

Feuille 7  
Séries entières

**Exercice 1** — Calculer le rayon de convergence des séries entières de la forme  $\sum a_n z^n$  lorsque la suite  $a_n$  est donnée par :

- 1)  $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$  2)  $a_n = \frac{1}{n!}$  3)  $a_n = 2^p$  si  $n = 2p$  est pair et 0 sinon  
 4)  $a_n = \frac{1}{n\pi^n}$  5)  $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$  avec  $P$  et  $Q$  des polynômes non nuls.  
 6)  $a_n = \frac{\ln n}{2^{3n-2}}$  7)  $a_n$  est le  $n$ -ième terme du développement décimal de  $e$

**Exercice 2** — Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

- 1)  $\sum n^2 x^n$  ( $n \geq 0$ ) 2)  $\sum \frac{(n+2)^2}{(n+2)!} x^n$  ( $n \geq 1$ ) 3)  $\sum \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n}$  ( $n \geq 1$ )  
 4)  $\sum \frac{(-1)^n}{2n} x^{2n}$  ( $n \geq 1$ ) 5)  $\sum \frac{x^n}{1+2+\dots+n}$  ( $n \geq 1$ ) 6)  $\sum \frac{\sin(n\alpha)}{n!} x^n$  ( $n \geq 0$ )

**Exercice 3** — Donner le développement en série entière de

- 1)  $e^{x^2-2x}$  en 1 2)  $\arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$  en 0 3)  $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$  en 0  
 4)  $\ln(x+a)$  en 0 5)  $e^x \cos x$  en 0 6)  $(\cos x)^3$  en 0  
 7)  $\frac{1}{(1+x^2)(1-x)}$  en 0 8)  $\int_0^x \frac{\arctan(t^2)}{t} dt$  en 0 9)  $\frac{1+x}{(1-x)^3}$  en 0

**Exercice 4** — Montrer que  $\int_0^{+\infty} e^{-xt^2} S(t) dt$  converge lorsque  $x > 1$  avec  $S(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} t^{2n+1}$ , où  $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq 1$ .

**Exercice 5** — Soit  $a_n$  une suite réelle convergeant vers  $a$

- Calculer le rayon de convergence de  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ .
- Calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} f(t)$ .

**Exercice 6** — Soit  $a_n$  une suite complexe convergeant vers  $a$ . On pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .

- Montrer que si la série  $\sum a_n$  est absolument convergente, alors  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .
- Montrer que  $f(x) = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n}$  avec  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ , et en déduire une autre démonstration du résultat.

**Exercice 7** — Montrer que la fonction définie par  $f(t) = 0$  si  $t \leq 0$  et  $f(t) = e^{-\frac{1}{t}}$  si  $t > 0$  est de classe  $C^\infty$  mais pas développable en série entière en 0.

**Exercice 8** — Pour tout  $x \neq 1$ , posons  $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$ .

1. Montrer que  $f$  est développable en série entière au voisinage de 0.  
On note  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  ce développement et  $R$  le rayon de convergence de  $(\sum a_n x^n)$ .
2. En calculant un produit de séries, montrer que  $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ .
3. Montrer que  $R \geq 1$  et que  $f(x) = \sum a_n x^n$  pour tout  $x \in ]-1, 1[$ .
4. En raisonnant par l'absurde, montrer que  $R = 1$ .

**Exercice 9** — On considère l'équation différentielle

$$(1+x^2)y'' - 2y = 0. \quad (1)$$

1. Soit  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$  non nul. Montrer que  $f$  est solution de (1) si et seulement si on a

$$a_{n+2} = -\frac{n-2}{n+2} a_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

2. Montrer qu'il existe une unique fonction  $f$  solution de (1) telle que
  - $f$  est développable en série entière au voisinage de 0,
  - $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 1$ .Calculer les coefficients et le rayon de convergence de la série entière obtenue.

**Exercice 10** — Pour quelles valeurs de  $a \in \mathbb{R}$  existe-t-il une fonction  $f$  non nulle développable en série entière au point 0, telle que  $f'(x) = f(ax)$ ? Préciser le rayon de convergence de la série entière obtenue.

**Exercice 11** — Soit  $f$  et  $g$  les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définies par

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ et } g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

1. Montrer que  $f$  est développable en série entière en 0 et que le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue est infini.
2. Montrer que  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y' - xy = 1$ . En déduire le développement en série entière de  $f$  en 0.
3. Développer  $g$  en série entière sur  $\mathbb{R}$ . En déduire une expression de  $\int_0^1 g(t) dt$  sous forme de somme d'une série numérique.
4. En écrivant  $f(1)$  de deux manières, démontrer l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)} = \sqrt{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n \times (2n+1)}.$$