Sur le mouvement d'objets en contact

Sam Zoghaib

28 janvier 2009

1 Introduction

Ce rapport, basé sur l'article de John Hopcroft et Gordon Wilfong, « On the motion of objects in contact » démontre que si deux objets admettant des degrés de liberté en translation peuvent être déplacés d'une configuration où ils sont en contact à une autre configuration où ils sont en contact, alors, ils peuvent être déplacés entre les mêmes configurations en gardant le contact durant tout le mouvement ; on est aisément convaincu que ce résultat, bien que non constructif, a une grande importance en planification de mouvement. Toutefois, il faut noter que c'est avant tout un résultat de mathématiques. Ceci devrait apparaitre clairement à la lecture des énoncés : les notions d'objets, de configuration, de chemin, seront définies de manière assez précise dans un cadre de topologie de $\mathbb{R}^n$. Néanmoins, les hypothèses effectuées sur la nature des objets font que ce résultat reste bien plus notable dans le cadre de la planification de mouvement qu'en tant que résultat de mathématiques.

Notons que ce rapport laisse quelques énoncés sans démonstration, son but étant avant tout de donner une idée précise des outils mis en jeu dans la démonstration du théorème et du cheminement du raisonnement, et non de simplement de reformuler l'article. Les énoncés en question, bien que nécessaires, ne font pas intervenir d'outils particuliers, et ne sont pas les arguments centraux de la démonstration. Pour les démonstrations de ces résultats, je renvoie le lecteur à l'article ayant servi de base à ce travail.

En revanche, ce rapport présente un outil essentiel de la démonstration qui est utilisé dans l'article sans être introduit (ni même précisément spécifié !) : *l'homologie singulière*. On construit l'homologie singulière et on donne quelques résultats qui seront utilisés dans la démonstration du théorème.

2 Définitions et propriétés générales

Définition (Objet)**.** Un objet A est un compact convexe de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\overline{\mathring{A}} = A$, et borné par un nombre fini de surfaces algébriques. On associe a chaque objet une origine, qui est un point de l'objet.

Définition (Configuration)**.** Une configuration d'un système $(B_i)_{i\in[\![0,m]\!]}$ d'objets est un vecteur de $\mathbb{R}^p \times S_1^q$, où p est le nombre de degrés de liberté en translation du système, q le nombre de degrés de liberté en rotation, et dont les coordonnées spécifient les positions et orientations de chaque objet.

Pour une configuration x, on note $B_i(x)$ la partie de $\mathbb{R}^n$ occupée par l'objet B_i dans la configuration x. Il est clair que la fonction

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i : & \mathbb{R}^p \times S_1^q & \to & \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & B_i(x) \end{array}$$

est continue.

Définition (Intersection, recouvrement, toucher)**.** On dit que B_1 et B_2 s'intersectent en x si $B_1(x) \cap B_2(x) \neq \varnothing$.
On dit que B_1 et B_2 se recouvrent en x si $\mathring{B}_1(x) \cap \mathring{B}_2(x) \neq \varnothing$. On pose $\textsc{nonoverlap} = \{x \in \mathbb{R}^p \times S_1^q \mid \exists i, j B_i \text{ et } B_j \text{ se recouvrent en } x\}$
On dit que B_1 et B_2 se touchent en x si $B_1(x) \cap B_2(x) \neq \varnothing$ et $\mathring{B}_1(x) \cap \mathring{B}_2(x) = \varnothing$.

On pose $\textsc{touch} = \{x \in \mathbb{R}^p \times S_1^q \mid \exists i, j B_i$ et B_j se touchent en $x\}$

On souhaite pouvoir retirer l'hypothèse de convexité des objets. Pour cela, on définit assez naturellement des *objets composés.*

Définition (Objet composé)**.** Un objet composé est une union d'objets. On associe de manière injective à un objet composé un graphe dont les sommets sont des objets et tel qu'une arête entre B_i et B_j signifie que B_i et B_j s'intersectent.
Un objet composé est dit *connexe* si le graphe associé est connexe.
Une configuration est dite *propre* si tous les objets composés dans cette configuration sont connexes.
Une configuration est dite *valide* si elle est propre et si, pour chaque objet composé du système, aucune paire d'objets le formant ne se recouvrent. On appelle VALID l'ensemble des configurations valides. On définit alors NONOVERLAP comme le complémentaire d'OVERLAP dans VALID.
On choisit, dans un objet composé, un objet appelé *base* de l'objet composé. L'origine de la base sera l'origine de l'objet composé. Étant donné n objets composés, on note BASE l'ensemble des configurations propres dans lesquelles la base d'un des objets composés intersecte celle du $n^{\text{ième}}$ objet composé. Enfin, on pose $\textsc{fill} = \textsc{base} \cup \overline{\textsc{overlap}}$.

Truisme. Soit B_1 et B_2 deux objets composés, et x une configuration du système. Si B_1 et B_2 se touchent en x, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists x' \in \mathbb{R}^p \times S_1^q$ tel que $\|x - x'\| \leqslant \varepsilon$ et $\mathring{B}_1(x') \cap \mathring{B}_2(x') \neq \varnothing$.

Démonstration. A étant fermé, $A = \overline{A}$; comme toutes les composantes connexes de A sont d'interieur non vide, par définition de l'adhérence, $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in A \setminus \mathring{A}, \mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$. Ceci est équivalent à la propriété annoncée (car φ_A est continue). $\square$

Théorème 1. Tout objet composé A vérifie $A = \overline{\mathring{A}}$.

Démonstration. $A = \bigcup_{i \in [\![1,l]\!]} B_i$. Soit $y \in A$. Il existe $i \in [\![1,l]\!]$ tel que $y \in B_i$. Par ailleurs, $B_i = \overline{\mathring{B}_i}$, donc il existe une suite $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathring{B}_i)^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{k \to \infty} y_k = y$. Or $y \in B_i \Rightarrow y \in A$, donc $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathring{A})^{\mathbb{N}}$ et $y \in A$. Donc $A \in \overline{\mathring{A}}$.
Soit $y \in \overline{\mathring{A}}$. Il existe une suite $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathring{A}^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{k \to \infty} y_k = y$. Par conséquent, y est limite d'une suite d'éléments de A. A étant fermé, $y \in A$. Donc $\overline{\mathring{A}} \in A$. $\square$

Théorème 2. $\textsc{touch} = \overline{\textsc{overlap}} \cap \textsc{nonoverlap} = \textsc{fill} \cap \textsc{nonoverlap}$

Maintenant que ces définitions sont posées, on peut commencer à démontrer proprement dit le résultat. On commence par établir quelques propriétés topologiques.

3 Quelques propriétés de connexité

Proposition. BASE est connexe par arc.

Démonstration.

Lemme 1. Soient B_1, B_2 deux objets et x, y deux configurations. Soient $b_1, c_1 \in B_1, b_2, c_2 \in B_2$ tels que $b_1(x) = b_2(x)$ et $c_1(y) = c_2(y)$. Alors, si on déplace B_1 et B_2 selon des lignes droites de sorte que le long du chemin, c_1 et c_2 restent en $c_1(y)$, les objets s'intersectent tout le long du chemin.

Démonstration. $b_1 + (c_1 - b_1)t = b_2 + (c_2 - b_2)t$ □

Démontrons maintenant la proposition proprement dite.

Soit $y \in$ BASE une configuration tel que les origines de tous les objets sont confondues, mais l'orientation des objets est potentiellement différente. Soit $x \in$ BASE, et z la configuration où les objets dont dans la même position qu'en y, mais dont l'orientation est la même qu'en x. D'après le lemme précédent, il existe un chemin de x à z tel que les objets s'intersectent tout du long. Il est clair qu'il existe un chemin de z à y (il suffit de faire les rotations idoines). On a donc, pour tout $x \in$ BASE, un chemin de x à y. Les chemins étant réversibles, il existe une chemin de y à x également. Donc BASE est connexe par arc. □

Théorème 3. FILL est connexe par arc.

Démonstration. Soit $x \in$ FILL. On va montrer l'existence d'un chemin de x à un point de BASE. Puisque BASE est connexe par arc et inclus dans FILL, et que les chemins sont réversibles, on aura le résultat désiré. FILL $= \overline{\text{OVERLAP}} \cup$ BASE, donc on a deux cas :

- $x \in$ BASE. Le résultat est alors vrai.
- $x \in \overline{\text{OVERLAP}}$. Il existe alors $i, j \in [\![1, m]\!]$, tel que $B_i(x) \cap B_j(x) \neq \varnothing$, et $x \in$ VALID. Soit b l'origine de l'objet B_i (composé), et b' celle du $n^{\text{ième}}$ objet (composé).

  On peut déplacer A_i et A_j (les deux objets étant considérés comme un unique objet composé) selon des lignes droites jusqu'à la configuration où b est en $b'(x)$. Ce chemin est dans $\overline{\text{OVERLAP}}$, donc dans FILL, et $x \in$ BASE.

FILL est donc connexe par arc. □

Théorème 4. FILL $\cup$ NONOVERLAP est contractile

Corollaire 1. FILL $\cup$ NONOVERLAP est connexe par arc

Théorème 5. NONOVERLAP a un nombre fini de composantes connexes par arc.
TOUCH a un nombre fini de composantes connexes par arc.

Démonstration. Pour NONOVERLAP, il s'agit de diviser correctement l'espace des configurations afin d'avoir un chemin entre tout couple de points dans une cellule.
Pour TOUCH, il s'agit de voir que c'est un CW-complexe fini.

On va maintenant montrer que NONOVERLAP et TOUCH ont même nombre de composantes connexes par arc. Pour cela, on introduit l'homologie singulière. La section suivante construit l'homologie singulière et donne quelques résultats utiles pour la suite, ce que l'article ne fait pas.

4 L'homologie singulière

Soit X un espace topologique, et Δ_p le p-simplexe standard (dans $\mathbb{R}^n$, dont $(e_1, ...e_n)$ est la base canonique), c'est à dire :

$$\Delta_p = \{x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i e_i \mid \sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1\}$$

Définition. Soit $(a_i)_{i \in [\![0,p]\!]} \in (\mathbb{R}^n)^{p+1}$. On définit

$$\begin{array}{rccc} [a_1, \cdots, a_p]: & \Delta_p & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i e_i & \mapsto & \sum_{i=0}^{p} \lambda_i a_i \end{array}$$

$[a_1, \cdots, a_p]$ est appelé un p-simplexe singulier affine.
On note $[a_1, ..., \widetilde{a}_i, ...a_p] : \Delta_{p-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application obtenue en « oubliant » a_i, et on note $F_i^p = [e_1, ..., \widetilde{e}_i, ...e_p]$. F_i^p est un $(p-1)$-simplexe singulier affine que l'on appelle $i^{ème}$ *face de* Δ_p, car son image est la face de Δ_p opposée à e_i.

Définition. Un p-simplexe singulier sur X est une application continue $\Delta_p \rightarrow X$. On peut définir des sommes formelles finies à coefficients entiers[1] de p-simplexes, que l'on appelle *p-chaînes singulières*.
L'ensemble des p-chaînes singulières peut être muni d'une structure de groupe commutatif. On l'appelle *groupe des p-chaines singulières sur X*, et on le note $C_p(X)$. Pour $p < 0$, on pose $C_p(X) = 0$
Si σ est un p-simplexe singulier, la $i^{\text{ème}}$ face de σ, notée $\sigma^{(i)}$ est définie comme $\sigma \circ F_i^p$. Il est clair que c'est un $(p-1)$-simplexe singulier.

On identifie naturellement les 0-simplexes singuliers de X aux point de X, et les 1-simplexes singuliers de X aux chemins de X.

Définition (bord)**.** Soit σ un p-simplexe singulier. On définit le *bord* de σ comme l'application

$$\begin{array}{rccc} \partial: & C_p(X) & \rightarrow & C_{p-1}(X) \\ & \sigma & \mapsto & \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma^{(i)} \end{array}$$

Il est évident que cette définition s'étend par linéarité aux p-chaînes singulières. ∂ est donc un morphisme de groupes $C_p(X) \rightarrow C_{p-1}(X)$. Par ailleurs, on a :

Proposition. $\partial \circ \partial = 0$

Démonstration. Il s'agit de faire le calcul, en remarquant que $(\sigma^{(i)})^{(j)} = (\sigma^{(j)})^{(i+1)}$. □

On obtient donc un complexe chaîné décroissant, appelé *complexe de chaînes singulières* (à coefficients dans $\mathbb{Z}$)

$$\cdots C_{p+1}(X) \rightarrow C_p(X) \rightarrow \cdots \rightarrow C_1(X) \rightarrow C_0(X)$$

[1] en fait, plus généralement, à coefficients dans un anneau $\mathbb{A}$, mais pour des raisons hors du cadre de ce rapport, le cas de $\mathbb{Z}$ est fondamental.

Ses p-cycles sont appelés *p-cycles singuliers*. Ils sont définis par :

$$Z_p(X) = Ker(\partial : C_p(X) \to C_{p-1}(X))$$

Ses p-bords, quant à eux, sont appelés *p-bords singuliers*, et sont définis par :

$$B_p(X) = Im(\partial : C_{p+1}(X) \to C_p(X))$$

Enfin, ses groupes d'homologie (qui sont des $\mathbb{Z}$-modules) sont appelés *groupes d'homologie singulière*, et sont définis ainsi :

$$H_p(X) = Z_p(X)/B_p(X)$$

Théorème 6. Si X est un espace topologique non vide et connexe par arc, alors $H_0(X) = \mathbb{Z}$.

Démonstration. Il faut noter que $C_0(X)$ est le module libre engendré par les points de X.
Considérons l'unique morphisme $\Phi : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ valant 1 sur X. À $x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i x_i$, $(x_i)_{i \in [\![0,k]\!]} \in X^{k+1}$, il associe donc $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i$. X étant non vide, ce morphisme est surjectif.
Montrons qu'il est injectif. Pour cela, on montre qu'une 0-chaîne singulière c est un bord si et seulement si $\Phi(c) = 0$. Si σ est un 1-simplexe singulier, $\partial\sigma = \sigma(1) - \sigma(0)$. Donc Φ est nul sur les bords de 1-simplexes singuliers, et par linéarité, est nul sur les bords. Réciproquement, si on se donne $c = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i$ tel que $\Phi(c) = 0$, y un point de X, et σ_{x_i} un chemin continu de y à x_i, on a :

$$c = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i - (\sum_{i=0}^{k} \lambda_i) y = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i (x_i - y) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \partial\sigma_{x_i} = \partial(\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \sigma_{x_i})$$

donc c est un bord. Or $H_0(X) = C_0(X)/B_0(X)$, donc $H_0(X) = \mathbb{Z}$. □

Théorème 7. Si X est un espace topologique et $(X_i)_{i \in I}$ la famille de ses composantes connexes par arc, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$H_n(X) \simeq \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i)$$

Théorème 8. Si X est contractile, pour $H_0(X) = \mathbb{Z}$ et pour $p > 0$, $H_p(X) = 0$.

Démonstration. Le résultat s'obtient facilement pour $X = \{x\}$. Ensuite, il s'agit d'utiliser la fonctorialité[2] de l'homologie pour déduire que les groupes d'homologie singulière sont des invariants topologiques. D'où le résultat. □

Armé de ces résultats, nous allons pouvoir démontrer que TOUCH et NONOVERLAP ont même nombre de composantes connexes par arc.

[2]expliquer les bases de théorie des catégories nécessaires pour obtenir ce résultat nous emmenerait bien loin...

5 Retour au problème

Théorème 9 (Meyer-Vietoris)**.** Si A et B sont deux fermés d'un espace topologique, et les $H_p(-)$ les groupes d'homologie singulière, alors la suite :

$$H_1(A \cup B) \to H_0(A \cap B) \to H_0(A) \oplus H_0(B) \to H_0(A \cup B) \to 0$$

est une suite exacte.

Théorème 10. $H_0(\text{NONOVERLAP}) \simeq H_0(\text{FILL} \cap \text{OVERLAP}) = H_0(\text{TOUCH})$

Démonstration. $S = \text{FILL} \cup \text{NONOVERLAP}$ est contractile d'après le théorème 4. Par conséquent, $H_1(S) = 0$. Par ailleurs, $\text{FILL} \cup \text{NONOVERLAP}$ est connexe par arc d'après le corollaire 1, donc $H_0(\text{FILL} \cup \text{NONOVERLAP}) = \mathbb{Z}$. FILL est également connexe par arc d'après le théorème 3, donc $H_0(\text{FILL}) = \mathbb{Z}$. Enfin, $\text{FILL} \cap \text{NONOVERLAP} = \text{TOUCH}$. On en déduit que

$$0 \to H_0(\text{TOUCH}) \to \mathbb{Z} \oplus H_0(\text{NONOVERLAP}) \to \mathbb{Z} \to 0$$

est une suite exacte.
Soit $h_2 : H_0(\text{TOUCH}) \to \mathbb{Z} \oplus H_0(\text{NONOVERLAP})$ dans la suite ci-dessus. Cette suite étant exacte, $Ker(h_2) = Im(h_1) = 0$, donc h_2 est injective. Par conséquent, $\mathbb{Z} \oplus H_0(\text{NONOVERLAP}) \simeq \mathbb{Z} \oplus Im(h_2) \simeq \mathbb{Z} \oplus H_0(\text{TOUCH})$.
Or, $H_0(\text{NONOVERLAP}) = \bigoplus_{i \in [\![1,m]\!]} \mathbb{Z}$ d'après le théorème 7.
De même, $H_0(\text{TOUCH}) = \bigoplus_{i \in [\![1,l]\!]} \mathbb{Z}$. On en déduit que $l = m$, et que TOUCH et NONOVERLAP ont même nombre de composantes connexes par arc. □

Notons $(t_k)_{k \in [\![1,m]\!]}$ les composantes connexes par arc de TOUCH, et $(n_k)_{k \in [\![1,m]\!]}$ celles de NONOVERLAP. On souhaite maintenant démontrer que chaque n_k contient exactement un t_k. On montre ici que chaque t_k intersecte au plus un n_k, et on renvoie à l'article pour le reste de l'argument assurant l'inclusion.

Proposition. Chaque t_k intersecte au plus un n_k.

Démonstration. Soit t_i tel qu'il existe j, k tel que $t_i \cap n_k \neq \varnothing$ et $t_i \cap n_j \neq \varnothing$.
Soient $x_1 \in n_j$, $x_2 \in n_k$, $x_3 \in t_i \cap n_j$ et $x_4 \in t_i \cap n_k$.
n_j est par définition connexe par arc, donc il existe un chemin P_1 dans n_j entre x_1 et x_3. De même, n_k étant connexe par arc, il existe un chemin P_2 dans n_k entre x_2 et x_4. Et enfin, t_i étant connexe par arc, il existe un chemin P_3 dans t_i entre x_3 et x_4.
Comme $\text{TOUCH} \subseteq \text{NONOVERLAP}$, un chemin dans t_i est un chemin dans NONOVERLAP. Donc $P_1 : P_3 : P_2$ est un chemin de x_1 à x_2 dans NONOVERLAP. Par conséquent, $n_j = n_k$.

Théorème 11. $\forall k \in [\![1,m]\!], \exists!\ j \in [\![1,m]\!] \mid t_j \subseteq n_k$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème qui nous intéresse. Il s'agit de partitionner convenablement les objets et NONOVERLAP. La section suivante expose la démonstration.

6 Preuve du théorème

Définition. Un chemin m entre deux configurations de n objets est dit être un k-chemin si pour tout $t \in [0, 1]$, le système en $m(t)$ a au plus k composantes connexes. De même, une configuration x est dite une k-configuration si elle correspond à une situation où le système a au plus k composantes connexes. Une 1-configuration est dite *connexe*.

Au vu de ces définitions, le théorème 11 peut être reformulé ainsi :

Théorème 12. S'il existe un n-chemin entre de $(n-1)$-configurations x et y (*i.e.* $x, y \in n_k$), alors il existe un n-chemin entre x et y (*i.e.* $x, y \in n_k$).

Définition. Soient $P_1, \cdots, P_r$ les partitions des n objets en au plus $k+1$ composantes connexes. Une configuration x *satisfait* P_i si les composantes connexes de P_i sont incluses dans celles de x.

Soit x_1, x_2 deux k-configurations ($k \leqslant n$) des n objets composés et m un $(k+1)$-chemin de x_1 à x_2. On partitionne NONOVERLAP en parties telle que toutes les configurations satisfaisant un P_i donné sont dans la même partie de NONOVERLAP. On partitionne ensuite NONOVERLAP en composantes connexes par arc. Sans perte de généralité, on peut supposer que m passe au plus une fois par chaque composante connexe satisfaisant un P_i donné.

Définition. On pose, pour $i \in [\![1, r]\!]$, $T_i = \{t \mid m(t) \text{ satisfait } P_i\}$

m étant continue, et T_i un ensemble de t tel que $m(t)$ soit fermé, les T_i sont fermés.

On partitionne maintenant $[0, 1]$ en un nombre fini d'intervalles fermés $J_i = [a_i, a_{i+1}]$, de sorte que pour tout i, il y ait $k+1$ ensembles d'objets composés, chacun définissant un objet composé restant connexe dans les configurations $m(t)$ pour $t \in J_i$. On peut supposer les J_i maximaux pour cette configuration, ainsi, $m(a_i)$ est pour tout i une k-configuration, et m_i est un $(k+1)$-chemin (m_i est le chemin obtenu par changement de variable et restriction à J_i ; en effet, $m_{|J_i}$ n'es techniquement pas un chemin, puisque son domaine n'est pas $[0, 1]$)

Lemme 2. Soit n le nombre d'objets composés du système et soit $1 \leqslant k \leqslant n$. S'il existe un $(k+1)$-chemin entre deux k-configurations du système, alors il existe un k-chemin entre ces deux k-configurations.

Démonstration. Par récurrence sur n.
- Si $n = 1$, alors $k = n - 1$. On conclut par le théorème 12.
- Supposons le résultat vrai pour moins de n objets composés, et supposons que le système en comporte n ; pour $k = n - 1$, la reformulation du théorème 11 permet de conclure.
  Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Partitionnons $[0, 1]$ tel que décrit précédemment. Le long de m_i, les objets composés dans chaque ensemble définissant J_i restent connexes, donc m_i peut être vu comme un $(k+1)$-chemin de $(k+1)$ objets composés entre deux k-configurations, a_i et a_{i+1}. Par hypothèse de récurrence, le résultat est donc valable pour chaque m_i. Par conséquent, il existe un k-chemin m'_i entre a_i et a_{i+1}. La concaténation de ces chemins est un k-chemin entre les deux k-configurations.

□

Corollaire 2. S'il existe un $(k+1)$-chemin entre deux configurations connexes de n objets composés, alors il existe un k-chemin entre elles.

Démonstration. Il s'agit d'une version plus faible du lemme précédent. En effet, une configuration connexe est une k-configuration. □

Nous pouvons finalement conclure avec le résultat recherché

Théorème 13. S'il y a un chemin entre deux configurations connexes x et y d'un systeme de n objets, alors, il existe un chemin m entre ces configurations tel que pour $t \in [0,1]$, $m(t)$ soit connexe.

Démonstration. Supposons qu'il existe un $(k+1)$-chemin entre x et y pour $k \geqslant 1$; alors, d'apres le corollaire précédent, il y a un k-chemin entre ces deux configurations. Par récurrence, on obtient l'existence d'un 1-chemin entre ces deux configurations. □

Le résultat souhaité est donc démontré ; nous concluons par une petite généralisation de celui-ci.

7 Conclusion

Nous avons démontré le résultat pour des objets possédant des degrés de libertés en translation et en rotation, c'est à dire, dans le cas où l'espace des configuration est homéomorphe à $\mathbb{R}^p \times S_1^q$. Toutefois, la démonstration du résultat n'utilise pas vraiment toute l'information contenue dans cette propriété d'homéomorphisme, mais essentiellement la connexité par arc de FILL et de FILL ∪ NONOVERLAP, ainsi que la contractibilité de FILL ∪ NONOVERLAP. Ainsi, le résultat reste vrai dans le cas de mouvements plus compliqués, notamment de déformations des solides, pour peu que les propriétés topologiques ci-dessus restent vrai (ce qui est tout à fait possible).