

## Examen

Nom, prénom :

Groupe :

Les réponses aux exercices 1 et 4 sont à écrire directement sur cette feuille. Pour le reste, vous répondrez sur une copie personnelle. Vous devez obligatoirement rendre une copie contenant la feuille d’examen, avec votre nom sur chaque feuille.

On ne rendra pas d’impression de la feuille de travail. Sauf mention du contraire, dans chaque question on demande une (ou plusieurs) ligne(s) de commande Maple (même si ce n’est pas indiqué explicitement). Il est évidemment indispensable de tester ces commandes sur l’ordinateur, mais vous n’avez pas besoin de recopier le résultat affiché par Maple en réponse à la commande tapée (en particulier lorsque ce résultat est très volumineux).

L’utilisation de l’aide de Maple est très fortement conseillée : les noms des commandes non habituelles vous sont donnés.

Aucun document n’est autorisé. Les portables et autres matériels électroniques doivent être éteints.

Le barème est donné à titre indicatif.

*Une attention particulière sera apportée à la syntaxe de Maple et à la rédaction !*

### Exercice 1 (Échauffement (2,5 pts))

1. Trouver un développement limité (ou de Taylor) de  $\exp(\cos^2(x))$ , en 0, à l’ordre (mathématique) 7.

2. Calculer l’intégrale suivante :  $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+\sin^3(x)} dx$ .

3. Expliquer en une phrase la différence entre les commandes *evalf*, *evalc* et *evalm* de Maple.

### Exercice 2 (Algèbre linéaire (4,5 pts))

1. Charger la bibliothèque habituelle d’algèbre linéaire.

2. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & -5 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer l'inverse de  $A$ .

(b) Donner la liste des puissances  $k$ -ièmes de  $A$  pour  $k$  variant de 0 à 4.

3. Soit le système linéaire suivant ( $a$  et  $b$  sont supposés connus,  $x$  et  $y$  sont les inconnues) :

$$\begin{cases} -3x + 9y = a \\ 2x + 4y = b \end{cases}$$

(a) Le résoudre en utilisant la commande *solve*.

(b) Le résoudre en utilisant la commande *linsolve*.

(c) Que peut-on en déduire pour la famille de vecteurs

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} ? \text{ (expliquez)}$$

### Exercice 3 (Programmation (5 pts))

1. Écrire une procédure qui prend en entrée un nombre complexe  $z$  et renvoie un ensemble formé de son module et de son argument.
2. Quelques erreurs se sont glissées dans le programme ci-dessous. Recopiez-le en corrigeant toutes les erreurs de syntaxe, et expliquez l'effet que doit avoir la procédure quand on lui donne en entrée une matrice.

```
> With(linalg):
> machin:=proc(M);
  A:=copy(M):a=rowdim(A):b=coldim(A):
  if a:=b then
    return for i from 1 to a do
      A[i;i]:=A[i;i]^2;
    else
      do for k from 1 to b
        A[a;k]:=A[a;k]/3;
      end do;
  return A;
end;
```

3. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $S(n)$  la somme des inverses des entiers naturels premiers inférieurs ou égaux à  $n$  :

$$S(n) = \sum_{p \text{ premier } \leq n} \frac{1}{p}$$

En utilisant une boucle *while*, une boucle *for*, ou la commande *add*, écrire une procédure qui prend en entrée un entier  $n$  et renvoie  $S(n)$ . On pourra se servir des commandes *isprime*, *nextprime*, ou *ithprime*.

#### Exercice 4 (fonction et tracé (7 pts))

Soit  $f$  la fonction définie par:

$$f(x) = \frac{2x^4 - 3x^2 - 10x}{(x^2 + 1)(x - 2)} \exp\left(\frac{|x|}{x + 1}\right)$$

1. Définir la fonction  $f$  dans Maple (ne copiez pas toute la ligne ci-dessous). Donner le domaine de définition  $D_f$  de  $f$  (à la main). Vérifier avec Maple que  $f$  est continue sur  $D_f$ .

2. Calculer les limites de  $f$  aux bornes des intervalles qui composent  $D_f$ . Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote simple? Comment peut-on prolonger  $f$  par continuité?

3. Simplifier (ou "normaliser") l'expression de  $f$  (avec Maple). Le prolongement ci-dessus était-il prévisible?

4. Donner la ligne de commande permettant de calculer la dérivée de  $f$ . La noter  $g$ . En résolvant une inéquation, montrer que  $f$  est croissante sur  $D_f$ .

5. Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentant  $f$ . En utilisant une commande Maple simple, montrer que la droite  $D_1$  d'équation  $y = 2ex + 2e$  (où  $e = \exp(1)$ ) est asymptote à  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .

6. En calculant un développement asymptotique avec la commande *series*, trouver l'équation d'une asymptote à  $\mathcal{C}$  en  $-\infty$  (on l'appellera  $D_2$ ).

7. Tracer les courbes  $\mathcal{C}$ ,  $D_1$  et  $D_2$  sur un même graphique, en choisissant en abscisses et en ordonnées des échelles adaptées.

**Exercice 5 (Suite récurrente (3 pts))**

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . On considère la suite définie par la récurrence suivante:

$$\begin{cases} u_0 = a ; \\ u_1 = b ; \text{ et} \\ u_n = |u_{n-1}| - u_{n-2} \text{ si } n \geq 2 \end{cases}$$

1. Écrire une procédure prenant en entrée un nombre réel  $a$ , un nombre réel  $b$ , et un entier naturel  $n$ , et renvoyant le  $n$ -ième terme de la suite  $u$  (on n'aura pas besoin de l'option *remember*).
2. Donner des valeurs à  $a$  et  $b$ , et demander à Maple la séquence des 20 premiers termes de la suite. Que constatez-vous ? (tester plusieurs exemples si besoin)

**Exercice 6 (supplémentaire, à chercher uniquement si vous avez fini tout le reste)**

On appelle  $p$  la fonction qui à  $x \in \mathbb{R}^+$  associe le nombre d'entiers naturels premiers inférieurs ou égaux à  $x$ . En d'autres termes :

$$p(x) = \text{card}\{n \in \mathbb{N}, n \leq x, n \text{ premier}\}$$

Écrire une procédure prenant en entrée un réel positif  $x$  et renvoyant  $p(x)$  (on pourra utiliser une boucle *while* et la commande *nextprime*).