Université Paris 7 | **Premier semestre 2008-2009**
L1 MASS - Groupe 1M4 | **MA1 - Algèbre et Analyse élémentaires**

TD 11 : Courbes paramétrées

Exercice 1. On considère la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{-t^3}{3} + t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$$

a) Réduction de l'intervalle d'étude. Tableau de variations (avec les limites).

b) Y a-t-il des points à tangente verticale ? horizontale ? Y a-t-il des points singuliers ?

c) Montrer que la courbe admet un point double, qu'on notera A. Coordonnées de ce point ? Donner des vecteurs directeurs, puis les équations, des deux tangentes à la courbe en A.

d) Montrer que $y(t)/x(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ (on dit que la courbe a une direction parabolique selon l'axe horizontal). Plus précisément, montrer que $y(t) \underset{t\to\pm\infty}{\sim} (\sqrt[3]{3x(t)})^2$.

e) Tracer la courbe.

Exercice 2. On considère la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2+1}{t^2-1} \\ y(t) = \frac{t^2}{t-1} \end{cases}$$

a) Domaine de définition. Tableau de variations (avec les limites).

b) Y a-t-il des points à tangente verticale ? horizontale ? Y a-t-il des points singuliers ?

c) Tracer sommairement l'allure de la courbe.

d) Montrer que la courbe a une asymptote horizontale pour $t \to -1$. Déterminer la position de la courbe par rapport à cette asymptote au voisinage de $t = 1$.

e) Montrer que la courbe a une asymptote verticale pour $t \to \pm\infty$, et déterminer la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

f) Montrer que $y(t) \underset{t\to 1}{\sim} x(t)$. En étudiant $y(t) - x(t)$ au voisinage de $t = 1$, montrer que la courbe possède une asymptote oblique (dont on donnera une équation) pour $t \to 1^-$ et $t \to 1^+$. Déterminer la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

g) Que se passe-t-il en $t = 0$? La courbe admet-elle une tangente en ce point ?

h) Préciser le tracé de la courbe en utilisant toutes les questions précédentes.

Exercice 3. Déterminer les points réguliers de la courbe définie par

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 \end{cases}$$

Cette courbe admet-elle une tangente en $t = 0$? Quel est le comportement de la courbe en ce point ?

Exercice 4. Déterminer les points singuliers (ou stationnaires) des courbes suivantes, et déterminer l'allure des courbes en ces points.

$$a) \begin{cases} x(t) = t^4 + 4t \\ y(t) = t^4 - 2t^2 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x(t) = t^2 + \frac{2}{t} \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}$$

Exercice 5. Donner l'allure des courbes suivantes au voisinage du point $t_0 = 0$.

$$a) \begin{cases} x(t) = \frac{e^t}{\cos t} \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases} \quad b) \begin{cases} x(t) = t^2 + \cos t \\ y(t) = t^2 + \sin t \end{cases}$$

Exercice 6. Tracer la courbe définie par $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$ (astroïde). Etudier le comportement local au voisinage des quatre points singuliers.

Exercice 7. Tracer la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$$

Etude locale en $t = 0$.

[Remarque : la courbe obtenue s'appelle une cycloïde : c'est la trajectoire d'un point situé sur la circonférence d'un cercle qui roule.]

Exercice 8. Etudier les courbes paramétrées suivantes : intervalle d'étude, symétries, tableau de variations, limites, éventuelles branches infinies, tracé.

$$\text{a)} \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = (1 + \cos t) \sin t \end{cases} \quad \text{c)} \begin{cases} x(t) = t^2 + 2/t \\ y(t) = t + 1/t \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} x(t) = t/\ln t \\ y(t) = t^2/(t-1) \end{cases} \quad \text{d)} \begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - 1/t^2 \end{cases}$$