Groupes de réflexions et groupes de Coxeter

De l'autre côté *des* miroirs

Vivien Ripoll

École Normale Supérieure
Département de Mathématiques et Applications

11 mai 2009
Journée *Mathématiques en mouvement*
Fondation Sciences Mathématiques de Paris

Les miroirs feraient bien de réfléchir avant de renvoyer les images. (Jean Cocteau)

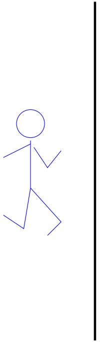
Un problème de miroirs

On place 3 miroirs dans l'espace. Dans quels cas a-t-on un nombre fini d'images réfléchies ?

Un problème de miroirs

On place 3 miroirs dans l'espace. Dans quels cas a-t-on un nombre fini d'images réfléchies ?

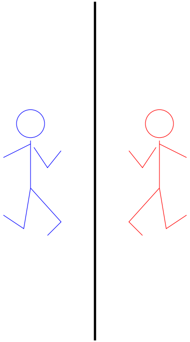
Cas de deux miroirs parallèles :



Un problème de miroirs

On place 3 miroirs dans l'espace. Dans quels cas a-t-on un nombre fini d'images réfléchies ?

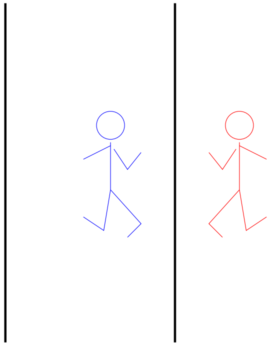
Cas de deux miroirs parallèles :



Un problème de miroirs

On place 3 miroirs dans l'espace. Dans quels cas a-t-on un nombre fini d'images réfléchies ?

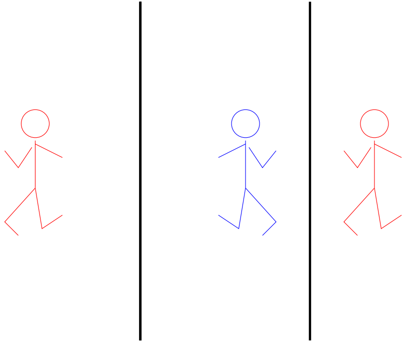
Cas de deux miroirs parallèles :



Un problème de miroirs

On place 3 miroirs dans l'espace. Dans quels cas a-t-on un nombre fini d'images réfléchies ?

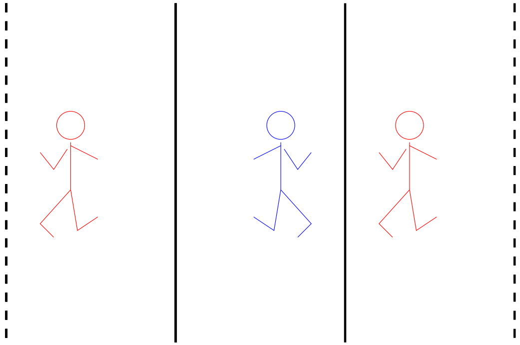
Cas de deux miroirs parallèles :



Un problème de miroirs

On place 3 miroirs dans l'espace. Dans quels cas a-t-on un nombre fini d'images réfléchies ?

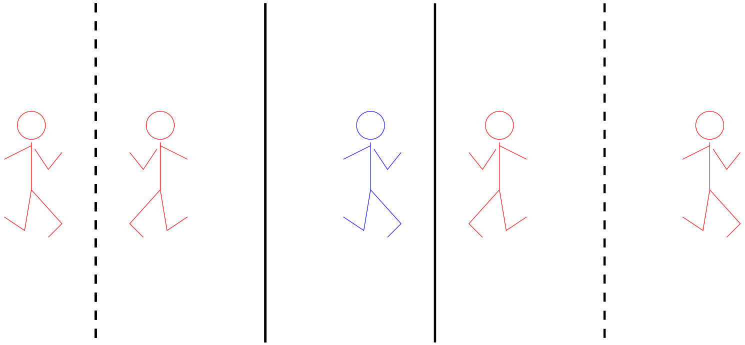
Cas de deux miroirs parallèles :



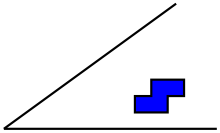
Un problème de miroirs

On place 3 miroirs dans l'espace. Dans quels cas a-t-on un nombre fini d'images réfléchies ?

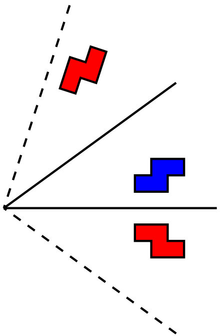
Cas de deux miroirs parallèles :



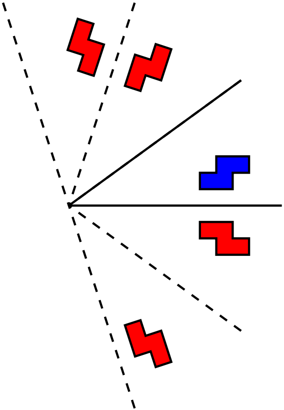
Miroirs non parallèles



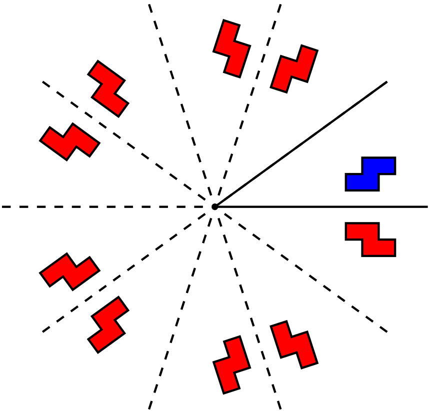
Miroirs non parallèles



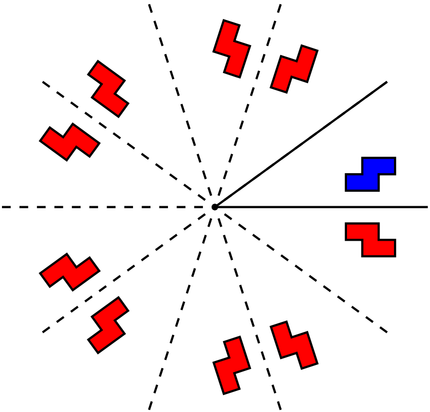
Miroirs non parallèles



Miroirs non parallèles

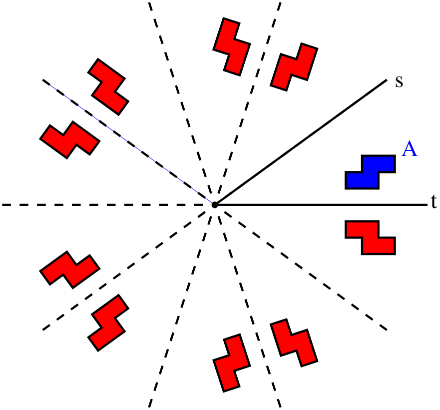


Miroirs non parallèles

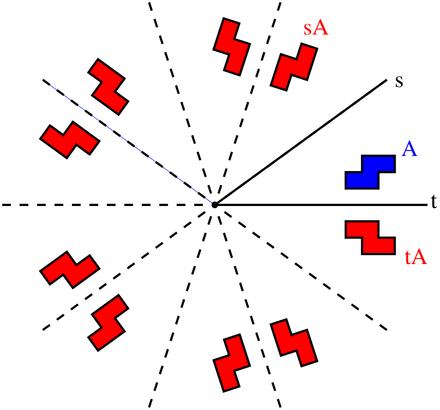


Principe du kaléidoscope.

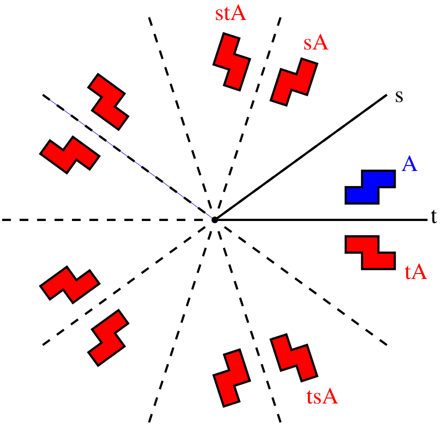
Groupe diédral



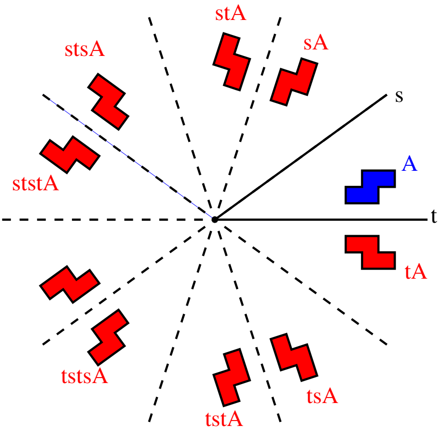
Groupe diédral



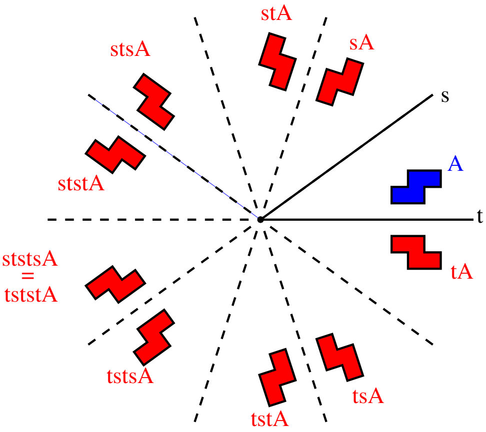
Groupe diédral

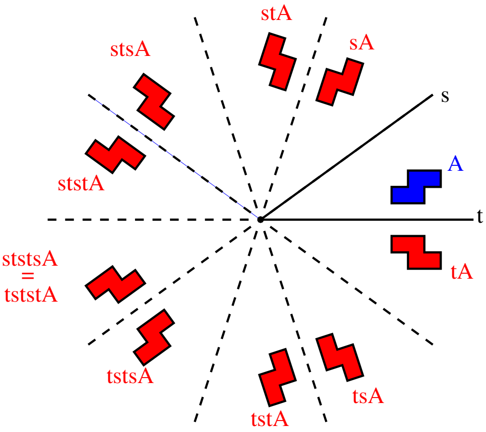


Groupe diédral



Groupe diédral





On visualise l'orbite de A sous l'action du groupe engendré par les symétries s et t. On a

$$ststs = tstst$$

(équivalent à $(st)^5 = \mathrm{Id}$).

Condition de finitude

Soient :

- D_s et D_t les droites supportant les miroirs ;
- θ l'angle entre les deux miroirs ;

Condition de finitude

Soient :

- D_s et D_t les droites supportant les miroirs ;
- θ l'angle entre les deux miroirs ;
- $r = s \circ t$ la composée des deux symétries par rapport à D_s et D_t.

Condition de finitude

Soient :

- D_s et D_t les droites supportant les miroirs ;
- θ l'angle entre les deux miroirs ;
- $r = s \circ t$ la composée des deux symétries par rapport à D_s et D_t.

r est une rotation d'angle 2θ, et doit être d'ordre fini :

Condition de finitude

Soient :

- D_s et D_t les droites supportant les miroirs ;
- θ l'angle entre les deux miroirs ;
- $r = s \circ t$ la composée des deux symétries par rapport à D_s et D_t.

r est une rotation d'angle 2θ, et doit être d'ordre fini :

$$\exists m \geq 1, \exists k \in \mathbb{N}, m \times 2\theta = 2k\pi.$$

Condition de finitude

Soient :

- D_s et D_t les droites supportant les miroirs ;
- θ l'angle entre les deux miroirs ;
- $r = s \circ t$ la composée des deux symétries par rapport à D_s et D_t.

r est une rotation d'angle 2θ, et doit être d'ordre fini :

$$\exists m \geq 1, \exists k \in \mathbb{N}, m \times 2\theta = 2k\pi.$$

On note $m(D_s, D_t)$ le plus petit m possible (*i.e.* l'ordre de r).

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

Définition

Un groupe de réflexions fini W est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des réflexions.

Groupes de réflexions finis

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

Définition

Un groupe de réflexions fini W est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des réflexions.
Réflexion : symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan, *i.e.*

$$s \underset{\text{b.o.n}}{\leftrightarrow} \text{matrice}\,\mathrm{Diag}(-1, 1, \ldots, 1)$$

Groupes de réflexions finis

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

Définition

Un groupe de réflexions fini W est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des réflexions.
Réflexion : symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan, *i.e.*

$$s \underset{\text{b.o.n}}{\leftrightarrow} \text{matrice}\,\mathrm{Diag}(-1, 1, \ldots, 1)$$

$\mathcal{A} := \{$hyperplans des réflexions de $W\}$ ("arrangement d'hyperplans").

On fixe une chambre C de l'arrangement.

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

Définition

Un groupe de réflexions fini W est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des réflexions.
Réflexion : symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan, *i.e.*

$$s \underset{\text{b.o.n}}{\leftrightarrow} \text{matrice}\,\mathrm{Diag}(-1, 1, \ldots, 1)$$

$\mathcal{A} := \{\text{hyperplans des réflexions de } W\}$ ("arrangement d'hyperplans").

On fixe une chambre C de l'arrangement.

$S := \{s_1, \ldots, s_n\}$: réflexions par rapport aux murs de C.
Pour $s \in S$, on note H_s son hyperplan associé : $H_s := \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_V)$.

Diagramme de Coxeter

W est fini, donc pour $s, t \in S$, on peut définir $m_{s,t} := m(H_s, H_t)$.

Diagramme de Coxeter

W est fini, donc pour $s, t \in S$, on peut définir $m_{s,t} := m(H_s, H_t)$.

L'angle entre H_s et H_t vaut $\frac{\pi}{m_{s,t}}$, et st est une rotation d'ordre $m_{s,t}$.

Diagramme de Coxeter

W est fini, donc pour $s, t \in S$, on peut définir $m_{s,t} := m(H_s, H_t)$.

L'angle entre H_s et H_t vaut $\frac{\pi}{m_{s,t}}$, et st est une rotation d'ordre $m_{s,t}$.

Définition

Le diagramme de Coxeter de W est le graphe défini ainsi :

Diagramme de Coxeter

W est fini, donc pour $s, t \in S$, on peut définir $m_{s,t} := m(H_s, H_t)$.

L'angle entre H_s et H_t vaut $\frac{\pi}{m_{s,t}}$, et st est une rotation d'ordre $m_{s,t}$.

Définition

Le diagramme de Coxeter de W est le graphe défini ainsi :

- **sommets** : réflexions de S ;

Diagramme de Coxeter

W est fini, donc pour $s, t \in S$, on peut définir $m_{s,t} := m(H_s, H_t)$.

L'angle entre H_s et H_t vaut $\frac{\pi}{m_{s,t}}$, et st est une rotation d'ordre $m_{s,t}$.

Définition

Le diagramme de Coxeter de W est le graphe défini ainsi :

- **sommets** : réflexions de S ;
- **arêtes étiquetées** : si $s, t \in S$ avec $m = m_{s,t} \geq 3$ (*i.e.* H_s et H_t non orthogonaux), alors on note $\underset{s}{\circ}\overset{m}{\text{———}}\underset{t}{\circ}$.

Diagramme de Coxeter

W est fini, donc pour $s, t \in S$, on peut définir $m_{s,t} := m(H_s, H_t)$.

L'angle entre H_s et H_t vaut $\frac{\pi}{m_{s,t}}$, et st est une rotation d'ordre $m_{s,t}$.

Définition

Le diagramme de Coxeter de W est le graphe défini ainsi :

- **sommets** : réflexions de S ;
- **arêtes étiquetées** : si $s, t \in S$ avec $m = m_{s,t} \geq 3$ (*i.e.* H_s et H_t non orthogonaux), alors on note $\underset{s}{\circ}\overset{m}{\text{———}}\underset{t}{\circ}$.

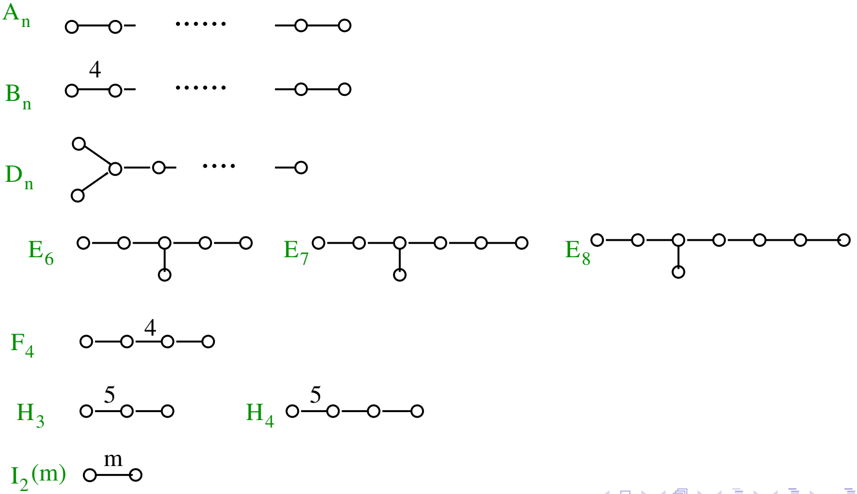
Quels sont les diagrammes de Coxeter possibles ? Il est assez facile de trouver des conditions nécessaires sur les valeurs des $m_{s,t}$.

Précisément, on montre que la matrice $\left(-\cos\left(\frac{\pi}{m_{s,t}}\right)\right)_{s,t \in S}$ est nécessairement définie-positive.

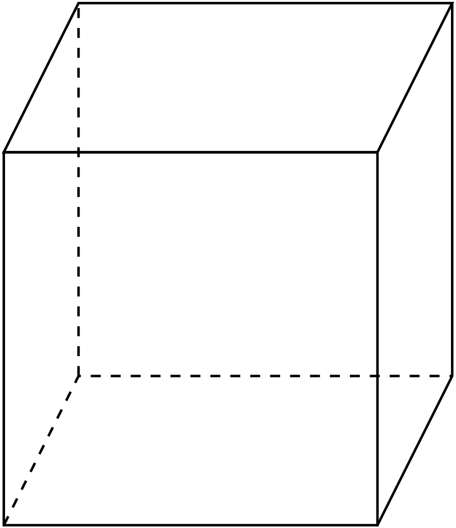
Classification (Coxeter, 1934)

Classification (Coxeter, 1934)

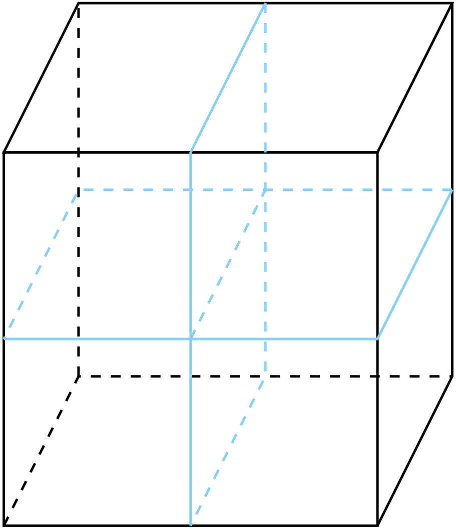
Seuls les diagrammes suivants peuvent apparaître comme composantes connexes d'un diagramme de Coxeter de groupe de réflexions fini :



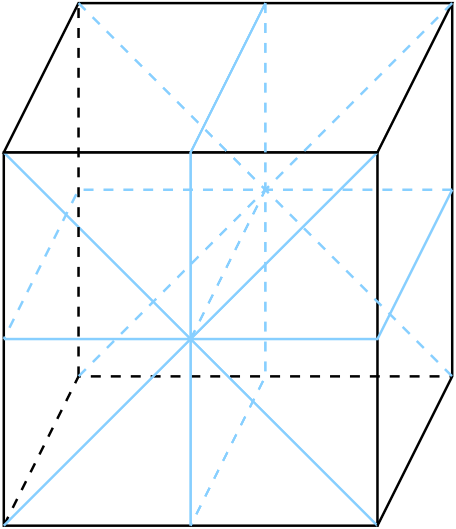
Groupe de symétries du cube



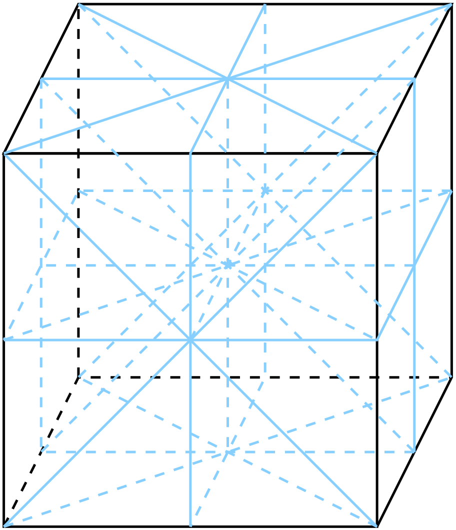
Groupe de symétries du cube



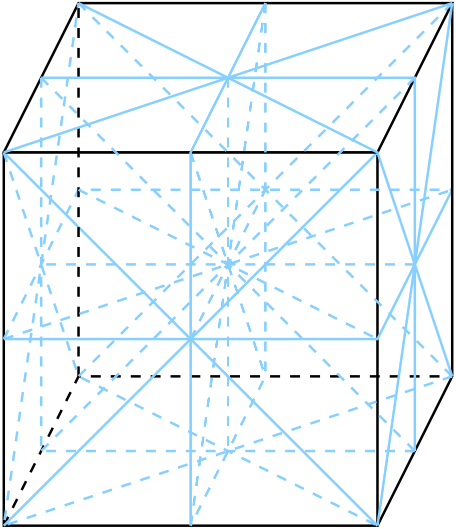
Groupe de symétries du cube



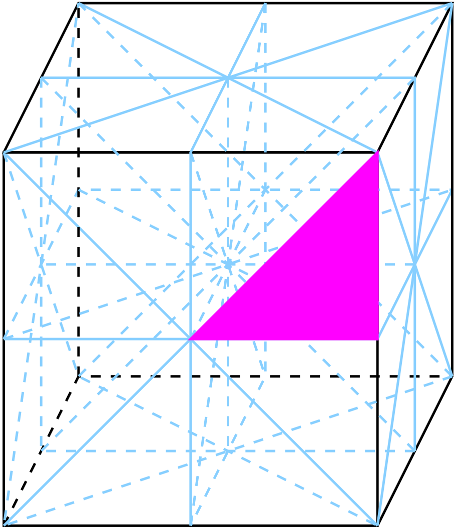
Groupe de symétries du cube



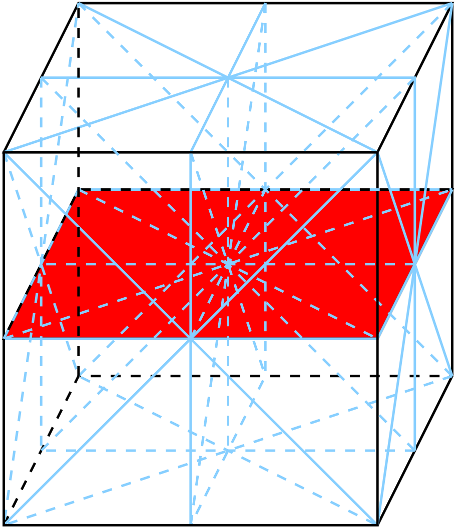
Groupe de symétries du cube



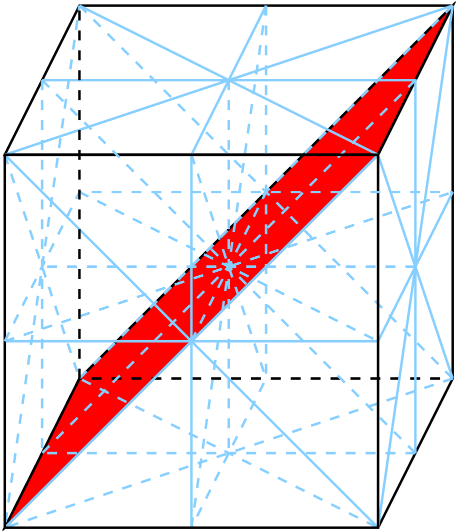
Groupe de symétries du cube



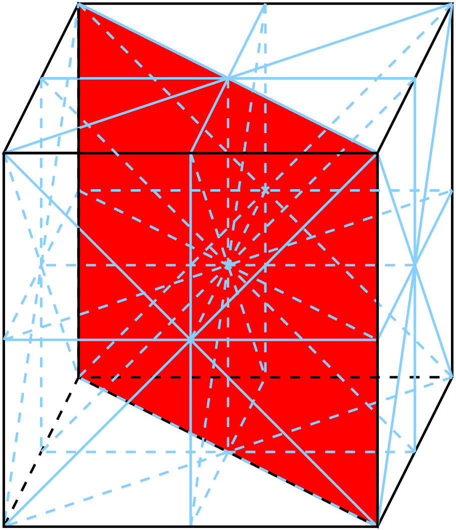
Groupe de symétries du cube



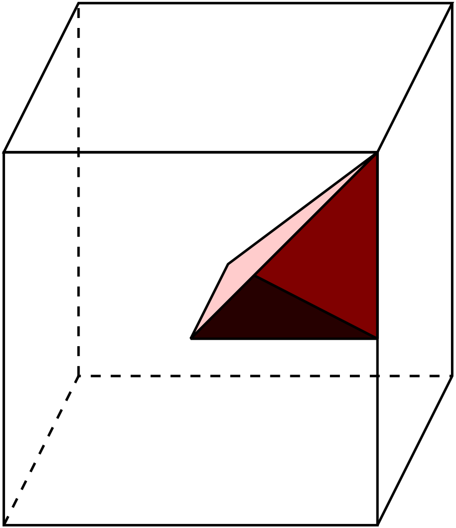
Groupe de symétries du cube



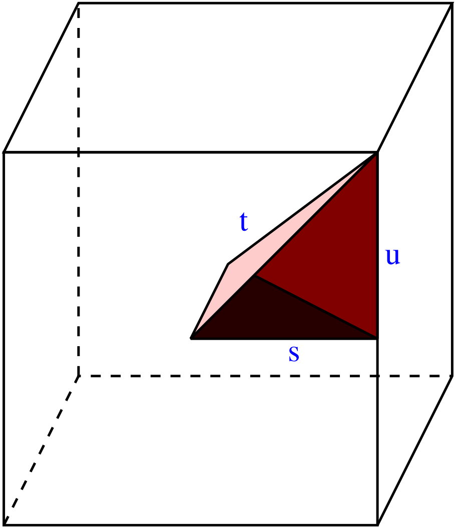
Groupe de symétries du cube



Groupe de symétries du cube

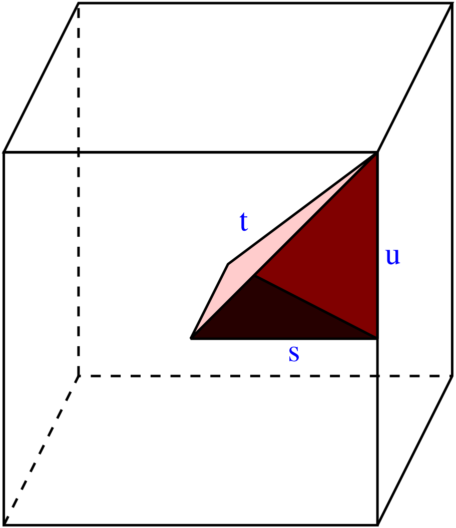


Groupe de symétries du cube

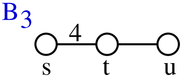


- angle$(H_s, H_u) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow m_{s,u} = 2$;
- angle$(H_s, H_t) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow m_{s,t} = 4$;
- angle$(H_t, H_u) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow m_{t,u} = 3$.

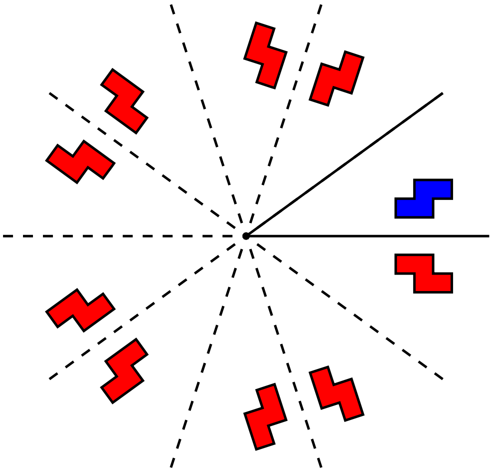
Groupe de symétries du cube



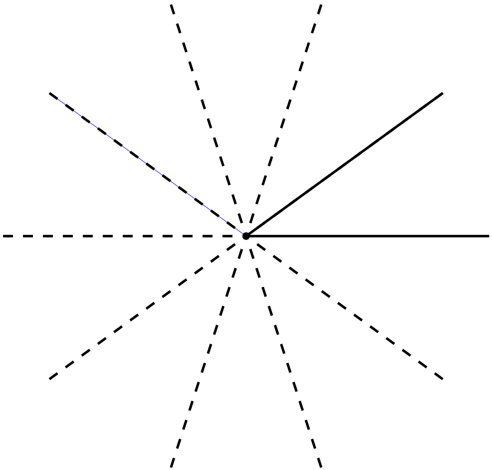
- angle$(H_s, H_u) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow m_{s,u} = 2$;
- angle$(H_s, H_t) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow m_{s,t} = 4$;
- angle$(H_t, H_u) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow m_{t,u} = 3$.



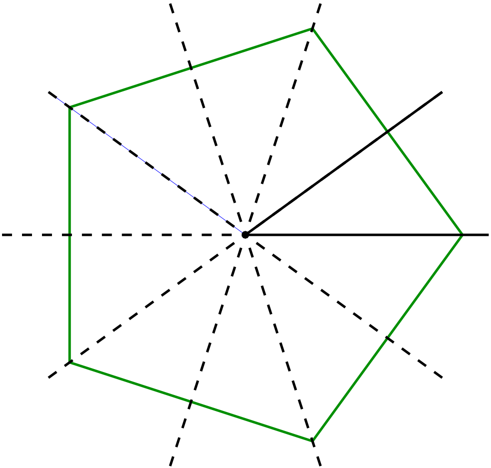
Groupe diédral : symétries d'un m-gone



Groupe diédral : symétries d'un m-gone

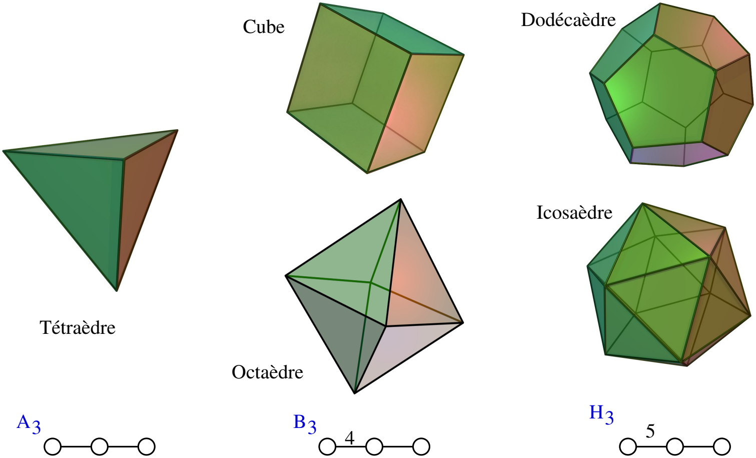


Groupe diédral : symétries d'un m-gone



Groupes de symétries de polyèdres réguliers

Les 5 solides de Platon :



Le cas du type A

Le groupe de permutations sur n éléments $\mathfrak{S}_n$ se plonge canoniquement dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$:

$$\sigma \mapsto M_\sigma \qquad \text{avec} \quad (M_\sigma)_{i,j} = \delta^i_{\sigma(j)}.$$

Le cas du type A

Le groupe de permutations sur n éléments $\mathfrak{S}_n$ se plonge canoniquement dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$:

$$\sigma \mapsto M_\sigma \qquad \text{avec} \quad (M_\sigma)_{i,j} = \delta^i_{\sigma(j)}.$$

Ainsi, $\mathfrak{S}_n$ se voit comme une groupe de réflexions fini, dont les réflexions sont les transpositions : la transposition (i,j) correspond à la réflexion d'hyperplan d'équation $x_i = x_j$.

Le cas du type A

Le groupe de permutations sur n éléments $\mathfrak{S}_n$ se plonge canoniquement dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$:

$$\sigma \mapsto M_\sigma \qquad \text{avec} \quad (M_\sigma)_{i,j} = \delta^i_{\sigma(j)}.$$

Ainsi, $\mathfrak{S}_n$ se voit comme une groupe de réflexions fini, dont les réflexions sont les transpositions : la transposition (i,j) correspond à la réflexion d'hyperplan d'équation $x_i = x_j$.

On peut choisir comme ensemble de réflexions fondamentales

$$S = \{(1,2),(2,3),\ldots,(n-1,n)\} = \{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\}.$$

Le cas du type A

Le groupe de permutations sur n éléments $\mathfrak{S}_n$ se plonge canoniquement dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$:

$$\sigma \mapsto M_\sigma \qquad \text{avec} \quad (M_\sigma)_{i,j} = \delta^i_{\sigma(j)}.$$

Ainsi, $\mathfrak{S}_n$ se voit comme une groupe de réflexions fini, dont les réflexions sont les transpositions : la transposition (i,j) correspond à la réflexion d'hyperplan d'équation $x_i = x_j$.

On peut choisir comme ensemble de réflexions fondamentales

$$S = \{(1,2),(2,3),\ldots,(n-1,n)\} = \{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\}.$$

Son diagramme de Coxeter est A_{n-1} :

Présentation de Coxeter

Tout groupe de réflexions fini W possède une présentation remarquable, dite présentation de Coxeter :

$$W \simeq \left\langle S \;\middle|\; \forall s \in S, s^2 = 1\ ;\ \forall s,t \in S, \underbrace{sts\ldots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst\ldots}_{m_{s,t}} \right\rangle .$$

Présentation de Coxeter

Tout groupe de réflexions fini W possède une présentation remarquable, dite présentation de Coxeter :

$$W \simeq \left\langle S \;\middle|\; \forall s \in S, s^2 = 1 \; ; \; \forall s,t \in S, \underbrace{sts\ldots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst\ldots}_{m_{s,t}} \right\rangle .$$

Définition

Un groupe de Coxeter est un groupe (abstrait) W, pas nécessairement fini, qui admet une présentation de Coxeter (pour un certain choix d'un ensemble de générateurs S).

Présentation de Coxeter

Tout groupe de réflexions fini W possède une présentation remarquable, dite présentation de Coxeter :

$$W \simeq \left\langle S \;\middle|\; \forall s \in S, s^2 = 1 \,;\, \forall s,t \in S, \underbrace{sts\ldots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst\ldots}_{m_{s,t}} \right\rangle .$$

Définition

Un groupe de Coxeter est un groupe (abstrait) W, pas nécessairement fini, qui admet une présentation de Coxeter (pour un certain choix d'un ensemble de générateurs S).

Un groupe de Coxeter **fini** peut toujours se voir comme groupe de réflexions fini d'un certain espace vectoriel.

Présentation de Coxeter

Tout groupe de réflexions fini W possède une présentation remarquable, dite présentation de Coxeter :

$$W \simeq \left\langle S \;\middle|\; \forall s \in S, s^2 = 1 \; ; \; \forall s, t \in S, \underbrace{sts\ldots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst\ldots}_{m_{s,t}} \right\rangle .$$

Définition

Un groupe de Coxeter est un groupe (abstrait) W, pas nécessairement fini, qui admet une présentation de Coxeter (pour un certain choix d'un ensemble de générateurs S).

Un groupe de Coxeter **fini** peut toujours se voir comme groupe de réflexions fini d'un certain espace vectoriel.

Dans le cas infini, certains peuvent être décrits comme groupes de réflexions d'un espace affine ou hyperbolique.

Groupes de Coxeter abstraits : questions actuelles

Problème d'isomorphisme :

Etant donné deux diagrammes de Coxeter quelconques, déterminer si les groupes associés sont isomorphes.

Groupes de Coxeter abstraits : questions actuelles

Problème d'isomorphisme :
Etant donné deux diagrammes de Coxeter quelconques, déterminer si les groupes associés sont isomorphes.

Exemple

$I_2(6)$ (hexagone) $\simeq A_2 \times A_1$ (prisme à base triangulaire).

Groupes de Coxeter abstraits : questions actuelles

Problème d'isomorphisme :
Etant donné deux diagrammes de Coxeter quelconques, déterminer si les groupes associés sont isomorphes.

Exemple

$I_2(6)$ (hexagone) $\simeq A_2 \times A_1$ (prisme à base triangulaire).

Le problème est résolu pour certaines classes de diagramme, mais reste ouvert dans le cas général.

Groupes de Coxeter abstraits : questions actuelles

Problème d'isomorphisme :
Etant donné deux diagrammes de Coxeter quelconques, déterminer si les groupes associés sont isomorphes.

Exemple

$I_2(6)$ (hexagone) $\simeq A_2 \times A_1$ (prisme à base triangulaire).

Le problème est résolu pour certaines classes de diagramme, mais reste ouvert dans le cas général.

Problème du rang :
Le rang d'un groupe (abstrait) est la taille minimale d'un ensemble de générateurs.
Étant donné un diagramme de Coxeter, que peut-on dire du rang du groupe associé ? Quand est-il égal au rang de Coxeter (nombre de sommets du graphe) ?

Groupes de réflexions complexes

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (de dimension finie).

Définition

Un groupe de réflexions complexes (fini) est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des réflexions complexes.

Groupes de réflexions complexes

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (de dimension finie).

Définition

Un groupe de réflexions complexes (fini) est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des réflexions complexes.
Un élément $s \in \mathrm{GL}(V)$ est une réflexion complexe si $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_V)$ est un hyperplan (et s est d'ordre fini) :

$$s \underset{\mathcal{B}}{\leftrightarrow} \text{matrice}\, \mathrm{Diag}(\zeta, 1, \ldots, 1)\ ,\ \text{avec } \zeta \text{ racine de l'unité.}$$

Groupes de réflexions complexes

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (de dimension finie).

Définition

Un groupe de réflexions complexes (fini) est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des réflexions complexes.
Un élément $s \in \mathrm{GL}(V)$ est une réflexion complexe si $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_V)$ est un hyperplan (et s est d'ordre fini) :

$$s \underset{\mathcal{B}}{\leftrightarrow} \text{matrice } \mathrm{Diag}(\zeta, 1, \ldots, 1)\ , \ \text{avec } \zeta \text{ racine de l'unité.}$$

Quid d'un analogue de la théorie de Coxeter, qui permette de comprendre les groupes complexes de manière combinatoire ?
Topologie de l'arrangement d'hyperplans ? (groupe de tresses associé...)

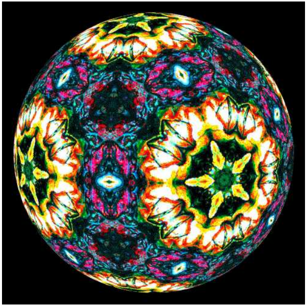
Comment trouver de “bonnes” présentations de ces groupes ?

Bibliographie restreinte

Roe Goodman, *Alice through Looking Glass after Looking Glass : The Mathematics of Mirrors and Kaleidoscopes*, American Mathematical Monthly, April 2004.

Bibliographie restreinte

Roe Goodman, *Alice through Looking Glass after Looking Glass : The Mathematics of Mirrors and Kaleidoscopes*, American Mathematical Monthly, April 2004.



Kaléidoscope dodécaédral
(création Mark Newbold)

Merci !