Université Paris 7 **Premier semestre 2008-2009**
L1 MASS - Groupe 1M4 **MA1 - Algèbre et Analyse élémentaires**

TD 10 : Continuité, dérivation et développements limités

1 Continuité

Exercice 1.

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$, tel que $f(a) = 0$.

b) Montrer que tout polynôme réel de degré impair a au moins une racine réelle.

Exercice 2. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0,1]$, tel que $f(\alpha) = \alpha$ (on dit que α est un *point fixe* de f).

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. Montrer que f possède un maximum.

Exercice 4. La fonction $x \to \sin \frac{1}{x}$ est-elle prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$? Et la fonction $x \to x \sin \frac{1}{x}$?

Exercice 5. On note E la fonction *partie entière* : $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - E(x) - (x - E(x))^2.$$

a) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Etudier la continuité de E sur $]n, n+1[$, puis au point n. Faire de même pour la fonction f.

b) Montrer que pour tout réel x, $f(x+1) = f(x)$. En déduire l'allure du graphe de f.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{\alpha}.$$

a) Montrer que si $\alpha > 0$, alors f est continue.

b) Montrer que si $\alpha > 1$, alors f est dérivable. Que vaut sa dérivée ? Que peut-on dire de f ?

2 Dérivation

Exercice 7. Etudier le domaine de définition, la continuité, la dérivabilité, et le caractère $\mathcal{C}^1$ des fonctions suivantes :

a) $x \to |x|/x$.

b) $x \to x$ si $x \geq 0$; x^2 sinon.

c) $x \to \sin x/x$ si $x \neq 0$; 1 sinon.

d) $x \to \sqrt{x}$ si $x \geq 0$; $-\sqrt{x}$ sinon.

e) $x \to e^{1/x}$ si $x < 0$; 0 sinon.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que f possède n zéros (avec $n \geq 2$). Montrer que f' en possède au moins $n-1$.

La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 9. A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer les inégalités suivantes :

a) $\sin x \leq x$ si $x \geq 0$.

b) $\sin x \geq x$ si $x \leq 0$.

c) $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

d) $x \geq \ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x}$ pour tout $x > -1$.

Exercice 10. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est lipschitzienne sur $[a, b]$, c'est-à-dire qu'il existe un réel K tel que :

$$\forall x, y \in [a, b], \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

3 Développements limités

Exercice 11. Donner la partie principale (ou un équivalent simple) des infiniments petits ou infinments grands suivants :

$$\tan^2 x \ (x \to 0), \quad x^2 - x^3 \ (x \to 0^+), \quad \sqrt{x^4+1} \ (x \to \pm\infty), \quad (1+x)^3 \ (x \to +\infty),$$
$$\sqrt{x^2+1} - x \ (x \to +\infty), \quad 2\pi\sigma(\sqrt{R^2+a^2} - R) \ (R \to +\infty), \quad \sqrt{x^2+x} - x \ (x \to +\infty),$$
$$\ln(x+1) - \ln x \ (x \to +\infty), \quad e^x - 1 - x \ (x \to 0), \quad \ln(\cos x) \ (x \to 0),$$
$$\text{cotan}\, x \ (x \to 0), \quad e^x - e^{-x} \ (x \to 0), \quad \sqrt{f(x) - f(a)} \ (f'(a) > 0, x \to a^+),$$
$$xe^{1/x} \ (x \to +\infty).$$

Exercice 12. Vérifier que l'on a, en $x = 0$, les développements limités suivants

a) $\sin x \cos x = x - \frac{4}{6}x^3 + \frac{16}{120}x^5 + o(x^5)$.

b) $\ln \frac{\sin x}{x} = \frac{-1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4)$.

c) $\ln(\frac{2-x^2}{3-x}) = \ln\frac{2}{3} + \frac{x}{3} - \frac{4x^2}{9} + \frac{x^3}{81} + o(x^3)$.

d) $(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = e(1 - \frac{1}{2}x + \frac{7}{24}x^2 - \frac{3}{16}x^3 + \frac{139}{1152}x^4) + o(x^4)$.

e) $\sin(2x - 4x^2) - 2\sin(x - x^2) = -2x^2 - x^3 + o(x^3)$.

f) $e^{\sqrt{1+x}} = e(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{48}x^3) + o(x^3)$.

g) $\ln(2\cos x + \sin x) = \ln 2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + \frac{5}{24}x^3 - \frac{35}{192}x^4 + o(x^4)$.

Exercice 13. Donner les développements limités à l'ordre n en $x = 0$ des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2},\ n = 5$.

b) $f(x) = \sin^3 x,\ n = 5$.

c) $f(x) = \sin x \cos 2x,\ n = 6$.

d) $f(x) = \cos x \ln(1+x),\ n = 4$.

e) $f(x) = (x^3+1)\sqrt{1+x},\ n = 3$.

f) $f(x) = e^x \ln(1+x),\ n = 4$.

Exercice 14. Calculer le développement limité de $x \mapsto \cos x$ en $\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 3.

Exercice 15. Calculer les limites

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln(x^2+1) - 2\ln x),\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-3}{x^2-3x},\quad \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-3x},\quad \lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x\sin x}{1-\cos x}},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x + 1 - \cos x}{x^2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{\sqrt{1-\cos x}},\quad \lim_{x\to\pi/3}\frac{\sin 3x}{1-2\cos x},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{\tan 3x - 3x},\quad \lim_{x\to e}\frac{\sqrt{x}-e}{\ln x - 1},\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3+3x}{x-1}} - x,\quad \lim_{x\to\pi/4}\frac{\cos x - \sin x}{\ln(\tan x)},$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{e^x-1} - \frac{xe^x}{(e^x-1)^2}\right],\quad \lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}),\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3},$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}.$$

Si la limite est nulle ou infinie, essayer d'identifier la partie principale.

Exercice 16. Trouver la partie principale pour $x \to 0^+$ de

$$\sin\frac{x}{1-x} - \frac{\sin x}{1-\sin x},\quad \frac{1}{x^3} - \frac{1}{tan^3 x},\quad \frac{e^x-1}{e^x+1} - \frac{x}{2}.$$

Exercice 17.

a) Calculer les limites

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right),\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right),\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sin^3 x}\right).$$

b) Calculer les limites

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},\quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2},\quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}.$$

Exercice 18. Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt[3]{x^2(x-2)}$.

a) Etudier la tangente à f en $x=1$.

b) Etudier les branches infinies de f.

Exercice 19. Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$.

a) Montrer que f est définie pour $x\neq 0$ et qu'elle admet un prolongement par continuité en $x=0$. On notera encore f la fonction obtenue par ce prolongement.

b) Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 (et déterminer ce développement).

c) En déduire que f est dérivable en $x=0$. Préciser la tangente à la courbe représentative de f en ce point et la position de la courbe par rapport à la tangente.

d) On peut montrer que $f''(x)>0$ pour tout $x\neq 0$, mais c'est assez difficile. En admettant ce résultat, tracer la courbe représentative de f (sans omettre d'étudier les asymptotes).

Exercice 20. Dans un calcul, on prend 99% comme inverse de 101%. Quel est l'ordre de grandeur de l'erreur commise ?