

Intégrales doubles, Courbes paramétrées

Exercice 1 — Calculer l'aire du domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 1, y \geq 1, \text{ et } x+y \leq 3\}$ et l'intégrale $\iint_D \frac{1}{(x+y)^3} dx dy$.

Exercice 2 — Calculer l'aire du domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 4 - x^3\}$.

Exercice 3 — Soit un nombre $a > 1$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq x\}$. Calculer $\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy$.

Exercice 4 — Soient a et b des nombres strictement positifs. Calculer l'intégrale double $\iint_D (x^2 - y^2) dx dy$ avec D le domaine borné délimité par l'ellipse d'équation $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Exercice 5 —

1. Calculer l'aire du domaine suivant :

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x + y \leq 2 \text{ et } -1 \leq x - y \leq 3\}.$$

2. Soit

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Calculer l'intégrale double suivante :

$$\iint_D xy \, dx dy.$$

Exercice 6 — **Intégrale de Gauss** $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

1. Soit $a > 0$ et $I_a = \int_0^a e^{-x^2} dx$. Montrer que $\lim_{a \rightarrow +\infty} I_a = I$.

2. Montrer Soit $P_a = [0, a] \times [0, a]$. Montrer que

$$I_a^2 = \iint_{P_a} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

3. Soit D_a et $D_{\sqrt{2}a}$ les disques de centre $(0, 0)$ et de rayons a et $\sqrt{2}a$ respectivement. Montrer que :

$$\iint_{D_a} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq I_a^2 \leq \iint_{D_{\sqrt{2}a}} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

4. En dduire la valeur de I .

Exercice 7 — Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$. Montrez que D est un disque et calculer $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$.

Exercice 8 — Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 2y \geq 0, x^2 + y^2 - 1 \leq 0, x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$. Calculer $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$.

Exercice 9 — Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - x \leq 0\}$. Calculer $\iint_D (x^2 + y^2 + 1) dx dy$.

Exercice 10 — Dans le plan yOz , on considère la branche d'hyperbole $\mathcal{C}$ définie par $yz = 1$ et $z > 0$, et on note $\mathcal{S}$ la surface de révolution obtenue en faisant tourner $\mathcal{C}$ autour de l'axe Oz .

1. Pour tout nombre $a > 1$, calculez le volume V_a limité par $\mathcal{S}$ et les plans $z = 1$ et $z = a$.
2. Montrer que V_a admet une limite lorsque a tend vers $+\infty$.

Exercice 11 — Pour $t \in D$, étudiez la courbe paramétrée définie par $t \mapsto f(t) \in \mathbb{R}^2$

1. $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ et $f(t) = \left(\frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}, \frac{t^2}{t - 1} \right)$;
2. $D = \mathbb{R}$ et $f(t) = (\cos t, \sin(t/3))$;
3. $D = \mathbb{R}$ et $f(t) = \left(\cos t, \frac{(\sin t)^2}{2 + \sin(t)} \right)$;
4. $D = \mathbb{R}$ et $f(t) = (t + t^2, t - t^2)$.