant le lemme précédent et le lemme 2.6.4, on obtient le résultat suivant.

Proposition 2.6.7. Soit $f : T \to T'$ une application continue raisonnable de sites avec intervalles. Alors le foncteur $\mathrm{L}_I\, f^* : \mathrm{Ho}(T', I') \to \mathrm{Ho}(T, I)$ est adjoint à gauche du foncteur $\mathrm{R}^I\, f_* : \mathrm{Ho}(T, I) \to \mathrm{Ho}(T', I')$. De plus, si $g : T' \to T''$ est une application continue raisonnable entre sites avec intervalles, on a des isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_I(g \circ f)^* &\simeq \mathrm{L}_I\, f^* \circ \mathrm{L}_I\, g^* \\ \mathrm{R}^I(g \circ f)_* &\simeq \mathrm{R}^I\, g_* \circ \mathrm{R}^I\, f_* \end{aligned}$$

Chapitre 3

Un exemple topologique

Dans ce chapitre, on se propose de démontrer que la catégorie homotopique d'un site T de variétés topologiques contractiles muni d'un intervalle contractile est, sous quelques hypothèses, la catégorie homotopique usuelle. Ce résultat implique en particulier que la catégorie homotopique du site $\mathcal{V}$ des variétés différentielles muni de l'intervalle $\mathbb{R}$, ou encore du site $\mathcal{A}n$ des variétés analytiques muni pour intervalle du disque unité ouvert, est, comme l'on pouvait s'y attendre, la catégorie homotopique usuelle. Nous référons le lecteur à [JR07] dont nous suivons la preuve.

Pour cela, nous commencons par énoncer deux résultats importants.

Définition 3.0.8 (Faisceaux acycliques). Soit F un (pré-)faisceau sur un site $\mathcal{T}$. On dit que F est acyclique si pour tout X de $\mathcal{T}$, le morphisme évident $F(X) \to \mathrm{R}\Gamma(X; F)$ est un isomorphisme dans $\mathcal{H}^{top}$. ($\mathrm{R}\Gamma(X; -) : \mathrm{Ho}_s(T) \to \mathcal{H}^{top}$ étant évidemment le foncteur dérivé total à droite du foncteur «sections sur X» $\Gamma : F \mapsto F(X)$).

Théorème 3.0.9. Soit F un préfaisceau simplicial sur un site $\mathcal{T}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- F est acyclique.
- pour tout X de $\mathcal{T}$ et tout hyper-recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, la flèche

$$F(X) \to \mathrm{R} \varinjlim_{n \in \Delta} F(\mathcal{U}_n)$$

  est un isomorphisme dans $\mathcal{H}^{top}$.

Démonstration. C'est un corollaire de [DHI, théorème 1.1]. □

Théorème 3.0.10. Soit X un espace topologique, $\mathcal{U}$ un hyper-recouvrement ouvert de X. Alors, l'application

$$\mathrm{ho}\varinjlim \mathrm{Sing}\, \mathcal{U}_n \to \mathrm{Sing}\ X$$

est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux.

Démonstration. [DI, théorème 1.3] □

Nous pouvons maintenant aborder la preuve du résultat énoncé ci-dessus. On se donne donc un site T qui est une sous-catégorie de la catégorie des espaces topologiques localement contractiles et un intervalle I de T, ces données vérifiant les hypothèses suivantes :

- tout objet de T est recouvert par des objets I-contractiles.
- I a le type d'homotopie du point.

– l'inclusion $T \to \mathbf{Top}$ commute aux produits fibrés, de sorte qu'elle induise un morphisme de topos.
– pour tout X de T et tout ouvert U de X, l'inclusion $U \to X$ est un morphisme de T.

On considère alors le morphisme de site évident $p : T \to \bullet$ qui induit un morphisme de topos $(p^*, p_*) : \mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T} \to \mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns$, où les foncteurs p^* et p_* sont respectivement le foncteur «faisceau constant», et le foncteur «section globales», i.e. $\mathrm{Hom}(1, -)$.

La preuve que nous donnons utilise de manière essentielle la proposition suivante :

Proposition 3.0.11. Pour tout ensemble simplicial K, le faisceau p^*K est I-local.

Démonstration. Il s'agit de voir que pour tout objet X de T, le morphisme $\mathrm{R}\Gamma(X; K) \to \mathrm{R}\Gamma(X \times I, K)$ est un isomorphisme dans $\mathcal{H}^{top}$. On sait déjà que $\mathrm{Sing}\, X \to \mathrm{Sing}\,(X \times I)$ est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux[1]. Il suffit donc de montrer que le morphisme $\mathrm{R}\Gamma(X; K) \to \mathrm{R}\mathbf{hom}(\mathrm{Sing}\, X, K)$ canonique est un isomorphisme. Cela fait l'objet du lemme suivant :

Lemme 3.0.12. Soit X un espace topologique localement contractile et K un ensemble simplicial. On a un isomorphisme $\mathrm{R}\Gamma(X; K) \to \mathrm{R}\mathbf{hom}(\mathrm{Sing}\, X, K)$ canonique.

Démonstration. Notons d'abord que l'on peut supposer K fibrant. On considère alors, pour tout ouvert U de X l'application $K \mapsto \mathbf{hom}(\mathrm{Sing}\, U, K)$, qui définit un morphisme de préfaisceaux simpliciaux. X étant localement contractile, ce morphisme est une équivalence faible locale. Il suffit alors de voir que K étant fibrant, le préfaisceau $\mathbf{hom}(\mathrm{Sing}\, -, K)$ est acyclique, ce qui résulte du fait qu'il est équivalent pour un préfaisceau simplicial F sur T d'être acyclique ou que $F_{|X}$ soit acyclique pour tout X de T, cette équivalence provenant des théorèmes 3.0.9 et 3.0.10, ainsi que du fait que pour un faisceau simplicial X, $\mathrm{hol}\varinjlim \mathcal{X}_n \simeq \mathcal{X}$ dans la catégorie homotopique. □

Ceci achève la preuve de la proposition 3.0.11 □

Les deux lemmes suivants nous seront utiles pour conclure.

Lemme 3.0.13. Soit $\mathcal{F}$ un objet I-local dans $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$. Alors la flèche naturelle $p^*p_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ est une équivalence faible.

Démonstration. Le faisceau $p^*p_*\mathcal{F}$ est I-local, et $\mathcal{F}$ également, par hypothèse, le topos $\widetilde{T}$ étant connexe. Le lemme 3.0.14 permet de conclure, le morphisme $p_*p^*p_*\mathcal{F} \to p_*\mathcal{F}$ étant un isomorphisme. □

Lemme 3.0.14. Soit $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morphisme dans $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$ entre objets I-locaux. On suppose que $p_*\mathcal{F} \to p_*\mathcal{G}$ est une équivalence faible. Alors $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est une équivalence faible.

[1] on commet l'abus de notation usuel de noter de la même façon l'ensemble simplicial K et le faisceau constant qui lui est associé.

Démonstration. On peut comme d'habitude supposer $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ fibrants. Comme $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont I-locaux, pour tout X tel que $X \to \bullet$ soit une équivalence faible, $\mathcal{F}(\bullet) \to \mathcal{F}(X)$ est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux. $\mathcal{F}(\bullet) \to \mathcal{G}(\bullet)$ est une équivalence faible par hypothèse, donc $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$ l'est également. Enfin, si X est contractile, $X \to \bullet$ est une équivalence faible, et comme ici X est localement contractile, on obtient le résultat. □

On peut maintenant démontrer le théorème attendu.

Théorème 3.0.15. Le foncteur «faisceau constant» $p^* : \mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns \to \mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$ induit une équivalence de catégories $\mathcal{H}^{top} \to \mathrm{Ho}(T, I)$.

Démonstration. Au niveau des catégories homotopiques, le foncteur p^* possède un adjoint à droite $\mathrm{R}^I\, p_* : \mathrm{Ho}(T, I) \to \mathcal{H}^{top}$. On a un isomorphisme canonique $K \simeq p_*p^*K$. Par ailleurs, comme p_* envoie les I-équivalences faibles entre objets I-locaux sur des équivalences faibles simpliciales, $\mathrm{R}^I\, p_*$ se calcule en prenant un remplacement I-local. L'image de p^* étant formée d'objets I-locaux, on en déduit un isomorphisme $p_*p^*K \simeq \mathrm{R}^I\, p_*p^*K$, d'où l'isomorphisme $\mathrm{id}_{\mathcal{H}^{top}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^I\, p_*p^*$. Le lemme 3.0.13 implique immédiatement que l'autre morphisme d'adjonction, $p^*\,\mathrm{R}^I\, p_* \to \mathrm{id}_{\mathrm{Ho}(T,I)}$ est un isomorphisme. □

Chapitre 4

Classification des torseurs

Dans ce chapitre, nous allons définir $H^1(-, G)$ où G est un groupe non nécessairement abélien, et montrer que pour tout objet U d'un site T, $H^1(U, G)$ classifie les G-torseurs sur U. Puis nous verrons comment calculer explicitement ce H^1 à l'aide de la cohomologie de Čech, et esquisserons comment montrer sa représentabilité dans la catégorie homotopique. On se fixe pour le chapitre un site T. Nous renvoyons le lecteur à [MV] et [GJ] pour le lien entre la cohomologie non-abélienne et l'homotopie, et à [G71] pour la théorie générale, qui est suffisante une fois établi le lien entre les hyper-recouvrements dans T, les fibrations triviales locales et le calcul des Hom dans la catégorie homotopique. Nous travaillerons uniquement avec des torseurs à droite, mais il va de soi que tout peut-être fait similairement avec des torseurs à gauche.

4.1 Généralités

Définition 4.1.1. Soit $G \in \widetilde{T}$. Une action à droite de G sur $X \in \widetilde{T}$ est un morphisme $a : X \times G \to X$ de sorte que les diagrammes usuels traduisant les axiomes d'une action de groupe commutent. Une action à droite est dite *libre* si le morphisme $X \times G \to X \times X$, $(x, g) \mapsto (a(x, g), x)$ est mono. Étant donné une action à droite de G sur X, on définit le quotient X/G comme le conoyau de la projection $X \times G \to X$ et de l'action.

Pour $G \in \widetilde{T}$ un faisceau de groupes, on note $\widetilde{T}_G$ la catégorie des G-espaces, c'est à dire des faisceaux munis d'une action à droite de G. Dans la suite, nous ne préciserons plus que les actions considérées sont des actions à droite.

Définition 4.1.2. Si X est un faisceau muni d'une action à droite d'un faisceau en groupe G, on définit le *symétrique* de X de manière usuelle.

Définition 4.1.3. Soit X un objet de $\widetilde{T}$. On appelle *G-pseudo-torseur de $\widetilde{T}$ sur X* la donnée d'un faisceau $Y \in \widetilde{T}_G$ tel que l'action de G sur Y soit libre et que la flèche naturelle $Y/G \to X$ soit un isomorphisme. On dit que Y est un *G-torseur de $\widetilde{T}$ sur X* si de plus Y est muni d'un épimorphisme $Y \to X$.

On appelle *torseur de $\widetilde{T}$* un torseur de $\widetilde{T}$ sur l'objet final $\bullet$ de $\widetilde{T}$. Ainsi, un torseur de $\widetilde{T}$ sur un objet X n'est autre qu'un torseur de $\widetilde{T}/X$.

On note G_d le *torseur trivial* obtenu en faisant agir G sur lui-même par translations à droite. En vertu du lemme 4.1.8, il s'agit bien d'un torseur de $\widetilde{T}$ car il admet une section $\bullet \to G_d$.

Définition 4.1.4. Soient $X \to S$ et $Y \to S$ deux G-torseurs sur S. Un morphisme de G-torseurs $X \to Y$ est un morphisme de X vers Y au dessus de S, c'est à dire un morphisme $X \to Y$ commutant à l'action de G.

Proposition 4.1.5. Tout morphisme $u : X \to Y$ de G-torseurs sur $S \in \widetilde{T}$ est un isomorphisme.

Démonstration. Soit $U = \bigsqcup U_i \to S$ rend un recouvrement de S qui trivialise X et Y. La restriction de u à chacun des U_i est alors un endomorphisme équivariant de G, donc est inversible. On les recolle ensuite en un isomorphisme. □

Proposition 4.1.6. Soit $f : \widetilde{T} \to \widetilde{T}'$ un morphisme de topos. Alors f^* envoie torseurs sur $\widetilde{T}'$ en torseurs sur $\widetilde{T}$.

Démonstration. C'est immédiat car f^* commute aux limites inductives donc envoie épimorphismes sur épimorphismes et aux limites projectives finies donc envoie les objets sur lesquels opère G sur des objets sur lesquels opère f^*G. □

La proposition suivante est immédiate.

Proposition 4.1.7. Soit G un groupe de $\widetilde{T}$, X un G-objet de $\widetilde{T}$ et e la section unité de G. On a alors :

- le morphisme $\pi : \mathrm{Hom}_G(G_d, X) \to X$, $m \mapsto m(e)$, où $\mathrm{Hom}_G(-,-)$ désigne les morphismes de G-objets de $\widetilde{T}$, est un isomorphisme
- on a une bijection canonique $\mathrm{Hom}_G(G_d, X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\bullet, X)$, $m \mapsto m \circ e$.
- Si $X = G_d$, le morphisme π ci-dessus est un isomorphisme de groupes $\mathrm{Aut}_G(G_d) = \mathrm{Hom}_G(G_d, G_d) \xrightarrow{\sim} G$ dont l'inverse est donné par les translations à gauche.

Lemme 4.1.8. Soit X un objet de $\widetilde{T}$ et G un X-groupe de $\widetilde{T}$. Un G-pseudo-torseur Y sur X est trivial si et seulement s'il admet une section. De plus, un G-objet Y est un torseur si et seulement s'il est localement trivial.

Démonstration. La première assertion découle aisément du deuxième isomorphisme de la proposition précédente. La deuxième découle du fait qu'il est équivalent dans $\widetilde{T}$ d'être un épimorphisme et d'admettre localement une section. □

Étant donné un morphisme $u : G \to H$ de faisceaux de groupes et un G-torseur, on souhaite définir un H-torseur par extension. Cela fait l'objet des définitions et propositions suivantes.

Définition 4.1.9. Soit G un groupe dans $\widetilde{T}$, X et Y deux G-objets respectivement à droite et à gauche dans $\widetilde{T}$. On note $X \wedge^G Y$ et on appelle *produit contracté* le quotient de $X \times Y$ par G opérant diagonalement, i.e. $X \times Y \times G \to X \times Y$, $(x, y, g) \mapsto (xg, g^{-1}y)$. Les limites inductives quelconques existant dans $\widetilde{T}$, le produit contracté existe et représente le foncteur $Z \mapsto \mathrm{Hom}(X \times Y, Z)^G$, où $\mathrm{Hom}(A, B)^G$ désigne les éléments de $\mathrm{Hom}(A, B)$ invariants par G.

Il est clair que le produit contracté est associatif.

Proposition 4.1.10. Soit $u : G \to H$ un morphisme de groupes dans $\widetilde{T}$ et X un G-objet de $\widetilde{T}$. On définit le morphisme $Xu : X \to {}^uX = X \wedge^G H_d$ comme le composé

$$X \xrightarrow{(\mathrm{id}_X, e)} X \times H_d \longrightarrow X \wedge^G H_d$$

e désignant la section unité de H et $X \wedge^G H_d$ étant obtenu en faisant opérer G par translation à gauche sur H_d.

Alors, Xu est un u-morphisme (i.e. commute à l'action de G).

Démonstration. Cela résulte simplement de la propriété universelle définissant $X \wedge^G H_d$. $\square$

Le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 4.1.11. Soit $u : G \to H$ un morphisme de groupes dans $\widetilde{T}$ et X un G-torseur de $\widetilde{T}$. Alors $X \wedge^G H_d$ est un H-torseur de $\widetilde{T}$.

Nous définissons maintenant $H^0(T, G)$ et $H^1(T, G)$.

Définition 4.1.12. Soit $G \in \widetilde{T}$ un faisceau de groupes. On pose $H^0(T, G) = \varprojlim G$ où la limite projective est indexée par la classe des morphismes de but G. $H^0(G)$ est alors canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}(\bullet, G)$, $\bullet$ désignant évidemment le faisceau final dans $\widetilde{T}$. $H^0(T, -)$ est clairement un foncteur $\mathbf{Grp}_{\widetilde{T}} \to \mathcal{E}ns$.

Définition 4.1.13. Soit $G \in \widetilde{T}$ un faisceau de groupes. On définit $H^1(T, G)$ comme l'ensemble des classes d'isomorphismes de G-torseurs de $\widetilde{T}$ pointé par la classe du torseur trivial G_d, appelée *classe unité*. Si $u : G \to H$ est un morphisme de faisceaux de groupes, le foncteur d'extension du groupe structural induit un morphisme $H^1(T, G) \to H^1(T, H)$, ce qui fait de $H^1(T, -)$ un foncteur de la catégorie des faisceaux en groupes vers la catégorie des ensembles pointés.

Définition 4.1.14. Soit U un objet de T, G un faisceau de groupes sur T. On pose :

$$\begin{array}{rcl} H^0(T_{|U}, G) & = & H^0(T_{|U}, G_{|U}) \simeq \mathrm{Hom}_{\widetilde{T}}(U, G) \\ H^1(T_{|U}, G) & = & H^1(T_{|U}, G_{|U}) \end{array}$$

où $T_{|U}$ est muni de la topologie induite et $G_{|U}$ désigne la restriction de G à U.

Remarque 4.1.15. Si $f : U \to V$ est une flèche de T, le morphisme de topos $\widetilde{T}/V \to \widetilde{T}/U$ induit une application $H^1(T_{|V}, G) = H^1(T_{|U}, G)$. Une classe d'un G-torseur X sur V de $\widetilde{T}$ est envoyée sur la classe du G-torseur sur U de $\widetilde{T}$ obtenu par le changement de base $U \to V$.

On définit alors (T etant sous-entendu) le *préfaisceau d'ensembles pointés* $\mathbf{H}^1(-; G)$ par $H^1(U, G) = H^1(T_{|U}, G)$; par suite, en associant à un G-torseur X sur T ses restrictions à $T_{|U}$ pour tout U, on définit une application $H^1(T, G) \to \varprojlim \mathbf{H}^1(G)$, qui est bijective si T admet un objet final.

4.2 Cohomologie de Čech

Dans cette section, on montre que l'on peut calculer le H^1 non-abélien à l'aide d'hyper-recouvrements à la Čech, et on en déduit la représentabilité du H^1 dans la catégorie homotopique. On supposera que le site T choisi admet les produits fibrés finis.

Définition 4.2.1. Soit $\mathbf{U} = \{U_i \to U\}_{i \in I}$ une famille couvrante dans T et G un faisceau de groupes sur T. On note $U_{ij} = U_i \times_U U_j$.

- on appelle 1-*cocycle de* $\mathbf{U}$ *à valeurs dans* G une famille $u_{ij} \in G(U_{ij})$ telle que l'on ait (dans $G(U_{ijk})$) $u_i{}^j{}_k = u^k_{ij}.u^i_{jk}$

– on dit que deux cocycles u_{ij} et v_{ij} sont *cohomologues* s'il existe une famille $g_i \in G(U_i), i \in I$ telle que l'on ait (dans $G(U_{ij})$) $v_{ij} = {g_i}^j.u_{ij}({g^i}_j)^{-1}$
– on note $H^1(\mathbf{U}, G)$ l'ensemble des classes de 1-cocycles à cohomologie près, pointé par la classe du cocycle unité.

On note $u_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}{}^{i_k}{}_{i_{k+1}\ldots i_n}$ l'image de $u_{i_1\ldots i_n}$ par la projection évidente.

Si R est un raffinement d'un objet U de T, on note $H^1(T_{|U}, G)^R$ l'ensemble des classes à isomorphisme près de G-torseurs sur U trivialisés par tous les changements de base par des morphismes de R. Il est évident que $H^1(T_{|U}, G)^R \subset H^1(T_{|U}, G)$ et comme tout G-torseur est localement trivial, on a également

$$H^1(T_{|U}, G) = \bigsqcup_{R \in J(U)} H^1(T_{|U}, G)^R$$

(où $J(U)$ désigne conformément à la notation de [SGA4] l'ensemble des raffinements de U).

Le théorème suivant forme le coeur technique de cette section.

Théorème 4.2.2. Soit $\mathbf{U} = \{U_i \to U\}_{i\in I}$ une famille couvrante dans T, G un faisceau de groupes sur T, et R le raffinement engendré par $\mathbf{U}$. Alors, on a une bijection naturelle

$$i_{\mathbf{U}} : H^1(T_{|U}, G)^R \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbf{U}, G)$$

définie en envoyant un G-torseur X sur U muni de sections $x_i \in G(U_i)$ sur le 1-cocycle défini par $x_i^j.u_{ij} = p_j^i$. Qui plus est, cette bijection respecte le point marqué.

Démonstration. Exhibons la bijection inverse. On note $Z^1(\mathbf{U}, G)$ l'ensemble des 1-cocycles de $\mathbf{U}$ à valeur dans G, et on pose $C^0(\mathbf{U}, G) = \prod_{i\in I} G(U_i)$. On considère alors l'application $f : C^0(\mathbf{U}, G) \to Z^1(\mathbf{U}, G)$ définie par $f(g)_{ij} = ({g_i}^j)^{-1}.{g^i}_j$, qui induit un morphisme de faisceaux $\mathbf{f} : \mathbf{C}^0(\mathbf{U}, G) \to \mathbf{Z}^1(\mathbf{U}, G)$. Notons que l'on a un monomorphisme $G_{|U} \to \mathbf{C}^0(\mathbf{U}, G)$; on fait alors opérer $G_{|U}$ sur $\mathbf{C}^0(\mathbf{U}, G)$ par translations à gauche. $\mathbf{f}$ induit un isomorphisme $G_{|U}\backslash\mathbf{C}^0(\mathbf{U}, G) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}^1(\mathbf{U}, G)$.

On définit enfin $j_{\mathbf{U}} : H^1(\mathbf{U}, G) \to H^1(T_{|U}, G)$ en envoyant un cocycle sur la classe de son image inverse par $\mathbf{f}$. C'est un monomorphisme d'ensembles pointés, dont l'image est en fait par construction $H^1(T_{|U}, G)^R$, et qui fournit l'inverse de $i_{\mathbf{U}}$ attendu. □

En réalité $H^1(\mathbf{U}, G)$ ne dépend, du moins à isomorphisme canonique près, que du raffinement engendré par $\mathbf{U}$ (voir [G71, III 3.6.4.1]). Nous expliquons maintenant dans les grandes lignes comment réaliser $H^1(T_{|U}, G)$ comme limite inductive des $\check{H}^1$ «à la Čech». Pour plus de détails, nous renvoyons encore une fois le lecteur à [G71].

On se donne $\mathbf{U} = (U_i)_{i\in I}$ et $\mathbf{U}' = (U'_j)_{j\in J}$ deux familles couvrant U. On définit un *morphisme de familles couvrantes* $\mathbf{f} : \mathbf{U}' \to \mathbf{U}$ comme la donné d'une application $f : J \to I$ et de U-morphismes $f_j : U'_j \to U_{f(j)}$. On a un morphisme

$$H^1(\mathbf{f}, G) : H^1(\mathbf{U}, G) \to H^1(\mathbf{U}', G)$$

induit par les f_{ij}.

On note alors R le raffinement de U engendré par $\mathbf{U}$ et R' celui engendré par $\mathbf{U}'$. On a $R' \subset R$, et l'isomorphisme $j_{\mathbf{U}}$ permet d'identifier $H^1(\mathbf{f}, G)$ à l'inclusion

$$H^1(T_{|U}, G)^R \subset H^1(T_{|U}, G)^{R'}$$

$H^1(\mathbf{f}, G)$ est donc injective, et ne dépend pas de $\mathbf{f}$ (mais seulement des raffinements R et R') ; par ailleurs, si $R = R'$, il s'agit d'un isomorphisme.

Finalement, on pose

$$\check{H}^1(T_{|U}, G) = \varinjlim H^1(\mathbf{U}, G)$$

où la limite inductive est indexée sur toutes les familles couvrant U. On a alors un isomorphisme canonique induit par les $j_{\mathbf{U}}$:

$$\check{H}^1(T_{|U}, G) \xrightarrow{\sim} H^1(T_{|U}, G)$$

.

Le théorème suivant nous indique qu'il est raisonnable de voir le H^1 tel qu'on l'a défini comme un foncteur de cohomologie.

Théorème 4.2.3. Soit $1 \to A \to B \to C \to 1$ une suite exacte de faisceaux de groupes. La suite d'ensembles pointés :

$$1 \to H^0(A) \to H^0(B) \to H^0(C) \to H^1(A) \to H^1(B) \to H^1(C)$$

est exacte (la flèche $H^0(C) \to H^1(C)$ étant obtenu en associant à une section de $C = B/A$ la classe de son image inverse par le morphisme $B \to B/A$).

Démonstration. Voir [G71, chapitre III, proposition 3.3.1]. □

4.3 Représentabilité de $H^1(-,G)$ dans $\mathrm{Ho}(T)$

Dans cette section, nous esquissons comment montrer que le foncteur $H^1(-,G)$: $\widetilde{T}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{E}ns_\bullet$ ($\mathcal{E}ns_\bullet$ désignant la catégorie des ensembles pointés) est représentable dans la catégorie homotopique de T. L'argument essentiel réside dans le fait que les Hom dans $\mathrm{Ho}(T)$ peuvent être calculés *via* des limites inductives d'hyper-recouvrements dans T ; on adoptera toutefois ici le langage des fibrations triviales locales, qui correspondent aux hyper-recouvrements (voir par exemple [DHI]). On supposera encore une fois que le site T admet suffisamment de points.

Définition 4.3.1. Un morphisme $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ de faisceaux simpliciaux sur T est une *fibration locale* (resp. une *fibration triviale locale*) si pour tout point x de T, le morphisme $x^*f : x^*\mathcal{X} \to x^*\mathcal{Y}$ est une fibration de Kan (resp. une fibration de Kan triviale), i.e., pour tout $k \leqslant n$ et tout diagramme :

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r] \arrow[d] & x^*\mathcal{X} \arrow[d] \\ \Delta_n \arrow[r] & x^*\mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

on ait un relèvement $\Delta_n \to x^*\mathcal{X}$ (resp. et f est de plus une équivalence faible). Un objet $\mathcal{X}$ de $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$ est dit *localement fibrant* si $\mathcal{X} \to \bullet$ est une fibration locale.

Les deux résultats suivants font le lien entre les Hom homotopiques et les fibrations locales triviales.

Lemme 4.3.2. Soit $\mathcal{X} \in \mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$. La catégorie $\pi\mathrm{Triv}/\mathcal{X}$ des fibrations locales vers $\mathcal{X}$ est essentiellement petite.

Démonstration. Voir [MV, lemme 1.12 pp. 8-9]. □

Proposition 4.3.3. Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ des faisceaux simpliciaux sur T, avec $\mathcal{Y}$ localement fibrant. Alors la flèche canonique :

$$\varinjlim_{\mathcal{X}'\to\mathcal{X}\in\pi\mathrm{Triv}/\mathcal{X}} \pi(\mathcal{X}',\mathcal{Y}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(T)}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Voir [Jar, p. 55]. □

Définition 4.3.4. Soit G un faisceau de groupes sur T. On définit le faisceau simplicial $\mathrm{E}G$ par $(\mathrm{E}G)_n = G^{n+1}$, les morphismes de face étant induits par les projections et les morphismes de dégénérescence par les diagonales. $\mathrm{E}G$ est naturellement muni d'une action de G, et on appelle *espace classifiant de* G, que l'on note $\mathrm{B}G$, le quotient $\mathrm{E}G/G$.

Lemme 4.3.5. Le faisceau $\mathrm{B}G$ est fibrant.

Proposition 4.3.6. Soit G un faisceau de groupes et $\mathcal{E}$ un G-torseur sur un faisceau X de $\widetilde{T}$. Alors il existe une fibration triviale locale $Y \to X$ et un morphisme $Y \to \mathrm{B}G$ tel que le pullback de $\mathcal{E}$ sur Y soit isomorphe à celui de $\mathrm{E}G$ sur Y.

Démonstration. On se donne un recouvrement $\mathbf{U} = \{U_i \to X\}$ de X et un 1-cocycle sur $\mathbf{U}$ qui représente $\mathcal{E}$. On a un épimorphisme de faisceaux $\mathcal{U} = \coprod U_i \to X$ qui détermine un complexe de Čech $\check{C}(\mathcal{U})_n = \underbrace{\mathcal{U}\times_X \ldots \times_X \mathcal{U}}_{n+1 \text{ fois}}$. Se donner un morphisme de $\check{C}(\mathcal{U})$ dans $\mathrm{B}G$ revient à se donner un 1-cocyle sur $\mathcal{U}$ et réciproquement (car $\mathrm{B}G$ est entièrement déterminé par sa structure simpliciale tronquée en dimension 2 : $\bullet \leftleftarrows G \overset{\longleftarrow}{\underset{\longleftarrow}{\longleftarrow}} G\times G$). Par ailleurs, on remarque que $\Pi_0(\check{C}(\mathcal{U})) = X$. On pose pour la suite de la preuve $Y = \check{C}(\mathcal{U})$ (ce qui est cohérent avec les notations de l'énoncé du lemme puisqu'un tel complexe de Čech est un hyper-recouvrement et donc une fibration locale triviale), et on considère le diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd} Y\times_{\mathrm{B}G}\mathrm{E}G \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{E}G \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & \mathrm{B}G \end{tikzcd}$$

Le lemme suivant permet alors de conclure. □

Lemme 4.3.7. Soit $\mathcal{E}'$ un G-torseur sur Y. On a alors le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}' \arrow[r] \arrow[d] & \Pi_0(\mathcal{E}') \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & \Pi_0(Y) = X \end{tikzcd}$$

et $\Pi_0(\mathcal{E}')$ est un G-torseur sur X.

Démonstration. L'argument est local, on peut donc raisonner point par point, et on est alors ramené au cas du topos ponctuel. On a $\coprod_{x\in X} Y_x = Y$. Le morphisme $Y_x \to \{x\} = \bullet$ est une fibration triviale. On peut donc supposer que $X = \bullet$. $\mathcal{E}'$ est alors un torseur sur Y qui est contractile, donc $\Pi_1(Y) = \bullet$. Ainsi, tout revêtement de Y admet une section, et donc $\mathcal{E}'$ est le torseur trivial. Le foncteur Π_0 commute aux produits, d'où le diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}' = G \times Y \arrow[r] \arrow[d] & \Pi_0(G) \times \Pi_0(Y) = G \times \Pi_0(Y) \arrow[d] \\
Y \arrow[r] & \Pi_0(Y)
\end{tikzcd}$$

où $G \times Y$ n'est autre que $\coprod_{g\in G} Y$, ce qui prouve le résultat. □

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème central de ce chapitre.

Théorème 4.3.8. Soit G un faisceau de groupes, $X \in \widetilde{T}$. Alors le morphisme naturel $H^1(X,G) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(T)}(X, \mathrm{B}G)$ est un isomorphisme.

Démonstration. Récapitulons la situation ; on a $H^1(X,G) = \varinjlim_{J(X)} \pi(\check{C}(\mathcal{U}), \mathrm{B}G)$, et on a établi que $\check{H}^1(X,G) \simeq H^1(X,G)$. Les recouvrements formant une sous-catégorie pleine des hyper-recouvrements, on obtient une flèche naturelle

$$\check{H}^1(X,G) \to \varinjlim_{Y\in \mathrm{HR}(X)} \pi(Y, \mathrm{B}G)$$

Le membre de droite est isomorphe à $\mathrm{Hom}_{Ho(T)}(X, \mathrm{B}G)$ d'après la formule de Verdier ($\mathrm{B}G$ étant fibrant). Si on se donne un morphisme $X \to \mathrm{B}G$ dans la catégorie homotopique $\mathrm{Ho}(T)$, i.e., d'après la formule de Verdier, un système inductif de classes d'homotopies de flèches $Y_i \to \mathrm{B}G$ où les Y_i sont des hyper-recouvrements de X, on construit un torseur $\mathcal{E}_i$ sur chacun des Y_i en tirant en arrière le torseur universel $\mathrm{E}G \to \mathrm{B}G$ par $Y_i \to \mathrm{B}G$. On obtient par le lemme précédent un torseur $\Pi_0(\mathcal{E}_i)$ sur Y_i, et donc finalement un torseur $\Pi_0(\mathcal{E})$ sur X. On vérifie aisément (par exemple *via* la description en terme de cocycles) que l'application ainsi définie est un isomorphisme. □

Nous concluons ce chapitre sur la représentabilité, sous les hypothèses du chapitre 3, de $H^1(-, \mathrm{B}G)$ dans $\mathrm{Ho}(T, I)$.

Lemme 4.3.9. Soit T un site muni d'un intervalle I et G un faisceau de groupes sur T. Alors $\mathrm{B}G$ est I-local si et seulement si pour tout $X \in T$ on a $H^1(X,G) = H^1(X \times I, G)$.

Démonstration. Immédiat d'après le théorème 4.3.8. □

Ce résultat classique nous sera nécessaire.

Proposition 4.3.10. Soit (T, I) un site avec intervalle vérifiant les hypothèses du chapitre 3. $X \in T$, et G un groupe dans T. Si X est I-contractile, on a

$$H^1(X,G) = H^1(\bullet, G) = 0$$

Démonstration. Voir [SC, exposés 6 à 8bis]. □

Remarque 4.3.11. On prendra bien garde au fait que X et G sont des *variétés* (resp. variété en groupe) et non des faisceaux quelconques.

Théorème 4.3.12. Soit (T, I) un site avec intervalle vérifiant les hypothèses du chapitre 3. Alors le foncteur $H^1(-, G) : \widetilde{T}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{E}ns_\bullet$ est représentable dans la catégorie homotopique $\mathrm{Ho}(T, I)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathrm{B}G$ est I-local. Par le lemme 4.3.9, il suffit de montrer que $H^1(X, G) = H^1(X \times I, G)$. Cela découle de la proposition précédente et du fait que tout objet de $\widetilde{T}$ est recouvert par des objets I-contractiles de T (I étant lui même contractile). □

Bibliographie

[Qui] Daniel G. Quillen, *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics, No. 43, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[GJ] Paul G. Goerss and John F. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, Progress in Mathematics, vol. 174, Birkhäuser Verlag, Basel, 1999, ISBN 3-7643-6064-X.

[Hov] Mark Hovey, *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, ISBN 0-8218-1359-5.

[GZ] P. Gabriel and M. Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967.

[SC] *Séminaire Henri Cartan, tome 2*, École normale supérieure, Unknown Month 1949.

[SGA4] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 1 : Théorie des topos*, Springer-Verlag, Berlin, 1972, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4) ; Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat ; Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269, 270, 305.

[MV] Fabien Morel and Vladimir Voevodsky, $\mathbf{A}^1$*-homotopy theory of schemes*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1999), 45–143 (2001).

[Ill] Luc Illusie, *Complexe cotangent et déformations*, Springer-Verlag, Berlin, 1971, 1972, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 239 & 283.

[Jar] J. F. Jardine, *Simplicial presheaves*, J. Pure Appl. Algebra **47** (1987), 35–87.

[DHI] Daniel Dugger, Sharon Hollander, and Daniel C. Isaksen, *Hypercovers and simplicial presheaves*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **136** (2004), 9–51.

[DI] Daniel Dugger and Daniel C. Isaksen, *Topological hypercovers and* $\mathbb{A}^1$*-realizations*, Math. Z. **246** (2004), 667–689.

[MacL] Saunders MacLane, *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, New York, 1971, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5.

[G71] Jean Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Springer-Verlag, Berlin, 1971, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 179.

[PTJ] Peter T. Johnstone, *Sketches of an elephant : a topos theory compendium. Vol. 1 & 2*, Oxford Logic Guides, vol. 43 & 44, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2002.

[JR07] Joël Riou, *Catégorie homotopique stable d'un site suspendu avec intervalle* (2007), preprint.

[B00] Tibor Beke, *Sheafifiable homotopy model categories. II*, J. Pure Appl. Algebra **164** (2001), 307–324.