

Comportement asymptotique des systèmes de racines de groupes de Coxeter infinis

Vivien RIPOLL

LaCIM, Université du Québec à Montréal

novembre 2012

Travaux en collaboration avec

- **Matthew Dyer** (University of Notre Dame)
- **Christophe Hohlweg** (UQÀM)
- **Jean-Philippe Labbé** (FU Berlin)

Plan

- 1 Systèmes de racines et “racines-limites” d’un groupe de Coxeter W
- 2 Racines-limites, cône isotrope et sous-groupes diédraux
- 3 Action de W sur les racines-limites, propriétés topologiques et cône imaginaire de W

Plan

- 1 Systèmes de racines et “racines-limites” d’un groupe de Coxeter W
- 2 Racines-limites, cône isotrope et sous-groupes diédraux
- 3 Action de W sur les racines-limites, propriétés topologiques et cône imaginaire de W

Groupes de Coxeter et systèmes de racines

Définition

Un **groupe de Coxeter** W est un groupe muni d'un ensemble générateur S d'involutions, et qui a une présentation de la forme :

$$W = \left\langle S \mid s^2 = 1 (\forall s \in S); (st)^{m_{s,t}} = 1 (\forall s \neq t \in S) \right\rangle ,$$

avec $m_{s,t} \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$ pour $s \neq t$.

- un groupe de Coxeter peut se représenter géométriquement comme **groupe engendré par des réflexions** ;
- un **système de racines** est un ensemble de vecteurs qui encodent les réflexions de W .

Groupes de Coxeter et systèmes de racines

Définition

Un **groupe de Coxeter** W est un groupe muni d'un ensemble générateur S d'involutions, et qui a une présentation de la forme :

$$W = \left\langle S \mid s^2 = 1 (\forall s \in S); (st)^{m_{s,t}} = 1 (\forall s \neq t \in S) \right\rangle ,$$

avec $m_{s,t} \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$ pour $s \neq t$.

- un groupe de Coxeter peut se représenter géométriquement comme **groupe engendré par des réflexions** ;
- un **système de racines** est un ensemble de vecteurs qui encodent les réflexions de W .

Groupes de Coxeter et systèmes de racines

Définition

Un **groupe de Coxeter** W est un groupe muni d'un ensemble générateur S d'involutions, et qui a une présentation de la forme :

$$W = \left\langle S \mid s^2 = 1 (\forall s \in S); (st)^{m_{s,t}} = 1 (\forall s \neq t \in S) \right\rangle ,$$

avec $m_{s,t} \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$ pour $s \neq t$.

- un groupe de Coxeter peut se représenter géométriquement comme **groupe engendré par des réflexions** ;
- un **système de racines** est un ensemble de vecteurs qui encodent les réflexions de W .

Une définition de système de racines

- V : e.v. réel de dimension finie
- $B(.,.)$: une forme bilinéaire symétrique sur V

Construction d'un système de racines dans (V, B) :

1. On part d'un **système simple** Δ , tel que :

- Δ est une base de V ;
- $\forall \alpha \in \Delta, B(\alpha, \alpha) = 1$;
- $\forall \alpha \neq \beta \in \Delta,$
 - soit $B(\alpha, \beta) = -\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)$, avec $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$,
 - soit $B(\alpha, \beta) \leq -1$.

Une définition de système de racines

- V : e.v. réel de dimension finie
- $B(.,.)$: une forme bilinéaire symétrique sur V

Construction d'un système de racines dans (V, B) :

1. On part d'un **système simple** Δ , tel que :

- Δ est une base de V ;
- $\forall \alpha \in \Delta, B(\alpha, \alpha) = 1$;
- $\forall \alpha \neq \beta \in \Delta,$
 - * soit $B(\alpha, \beta) = -\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)$, avec $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$,
 - * soit $B(\alpha, \beta) \leq -1$.

Une définition de système de racines

- V : e.v. réel de dimension finie
- $B(.,.)$: une forme bilinéaire symétrique sur V

Construction d'un système de racines dans (V, B) :

1. On part d'un **système simple** Δ , tel que :

- Δ est une base de V ;
- $\forall \alpha \in \Delta, B(\alpha, \alpha) = 1$;
- $\forall \alpha \neq \beta \in \Delta,$
 - soit $B(\alpha, \beta) = -\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)$, avec $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$,
 - soit $B(\alpha, \beta) \leq -1$.

Une définition de système de racines

- V : e.v. réel de dimension finie
- $B(.,.)$: une forme bilinéaire symétrique sur V

Construction d'un système de racines dans (V, B) :

1. On part d'un **système simple** Δ , tel que :

- Δ est une base de V ;
- $\forall \alpha \in \Delta, B(\alpha, \alpha) = 1$;
- $\forall \alpha \neq \beta \in \Delta,$
 - soit $B(\alpha, \beta) = -\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)$, avec $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$,
 - soit $B(\alpha, \beta) \leq -1$.

Une définition de système de racines

- V : e.v. réel de dimension finie
- $B(.,.)$: une forme bilinéaire symétrique sur V

Construction d'un système de racines dans (V, B) :

1. On part d'un **système simple** Δ , tel que :

- Δ est une base de V ;
- $\forall \alpha \in \Delta, B(\alpha, \alpha) = 1$;
- $\forall \alpha \neq \beta \in \Delta,$
 - soit $B(\alpha, \beta) = -\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)$, avec $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$,
 - soit $B(\alpha, \beta) \leq -1$.

Une définition de système de racines

- V : e.v. réel de dimension finie
- $B(.,.)$: une forme bilinéaire symétrique sur V

Construction d'un système de racines dans (V, B) :

1. On part d'un **système simple** Δ , tel que :

- Δ est une base de V ;
- $\forall \alpha \in \Delta, B(\alpha, \alpha) = 1$;
- $\forall \alpha \neq \beta \in \Delta,$
 - soit $B(\alpha, \beta) = -\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)$, avec $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$,
 - soit $B(\alpha, \beta) \leq -1$.

Une définition de système de racines

- V : e.v. réel de dimension finie
- $B(.,.)$: une forme bilinéaire symétrique sur V

Construction d'un système de racines dans (V, B) :

1. On part d'un **système simple** Δ , tel que :

- Δ est une base de V ;
- $\forall \alpha \in \Delta, B(\alpha, \alpha) = 1$;
- $\forall \alpha \neq \beta \in \Delta,$
 - soit $B(\alpha, \beta) = -\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)$, avec $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$,
 - soit $B(\alpha, \beta) \leq -1$.

Une définition de système de racines

2. Pour chaque $\alpha \in \Delta$, on définit la **B -réflexion** s_α :

$$\begin{aligned} s_\alpha : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto v - 2B(\alpha, v)\alpha. \end{aligned}$$

Remarque : $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$, et s_α fixe α^\perp .

Notation : $S = \{s_\alpha, \alpha \in \Delta\}$.

3. On construit le groupe de B -réflexion $W := \langle S \rangle$.

4. On fait agir W sur Δ pour obtenir le système de racines:

$$\Phi := W(\Delta).$$

Remarque : si $\rho = w(\alpha)$ (avec $\alpha \in \Delta$), $ws_\alpha w^{-1}$ est la B -réflexion associée à la racine ρ .

Une définition de système de racines

2. Pour chaque $\alpha \in \Delta$, on définit la **B-réflexion** s_α :

$$\begin{aligned} s_\alpha : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto v - 2B(\alpha, v)\alpha. \end{aligned}$$

Remarque : $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$, et s_α fixe α^\perp .

Notation : $S = \{s_\alpha, \alpha \in \Delta\}$.

3. On construit le groupe de B-réflexion $W := \langle S \rangle$.

4. On fait agir W sur Δ pour obtenir le système de racines:

$$\Phi := W(\Delta).$$

Remarque : si $\rho = w(\alpha)$ (avec $\alpha \in \Delta$), $ws_\alpha w^{-1}$ est la B-réflexion associée à la racine ρ .

Une définition de système de racines

2. Pour chaque $\alpha \in \Delta$, on définit la **B-réflexion** s_α :

$$\begin{aligned} s_\alpha : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto v - 2B(\alpha, v)\alpha. \end{aligned}$$

Remarque : $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$, et s_α fixe α^\perp .

Notation : $S = \{s_\alpha, \alpha \in \Delta\}$.

3. On construit le groupe de B-réflexion $W := \langle S \rangle$.

4. On fait agir W sur Δ pour obtenir le système de racines:

$$\Phi := W(\Delta).$$

Remarque : si $\rho = w(\alpha)$ (avec $\alpha \in \Delta$), $ws_\alpha w^{-1}$ est la B-réflexion associée à la racine ρ .

Une définition de système de racines

2. Pour chaque $\alpha \in \Delta$, on définit la **B-réflexion** s_α :

$$\begin{aligned} s_\alpha : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto v - 2B(\alpha, v)\alpha. \end{aligned}$$

Remarque : $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$, et s_α fixe α^\perp .

Notation : $S = \{s_\alpha, \alpha \in \Delta\}$.

3. On construit le groupe de **B-réflexion** $W := \langle S \rangle$.

4. On fait agir W sur Δ pour obtenir le système de racines:

$$\Phi := W(\Delta).$$

Remarque : si $\rho = w(\alpha)$ (avec $\alpha \in \Delta$), $ws_\alpha w^{-1}$ est la **B-réflexion** associée à la racine ρ .

Une définition de système de racines

2. Pour chaque $\alpha \in \Delta$, on définit la **B -réflexion** s_α :

$$\begin{aligned} s_\alpha : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto v - 2B(\alpha, v)\alpha. \end{aligned}$$

Remarque : $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$, et s_α fixe α^\perp .

Notation : $S = \{s_\alpha, \alpha \in \Delta\}$.

3. On construit le groupe de B -réflexion $W := \langle S \rangle$.

4. On fait agir W sur Δ pour obtenir le système de racines:

$$\Phi := W(\Delta).$$

Remarque : si $\rho = w(\alpha)$ (avec $\alpha \in \Delta$), $ws_\alpha w^{-1}$ est la B -réflexion associée à la racine ρ .

Une définition de système de racines

2. Pour chaque $\alpha \in \Delta$, on définit la **B-réflexion** s_α :

$$\begin{aligned} s_\alpha : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto v - 2B(\alpha, v)\alpha. \end{aligned}$$

Remarque : $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$, et s_α fixe α^\perp .

Notation : $S = \{s_\alpha, \alpha \in \Delta\}$.

3. On construit le groupe de **B-réflexion** $W := \langle S \rangle$.

4. On fait agir W sur Δ pour obtenir le système de racines:

$$\Phi := W(\Delta).$$

Remarque : si $\rho = w(\alpha)$ (avec $\alpha \in \Delta$), $ws_\alpha w^{-1}$ est la **B-réflexion** associée à la racine ρ .

Groupes de Coxeter et systèmes de racines

Théorème (Krammer)

- (W, S) est un système de Coxeter.
- L'ordre de $s_\alpha s_\beta$ est m si $B(\alpha, \beta) = -\cos(\pi/m)$, et ∞ si $B(\alpha, \beta) \leq -1$.
- Soit $\Phi^+ := \Phi \cap \text{cone}(\Delta)$. On a : $\Phi = \Phi^+ \sqcup (-\Phi^+)$.

Remarque : Inversement, à partir d'un groupe de Coxeter on peut construire un système de racines, en utilisant la représentation géométrique classique [Tits].

Groupes de Coxeter et systèmes de racines

Théorème (Krammer)

- (W, S) est un système de Coxeter.
- L'ordre de $s_\alpha s_\beta$ est m si $B(\alpha, \beta) = -\cos(\pi/m)$, et ∞ si $B(\alpha, \beta) \leq -1$.
- Soit $\Phi^+ := \Phi \cap \text{cone}(\Delta)$. On a : $\Phi = \Phi^+ \sqcup (-\Phi^+)$.

Remarque : Inversement, à partir d'un groupe de Coxeter on peut construire un système de racines, en utilisant la représentation géométrique classique [Tits].

Groupes de Coxeter et systèmes de racines

Théorème (Krammer)

- (W, S) est un système de Coxeter.
- L'ordre de $s_\alpha s_\beta$ est m si $B(\alpha, \beta) = -\cos(\pi/m)$, et ∞ si $B(\alpha, \beta) \leq -1$.
- Soit $\Phi^+ := \Phi \cap \text{cone}(\Delta)$. On a : $\Phi = \Phi^+ \sqcup (-\Phi^+)$.

Remarque : Inversement, à partir d'un groupe de Coxeter on peut construire un système de racines, en utilisant la représentation géométrique classique [Tits].

Groupes de Coxeter et systèmes de racines

Théorème (Krammer)

- (W, S) est un système de Coxeter.
- L'ordre de $s_\alpha s_\beta$ est m si $B(\alpha, \beta) = -\cos(\pi/m)$, et ∞ si $B(\alpha, \beta) \leq -1$.
- Soit $\Phi^+ := \Phi \cap \text{cone}(\Delta)$. On a : $\Phi = \Phi^+ \sqcup (-\Phi^+)$.

Remarque : Inversement, à partir d'un groupe de Coxeter on peut construire un système de racines, en utilisant la représentation géométrique classique [Tits].

Groupes de Coxeter et systèmes de racines

Théorème (Krammer)

- (W, S) est un système de Coxeter.
- L'ordre de $s_\alpha s_\beta$ est m si $B(\alpha, \beta) = -\cos(\pi/m)$, et ∞ si $B(\alpha, \beta) \leq -1$.
- Soit $\Phi^+ := \Phi \cap \text{cone}(\Delta)$. On a : $\Phi = \Phi^+ \sqcup (-\Phi^+)$.

Remarque : Inversement, à partir d'un groupe de Coxeter on peut construire un système de racines, en utilisant la représentation géométrique classique [Tits].

Systèmes de racines infinis

Pour les systèmes de racines finis :

Φ est fini $\Leftrightarrow W$ est fini ($\Leftrightarrow B$ est définie positive).

À quoi ressemble un système de racines infini?

L'exemple le plus simple, en rang 2:



Matrice de B dans la base (α, β) : $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Systèmes de racines infinis

Pour les systèmes de racines finis :

Φ est fini $\Leftrightarrow W$ est fini ($\Leftrightarrow B$ est définie positive).

À quoi ressemble un système de racines **infini**?

L'exemple le plus simple, en **rang 2**:



Matrice de B dans la base (α, β) : $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

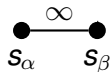
Systèmes de racines infinis

Pour les systèmes de racines finis :

Φ est fini $\Leftrightarrow W$ est fini ($\Leftrightarrow B$ est définie positive).

À quoi ressemble un système de racines **infini**?

L'exemple le plus simple, en **rang 2**:



Matrice de B dans la base (α, β) : $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Observations

- Les **normes** des racines tendent vers ∞ ;
- Les **directions** des racines tendent vers la direction du **cône isotrope Q** de B :

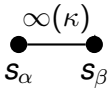
$$Q := \{v \in V, B(v, v) = 0\}.$$

(ici son équation est $v_\alpha^2 + v_\beta^2 - 2v_\alpha v_\beta = 0$, i.e., $Q = \text{Vect}(\alpha + \beta)$.)

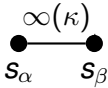
Et si $B(\alpha, \beta) < -1$?

- Matrice de B : $\begin{bmatrix} 1 & \kappa \\ \kappa & 1 \end{bmatrix}$ où $\kappa < -1$. On écrira 
- Q est la réunion de 2 droites.

Et si $B(\alpha, \beta) < -1$?

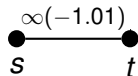
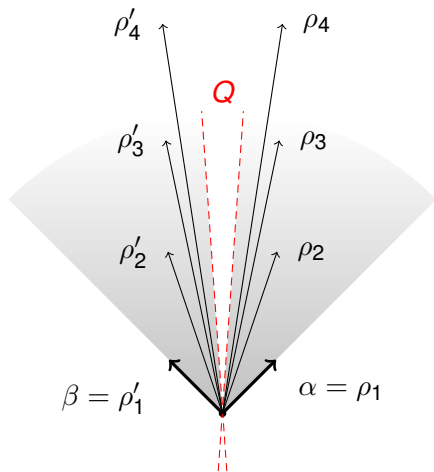
- Matrice de B : $\begin{bmatrix} 1 & \kappa \\ \kappa & 1 \end{bmatrix}$ où $\kappa < -1$. On écrira 
- Q est la réunion de 2 droites.

Et si $B(\alpha, \beta) < -1$?

- Matrice de B : $\begin{bmatrix} 1 & \kappa \\ \kappa & 1 \end{bmatrix}$ où $\kappa < -1$. On écrira  $\infty(\kappa)$
- Q est la réunion de 2 droites.

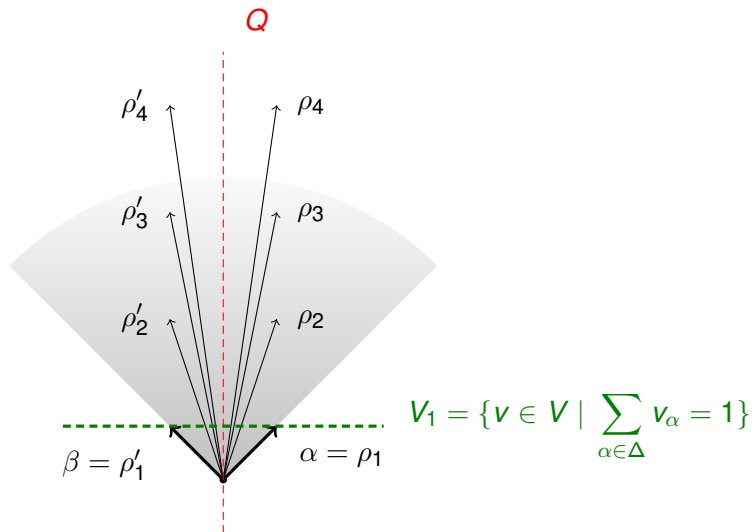
Et si $B(\alpha, \beta) < -1$?

- Matrice de B : $\begin{bmatrix} 1 & \kappa \\ \kappa & 1 \end{bmatrix}$ où $\kappa < -1$. On écrira $\overset{\infty(\kappa)}{\bullet \text{---} \bullet}$
 $s_\alpha \qquad s_\beta$
- Q est la réunion de 2 droites.

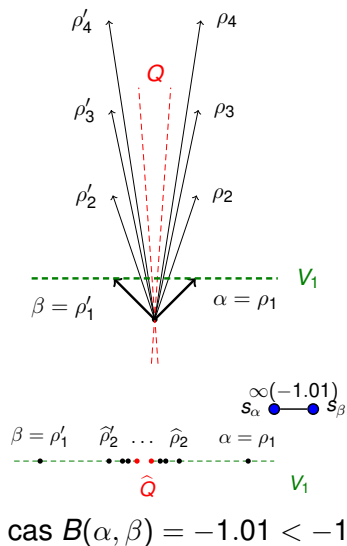
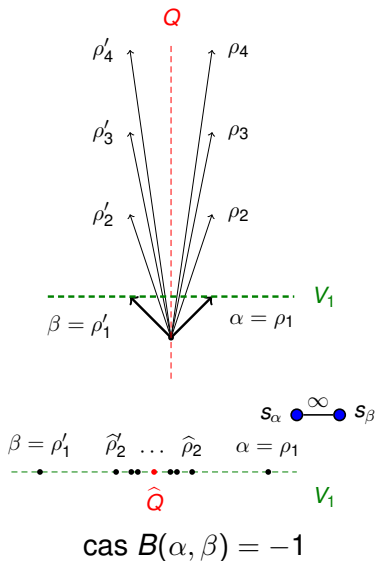


Comment voir des exemples en rang supérieur ?

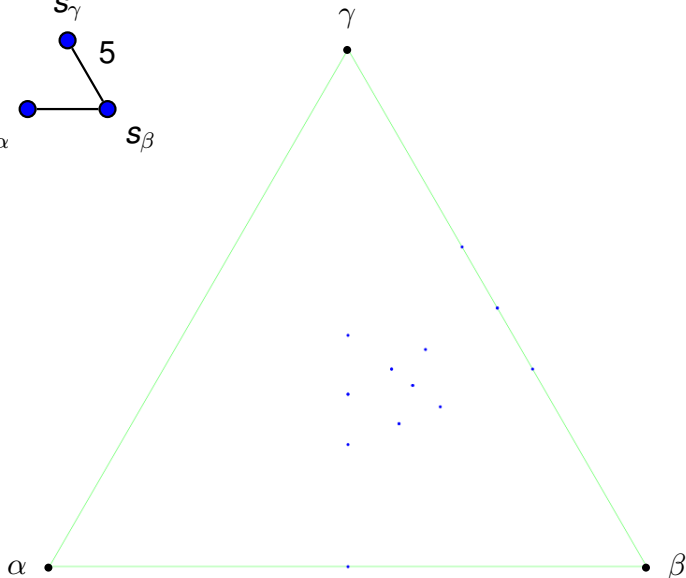
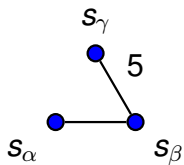
On coupe les directions des racines avec un hyperplan affine.



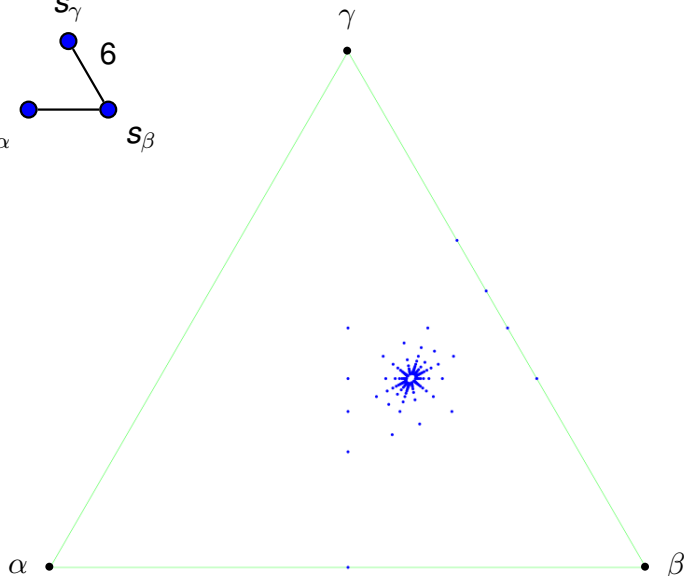
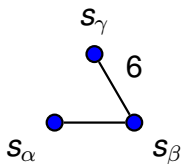
“Normalisation” des racines



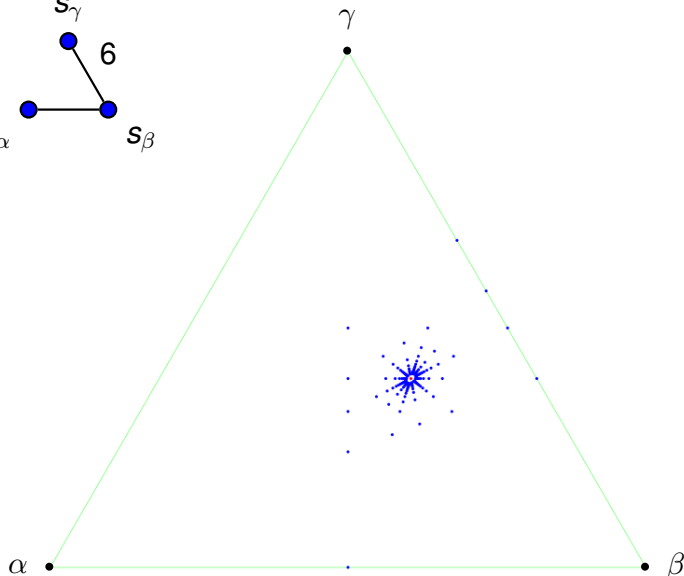
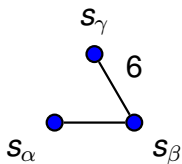
Exemples en rang 3: groupe fini, $\text{sgn } B = (3, 0)$. (H_3)



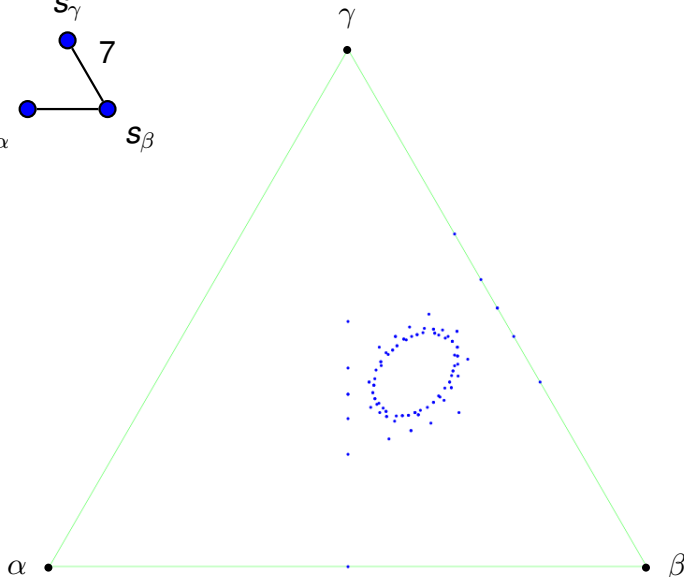
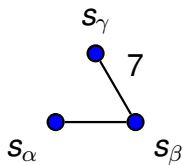
Exemples en rang 3: groupe affine, $\text{sgn } B = (2, 0)$ (\widetilde{G}_2)



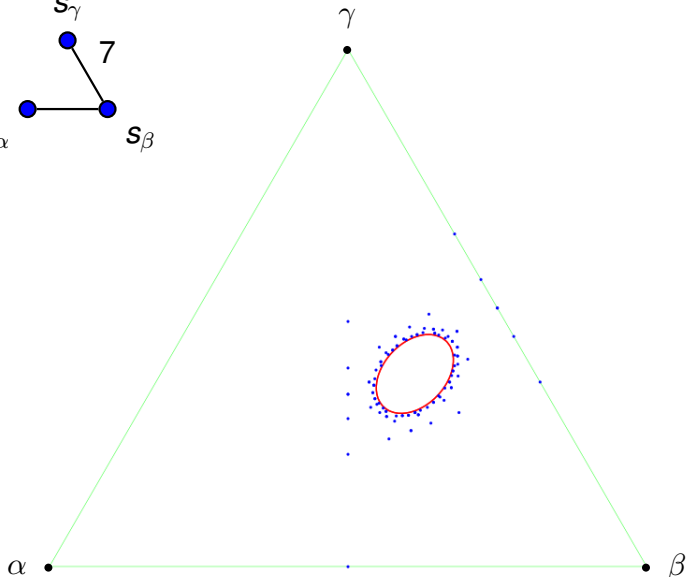
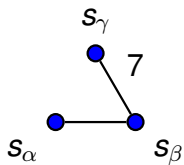
Exemples en rang 3: groupe affine, $\text{sgn } B = (2, 0)$ (\widetilde{G}_2)



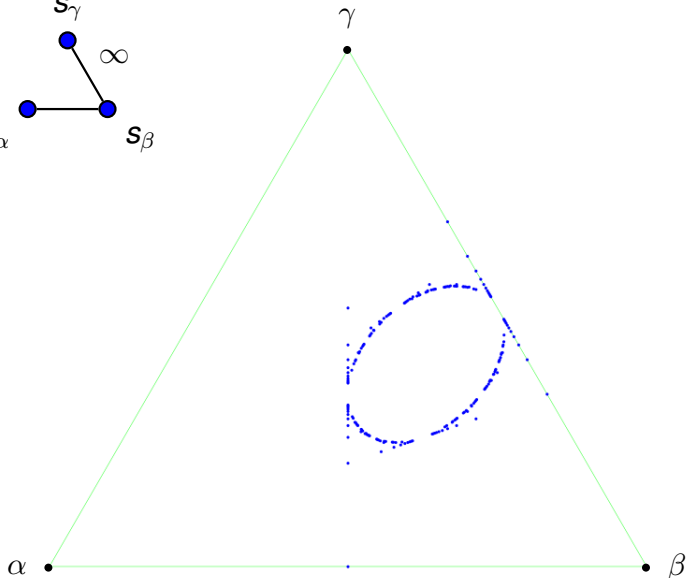
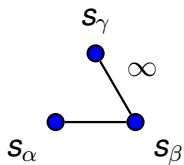
Exemples en rang 3: cas $\text{sgn } B = (2, 1)$



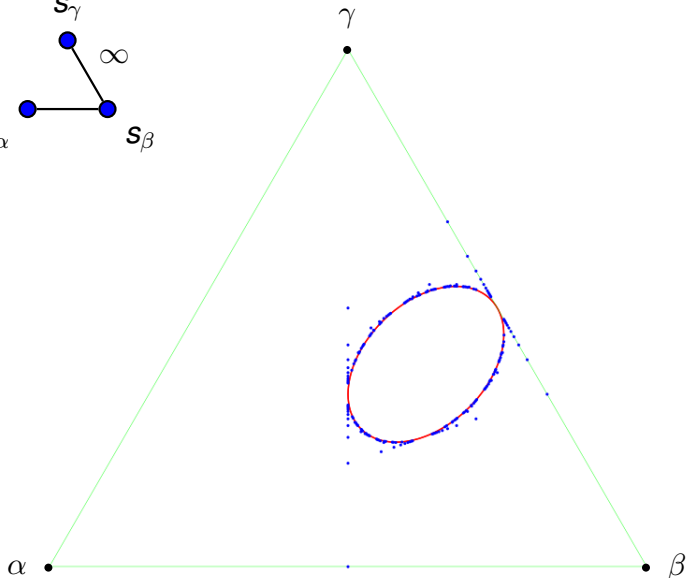
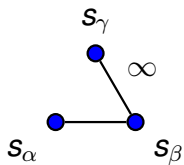
Exemples en rang 3: cas $\text{sgn } B = (2, 1)$



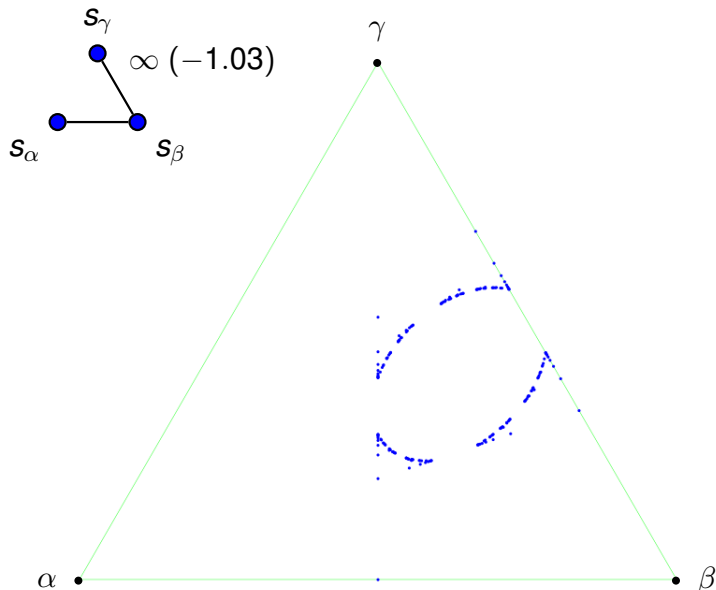
Exemples en rang 3: cas $\text{sgn } B = (2, 1)$



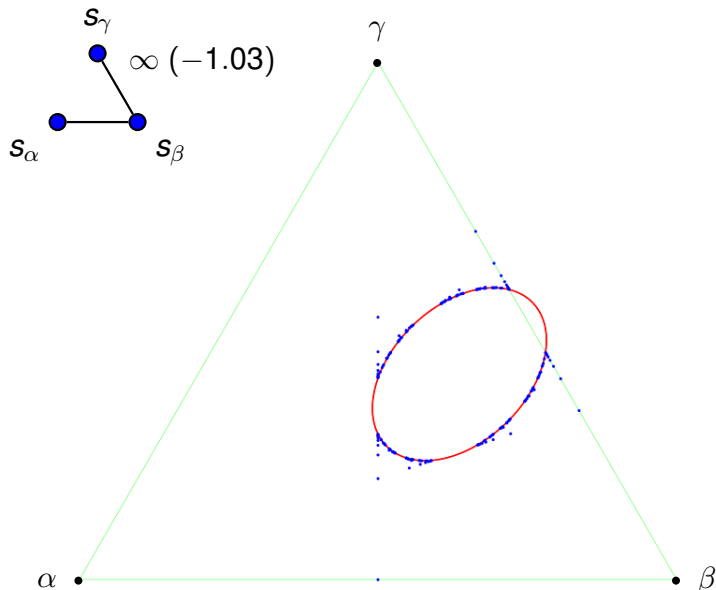
Exemples en rang 3: cas $\text{sgn } B = (2, 1)$



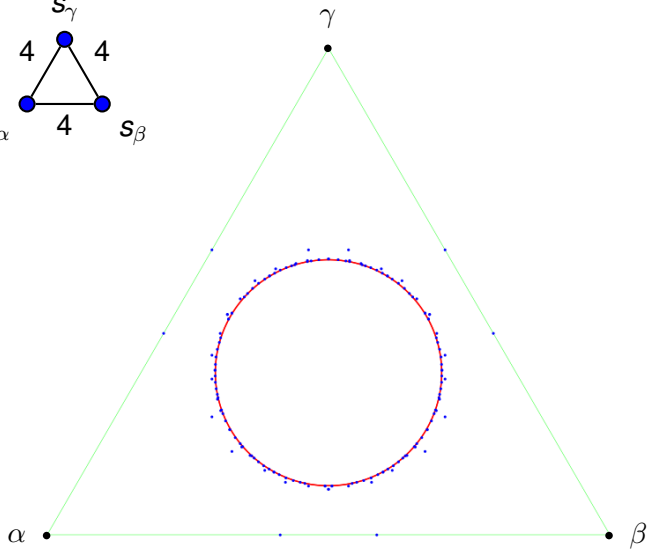
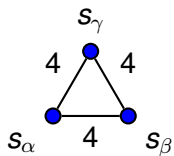
Exemples en rang 3: cas $\text{sgn } B = (2, 1)$



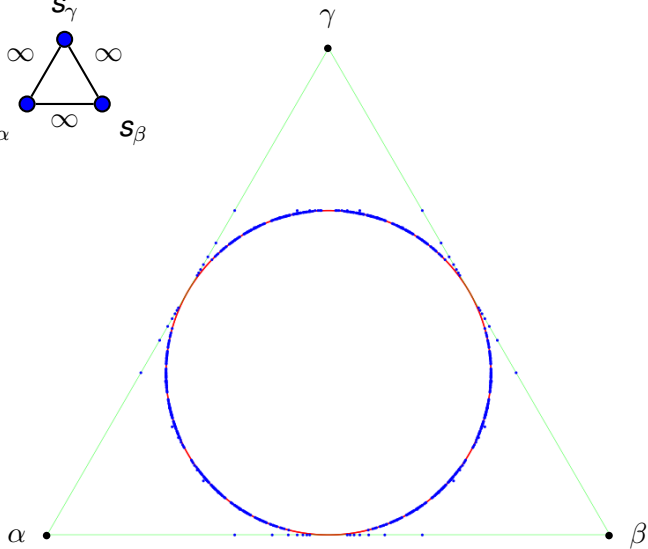
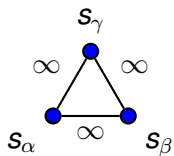
Exemples en rang 3: cas $\text{sgn } B = (2, 1)$



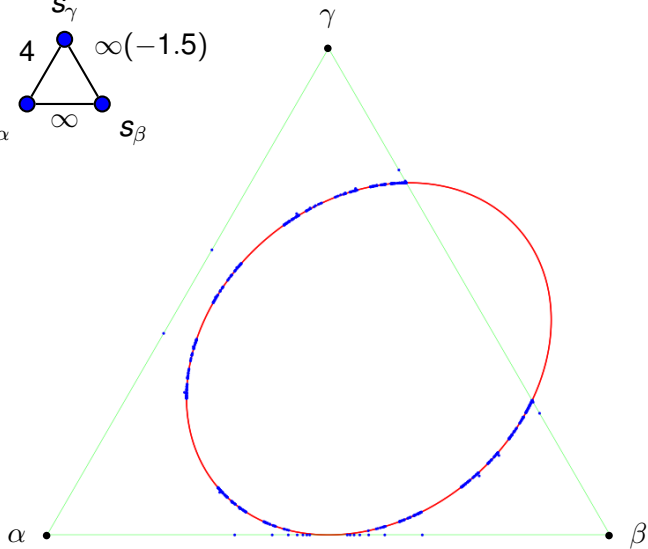
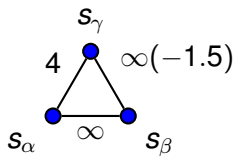
Exemples en rang 3: cas $\text{sgn } B = (2, 1)$



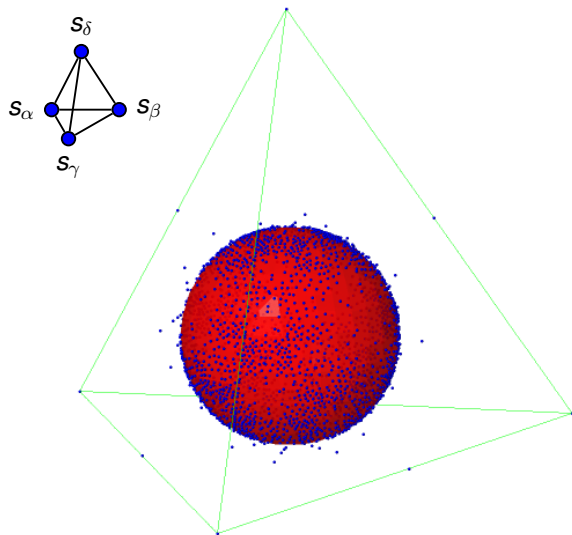
Exemples en rang 3: cas $\text{sgn } B = (2, 1)$



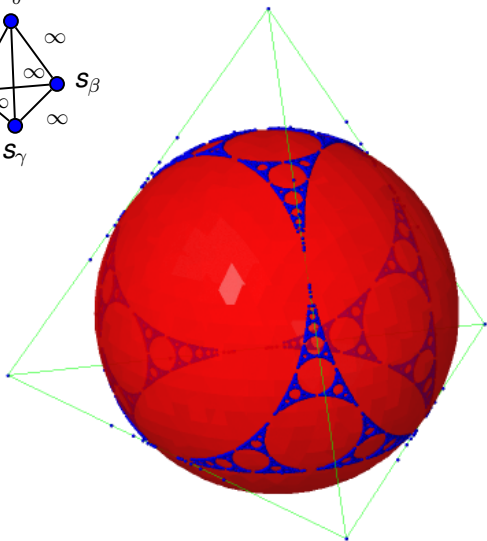
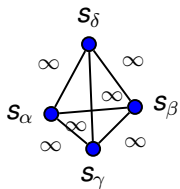
Exemples en rang 3: cas $\text{sgn } B = (2, 1)$



Exemples en rang 4



Exemples en rang 4



Plan

- 1 Systèmes de racines et “racines-limites” d’un groupe de Coxeter W
- 2 Racines-limites, cône isotrope et sous-groupes diédraux
- 3 Action de W sur les racines-limites, propriétés topologiques et cône imaginaire de W

“Racines-limites” et cône isotrope

Théorème (Hohlweg-Labbé-R.)

Soit Φ un système de racines d'un groupe de Coxeter (infini), et $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite injective de Φ . Alors :

- 1 $\|\rho_n\|$ tend vers ∞ ;
- 2 si la suite de racines normalisées $\hat{\rho}_n$ a une limite ℓ , alors

$$\ell \in \hat{Q} \cap \text{conv}(\Delta).$$

Propriété prouvée indépendamment dans d'autres contextes : [Kac 90] (pour les groupes de Weyl d'algèbres de Kac-Moody), généralisé par [Dyer 2012] (travaux sur le cône imaginaire).

\rightsquigarrow **Problème:** comprendre l'ensemble des limites possibles, i.e., les **points d'accumulation** de $\hat{\Phi}$:

$$E(\Phi) := \text{Acc}(\hat{\Phi}).$$

Pour faire court, on les appelle **racines-limites**.

“Racines-limites” et cône isotrope

Théorème (Hohlweg-Labbé-R.)

Soit Φ un système de racines d'un groupe de Coxeter (infini), et $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite injective de Φ . Alors :

- 1 $\|\rho_n\|$ tend vers ∞ ;
- 2 si la suite de racines normalisées $\hat{\rho}_n$ a une limite ℓ , alors

$$\ell \in \hat{Q} \cap \text{conv}(\Delta).$$

Propriété prouvée indépendamment dans d'autres contextes : [Kac 90] (pour les groupes de Weyl d'algèbres de Kac-Moody), généralisé par [Dyer 2012] (travaux sur le cône imaginaire).

\rightsquigarrow **Problème**: comprendre l'ensemble des limites possibles, i.e., les **points d'accumulation** de $\hat{\Phi}$:

$$E(\Phi) := \text{Acc}(\hat{\Phi}).$$

Pour faire court, on les appelle **racines-limites**.

“Racines-limites” et cône isotrope

Théorème (Hohlweg-Labbé-R.)

Soit Φ un système de racines d'un groupe de Coxeter (infini), et $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite injective de Φ . Alors :

- 1 $\|\rho_n\|$ tend vers ∞ ;
- 2 si la suite de racines normalisées $\hat{\rho}_n$ a une limite ℓ , alors

$$\ell \in \hat{Q} \cap \text{conv}(\Delta).$$

Propriété prouvée indépendamment dans d'autres contextes : [Kac 90] (pour les groupes de Weyl d'algèbres de Kac-Moody), généralisé par [Dyer 2012] (travaux sur le cône imaginaire).

\rightsquigarrow **Problème**: comprendre l'ensemble des limites possibles, i.e., les **points d'accumulation** de $\hat{\Phi}$:

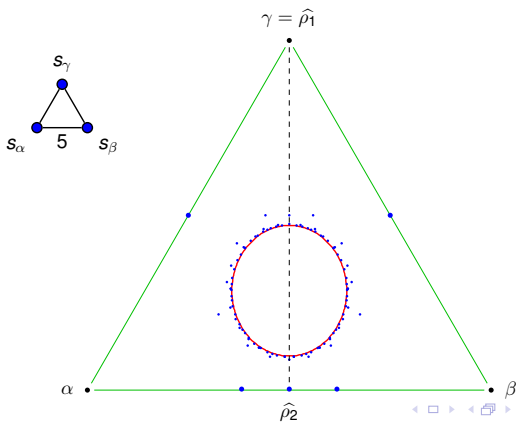
$$E(\Phi) := \text{Acc}(\hat{\Phi}).$$

Pour faire court, on les appelle **racines-limites**.

Comment construire certaines racines-limites

Fixons 2 racines ρ_1, ρ_2 dans $\Phi^+ \rightsquigarrow$ on obtient un sous-groupe de réflexion **de rang 2** de W , et un sous-système de racines Φ' .

- $\widehat{\Phi}'$ vit dans la droite $L(\widehat{\rho}_1, \widehat{\rho}_2)$;
- le cône isotrope de Φ' est $Q \cap \text{Vect}(\rho_1, \rho_2)$;
- \rightsquigarrow on construit les racines-limites de Φ' :
 $E(\Phi') = Q \cap L(\widehat{\rho}_1, \widehat{\rho}_2)$ (0,1 ou 2 points).



Les racines-limites diédrales

Définition

L'ensemble $E_2(\Phi)$ des **racines-limites diédrales** d'un système de racines Φ est le sous-ensemble de $E(\Phi)$ formé par **la réunion des $E(\Phi')$** , pour Φ' sous-système de racines de **rang 2** de Φ . De façon équivalente :

$$E_2(\Phi) := \bigcup_{\rho_1, \rho_2 \in \Phi} L(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) \cap Q.$$

Remarque : E_2 est dénombrable.

Théorème (Hohlweg-Labbé-R.)

L'ensemble $E_2(\Phi)$ des racines-limites diédrales est **dense** dans $E(\Phi)$.

- E est fermé, donc $E = \overline{E_2}$;
- en général, $E_2 \subsetneq E$. Parfois même $E = \hat{Q}$!

Les racines-limites diédrales

Définition

L'ensemble $E_2(\Phi)$ des **racines-limites diédrales** d'un système de racines Φ est le sous-ensemble de $E(\Phi)$ formé par **la réunion des $E(\Phi')$** , pour Φ' sous-système de racines de **rang 2** de Φ . De façon équivalente :

$$E_2(\Phi) := \bigcup_{\rho_1, \rho_2 \in \Phi} L(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) \cap Q.$$

Remarque : E_2 est dénombrable.

Théorème (Hohlweg-Labbé-R.)

L'ensemble $E_2(\Phi)$ des racines-limites diédrales est **dense** dans $E(\Phi)$.

- E est fermé, donc $E = \overline{E_2}$;
- en général, $E_2 \subsetneq E$. Parfois même $E = \hat{Q}$!

Les racines-limites diédrales

Définition

L'ensemble $E_2(\Phi)$ des **racines-limites diédrales** d'un système de racines Φ est le sous-ensemble de $E(\Phi)$ formé par **la réunion des $E(\Phi')$** , pour Φ' sous-système de racines de **rang 2** de Φ . De façon équivalente :

$$E_2(\Phi) := \bigcup_{\rho_1, \rho_2 \in \Phi} L(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) \cap Q.$$

Remarque : E_2 est dénombrable.

Théorème (Hohlweg-Labbé-R.)

L'ensemble $E_2(\Phi)$ des **racines-limites diédrales** est **dense** dans $E(\Phi)$.

- E est fermé, donc $E = \overline{E_2}$;
- en général, $E_2 \subsetneq E$. Parfois même $E = \hat{Q}$!

Les racines-limites diédrales

Définition

L'ensemble $E_2(\Phi)$ des **racines-limites diédrales** d'un système de racines Φ est le sous-ensemble de $E(\Phi)$ formé par la **réunion des $E(\Phi')$** , pour Φ' sous-système de racines de **rang 2** de Φ . De façon équivalente :

$$E_2(\Phi) := \bigcup_{\rho_1, \rho_2 \in \Phi} L(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) \cap Q.$$

Remarque : E_2 est dénombrable.

Théorème (Hohlweg-Labbé-R.)

L'ensemble $E_2(\Phi)$ des **racines-limites diédrales** est **dense** dans $E(\Phi)$.

- E est fermé, donc $E = \overline{E_2}$;
- en général, $E_2 \subsetneq E$. Parfois même $E = \hat{Q}$!

Plan

- 1 Systèmes de racines et “racines-limites” d’un groupe de Coxeter W
- 2 Racines-limites, cône isotrope et sous-groupes diédraux
- 3 Action de W sur les racines-limites, propriétés topologiques et cône imaginaire de W

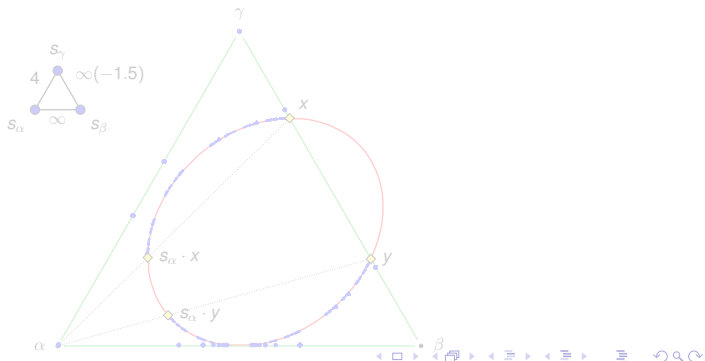
Action de groupe de W sur E

Action naturelle de W sur une partie de V_1 : $w \cdot v := \widehat{w(v)}$.

Définie sur $D = V_1 \cap \bigcap_{w \in W} w(V \setminus V_0)$, où $V_0 = \widehat{V}_1$.

Proposition

- $E(\Phi) \subseteq D$ et $E(\Phi)$ est stable sous l'action de W .
- Pour $\alpha \in \Phi$ et $x \in E$, $\widehat{Q} \cap L(\widehat{\alpha}, x) = \{x, s_\alpha \cdot x\}$.



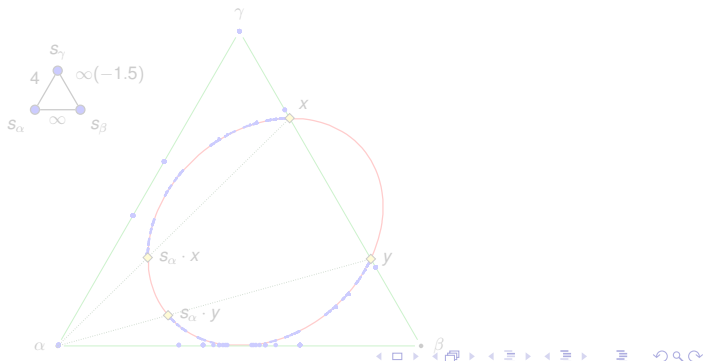
Action de groupe de W sur E

Action naturelle de W sur une partie de V_1 : $w \cdot v := \widehat{w(v)}$.

Définie sur $D = V_1 \cap \bigcap_{w \in W} w(V \setminus V_0)$, où $V_0 = \widehat{V}_1$.

Proposition

- $E(\Phi) \subseteq D$ et $E(\Phi)$ est stable sous l'action de W .
- Pour $\alpha \in \Phi$ et $x \in E$, $\widehat{Q} \cap L(\widehat{\alpha}, x) = \{x, s_\alpha \cdot x\}$.



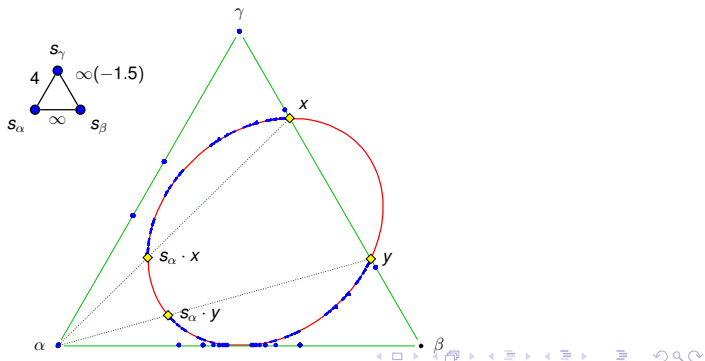
Action de groupe de W sur E

Action naturelle de W sur une partie de V_1 : $w \cdot v := \widehat{w(v)}$.

Définie sur $D = V_1 \cap \bigcap_{w \in W} w(V \setminus V_0)$, où $V_0 = \widehat{V_1}$.

Proposition

- $E(\Phi) \subseteq D$ et $E(\Phi)$ est stable sous l'action de W .
- Pour $\alpha \in \Phi$ et $x \in E$, $\widehat{Q} \cap L(\widehat{\alpha}, x) = \{x, s_\alpha \cdot x\}$.



Action de groupe de W sur E

Action naturelle de W sur une partie de V_1 : $w \cdot v := \widehat{w(v)}$.

Définie sur $D = V_1 \cap \bigcap_{w \in W} w(V \setminus V_0)$, où $V_0 = \widehat{V_1}$.

Proposition

- $E(\Phi) \subseteq D$ et $E(\Phi)$ est stable sous l'action de W .
- Pour $\alpha \in \Phi$ et $x \in E$, $\widehat{Q} \cap L(\widehat{\alpha}, x) = \{x, s_\alpha \cdot x\}$.

Théorème (Dyer-Hohlweg-R.)

Si W est infini, non affine, et irréductible, l'action de W sur E est *fidèle*.

- On montre que E ne peut pas être inclus dans une union finie de sous-espaces affines de V_1 .
- On utilise le lien avec le "cône imaginaire" de Φ étudié par Dyer.

Action de groupe de W sur E

Action naturelle de W sur une partie de V_1 : $w \cdot v := \widehat{w(v)}$.

Définie sur $D = V_1 \cap \bigcap_{w \in W} w(V \setminus V_0)$, où $V_0 = \widehat{V_1}$.

Proposition

- $E(\Phi) \subseteq D$ et $E(\Phi)$ est stable sous l'action de W .
- Pour $\alpha \in \Phi$ et $x \in E$, $\widehat{Q} \cap L(\widehat{\alpha}, x) = \{x, s_\alpha \cdot x\}$.

Théorème (Dyer-Hohlweg-R.)

Si W est infini, non affine, et irréductible, l'action de W sur E est *fidèle*.

- On montre que E ne peut pas être inclus dans une union finie de sous-espaces affines de V_1 .
- On utilise le lien avec le "cône imaginaire" de Φ étudié par Dyer.

Action de groupe de W sur E

Action naturelle de W sur une partie de V_1 : $w \cdot v := \widehat{w(v)}$.

Définie sur $D = V_1 \cap \bigcap_{w \in W} w(V \setminus V_0)$, où $V_0 = \widehat{V_1}$.

Proposition

- $E(\Phi) \subseteq D$ et $E(\Phi)$ est stable sous l'action de W .
- Pour $\alpha \in \Phi$ et $x \in E$, $\widehat{Q} \cap L(\widehat{\alpha}, x) = \{x, s_\alpha \cdot x\}$.

Théorème (Dyer-Hohlweg-R.)

Si W est infini, non affine, et irréductible, l'action de W sur E est *fidèle*.

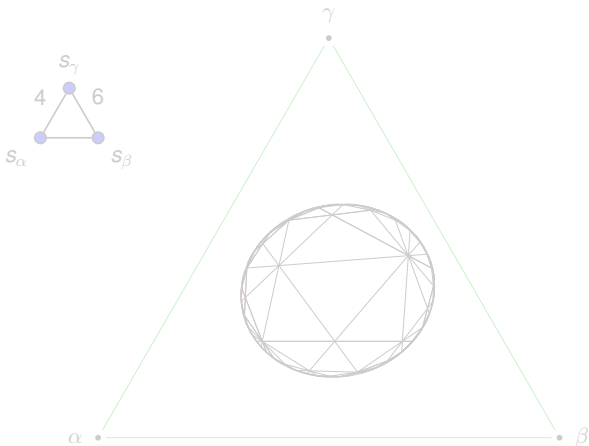
- On montre que E ne peut pas être inclus dans une union finie de sous-espaces affines de V_1 .
- On utilise le lien avec le “cône imaginaire” de Φ étudié par Dyer.

Enveloppe convexe de E et cône imaginaire

Définition (Kac, Hée, Dyer...)

Le **cône imaginaire** de Φ est :

$$\mathcal{Z} := \{w(v) \mid w \in W, v \in \text{cone}(\Delta), \text{ et } \forall \alpha \in \Delta, B(\alpha, v) \leq 0\}.$$

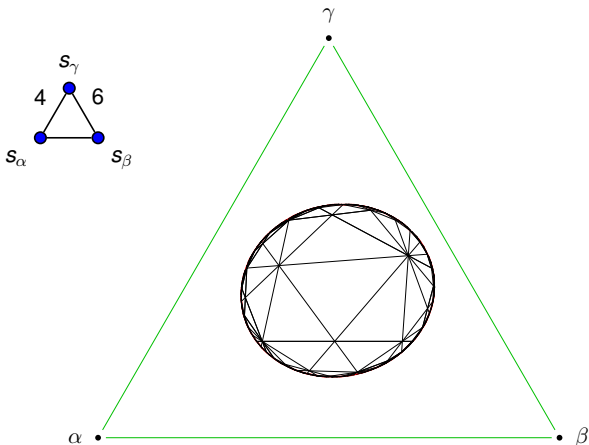


Enveloppe convexe de E et cône imaginaire

Définition (Kac, Hée, Dyer...)

Le **cône imaginaire** de Φ est :

$$\mathcal{Z} := \{w(v) \mid w \in W, v \in \text{cone}(\Delta), \text{ et } \forall \alpha \in \Delta, B(\alpha, v) \leq 0\}.$$



Enveloppe convexe de E et cône imaginaire

Définition (Kac, Hée, Dyer...)

Le **cône imaginaire** de Φ est :

$$\mathcal{Z} := \{w(\nu) \mid w \in W, \nu \in \text{cone}(\Delta), \text{ et } \forall \alpha \in \Delta, B(\alpha, \nu) \leq 0\}.$$

Soit $C = \text{conv}(E)$ l'enveloppe convexe des racines-limites.

Théorème (Dyer)

Le cône positif sur E est égal à l'adhérence du cône imaginaire \mathcal{Z} , i.e. :

$$C = \overline{\mathcal{Z}} \cap V_1.$$

Enveloppe convexe de E et cône imaginaire

Définition (Kac, Hée, Dyer...)

Le **cône imaginaire** de Φ est :

$$\mathcal{Z} := \{w(\nu) \mid w \in W, \nu \in \text{cone}(\Delta), \text{ et } \forall \alpha \in \Delta, B(\alpha, \nu) \leq 0\}.$$

Soit $C = \text{conv}(E)$ l'enveloppe convexe des racines-limites.

Théorème (Dyer)

Le cône positif sur E est égal à l'adhérence du cône imaginaire \mathcal{Z} , i.e. :

$$C = \overline{\mathcal{Z}} \cap V_1.$$

Points extrêmes de C et orbite d'un point

Théorème (Dyer)

Si W est irréductible infini, alors pour tout $x \in C = \text{conv}(E)$,
 $\text{conv}(\overline{W \cdot x}) = C$.

On note C_{ext} l'ensemble des points extrêmes de C .

Théorème (Dyer-Hohlweg-R.)

C_{ext} est dense dans E .

Corollaire (Minimalité de l'action de W sur E)

Si W est irréductible infini, alors pour tout $x \in E$, l'orbite de x sous l'action de W est dense dans E :

$$\overline{W \cdot x} = E.$$

Points extrêmes de C et orbite d'un point

Théorème (Dyer)

Si W est irréductible infini, alors pour tout $x \in C = \text{conv}(E)$,
 $\text{conv}(\overline{W \cdot x}) = C$.

On note C_{ext} l'ensemble des points extrêmes de C .

Théorème (Dyer-Hohlweg-R.)

C_{ext} est dense dans E .

Corollaire (Minimalité de l'action de W sur E)

Si W est irréductible infini, alors pour tout $x \in E$, l'orbite de x sous l'action de W est dense dans E :

$$\overline{W \cdot x} = E.$$

Points extrêmes de C et orbite d'un point

Théorème (Dyer)

Si W est irréductible infini, alors pour tout $x \in C = \text{conv}(E)$,
 $\text{conv}(\overline{W \cdot x}) = C$.

On note C_{ext} l'ensemble des **points extrêmes** de C .

Théorème (Dyer-Hohlweg-R.)

C_{ext} est dense dans E .

Corollaire (Minimalité de l'action de W sur E)

Si W est irréductible infini, alors pour tout $x \in E$, l'orbite de x sous l'action de W est dense dans E :

$$\overline{W \cdot x} = E.$$

Points extrêmes de C et orbite d'un point

Théorème (Dyer)

Si W est irréductible infini, alors pour tout $x \in C = \text{conv}(E)$,
 $\text{conv}(\overline{W \cdot x}) = C$.

On note C_{ext} l'ensemble des points extrêmes de C .

Théorème (Dyer-Hohlweg-R.)

C_{ext} est dense dans E .

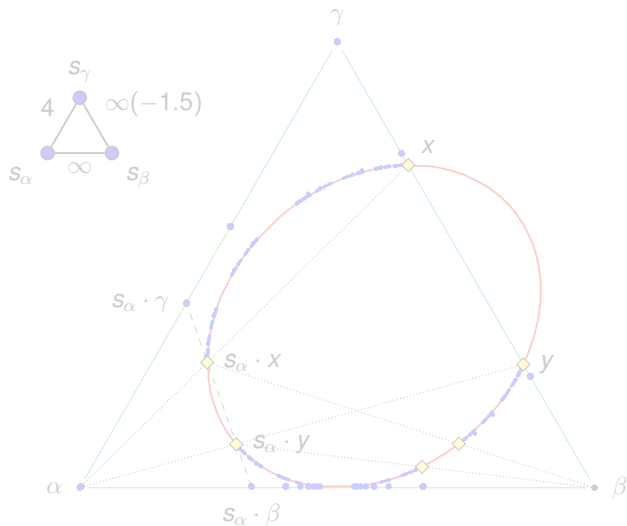
Corollaire (Minimalité de l'action de W sur E)

Si W est irréductible infini, alors pour tout $x \in E$, l'orbite de x sous l'action de W est dense dans E :

$$\overline{W \cdot x} = E.$$

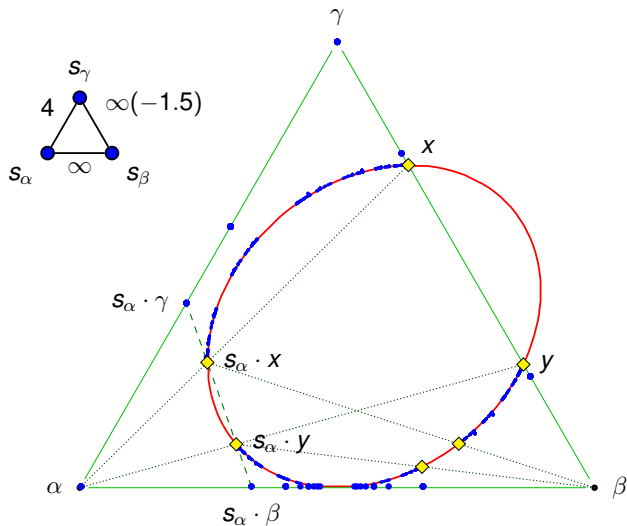
Description "fractale" d'une partie dense de E

On part des intersections de \widehat{Q} avec les faces de $\text{conv}(\Delta)$, et on fait agir W .

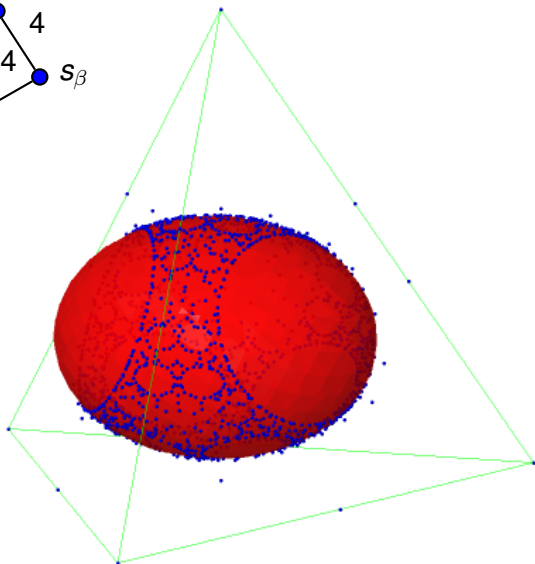
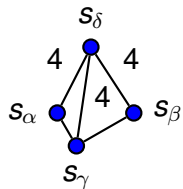


Description "fractale" d'une partie dense de E

On part des intersections de \widehat{Q} avec les faces de $\text{conv}(\Delta)$, et on fait agir W .



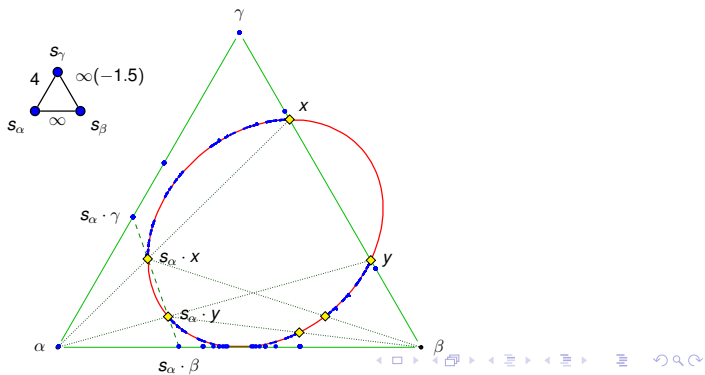
Description "fractale" d'une partie dense de E



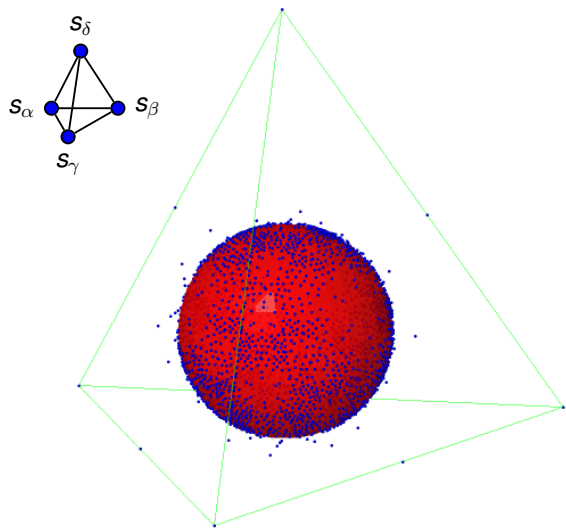
Peut-on décrire E directement?

Conjecture

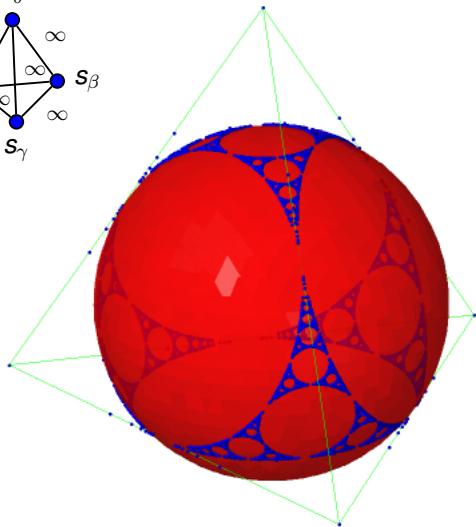
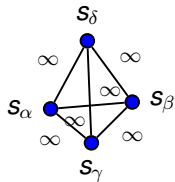
- Si $\widehat{Q} \subseteq \text{conv}(\Delta)$, alors $E(\Phi) = \widehat{Q}$.
- En général, $E(\Phi)$ est égal à \widehat{Q} privé de toutes les images par l'action de W des parties de \widehat{Q} qui sont à l'extérieur de $\text{conv}(\Delta)$, i.e. : $E(\Phi) = \widehat{Q} \cap \bigcap_{w \in W} w \cdot \text{conv}(\Delta)$.



Cas où \hat{Q} est intérieur



Cas où \widehat{Q} coupe les faces



Conjecture équivalente

Conjecture

- Si $\widehat{Q} \subseteq \text{conv}(\Delta)$, alors $E(\Phi) = \widehat{Q}$.
- En général, $E(\Phi)$ est égal à \widehat{Q} privé de toutes les images par l'action de W des parties de \widehat{Q} qui sont à l'extérieur de $\text{conv}(\Delta)$, i.e. : $E(\Phi) = \widehat{Q} \cap \bigcap_{w \in W} w \cdot \text{conv}(\Delta)$.

Or $\bigcap_{w \in W} w(\text{cone}(\Delta)) = \overline{Z} = \text{cone}(E)$ [Dyer], donc :

$$\text{Conjecture} \Leftrightarrow E = \text{conv}(E) \cap \widehat{Q}.$$

Vrai dans le cas où B est de signature $(n-1, 1)$ (on peut se ramener au cas où \widehat{Q} est une sphère).

Conjecture équivalente

Conjecture

- Si $\hat{Q} \subseteq \text{conv}(\Delta)$, alors $E(\Phi) = \hat{Q}$.
- En général, $E(\Phi)$ est égal à \hat{Q} privé de toutes les images par l'action de W des parties de \hat{Q} qui sont à l'extérieur de $\text{conv}(\Delta)$, i.e. : $E(\Phi) = \hat{Q} \cap \bigcap_{w \in W} w \cdot \text{conv}(\Delta)$.

Or $\bigcap_{w \in W} w(\text{cone}(\Delta)) = \bar{Z} = \text{cone}(E)$ [Dyer], donc :

$$\text{Conjecture} \Leftrightarrow E = \text{conv}(E) \cap \hat{Q}.$$

Vrai dans le cas où B est de signature $(n-1, 1)$ (on peut se ramener au cas où \hat{Q} est une sphère).

Conjecture équivalente

Conjecture

- Si $\widehat{Q} \subseteq \text{conv}(\Delta)$, alors $E(\Phi) = \widehat{Q}$.
- En général, $E(\Phi)$ est égal à \widehat{Q} privé de toutes les images par l'action de W des parties de \widehat{Q} qui sont à l'extérieur de $\text{conv}(\Delta)$, i.e. : $E(\Phi) = \widehat{Q} \cap \bigcap_{w \in W} w \cdot \text{conv}(\Delta)$.

Or $\bigcap_{w \in W} w(\text{cone}(\Delta)) = \overline{Z} = \text{cone}(E)$ [Dyer], donc :

$$\text{Conjecture} \Leftrightarrow E = \text{conv}(E) \cap \widehat{Q}.$$

Vrai dans le cas où B est de signature $(n-1, 1)$ (on peut se ramener au cas où \widehat{Q} est une sphère).

Autres questions

- Comment E se comporte vis-à-vis de la restriction aux **sous-groupes paraboliques** ?
Soit $I \subseteq \Delta$, W_I le sous-groupe parabolique associé, $\Phi_I = W_I(\Delta_I)$, et $V_I = \text{Vect}(I) \cap V_1$. Alors $E(\Phi_I) \neq E(\Phi) \cap V_I$ en général! (contre-exemple en rang 5). Mais ce type de propriété de bonne restriction est valide pour $E_2(\Phi)$ et pour d'autres sous-ensembles de E "naturels"...
- Propriétés d'autosimilarité. En rang 4, lien avec la géométrie hyperbolique et les **groupes kleinien**s (ensemble-limite en forme de **cercles d'Apollonius**).

Autres questions

- Comment E se comporte vis-à-vis de la restriction aux **sous-groupes paraboliques** ?
Soit $I \subseteq \Delta$, W_I le sous-groupe parabolique associé, $\Phi_I = W_I(\Delta_I)$, et $V_I = \text{Vect}(I) \cap V_1$. Alors $E(\Phi_I) \neq E(\Phi) \cap V_I$ en général! (contre-exemple en rang 5). Mais ce type de propriété de bonne restriction est valide pour $E_2(\Phi)$ et pour d'autres sous-ensembles de E "naturels"...
- Propriétés d'autosimilarité. En rang 4, lien avec la géométrie hyperbolique et les **groupes kleinien**s (ensemble-limite en forme de **cercles d'Apollonius**).

Merci !

Références:

- Ch. Hohlweg, J.-P. Labbé, V. Ripoll, *Asymptotical behaviour of roots of infinite Coxeter groups I*, arXiv:1112.5415.
- M. Dyer, *Imaginary cone and reflection subgroups of Coxeter groups*, arXiv:1210.5206.
- M. Dyer, Ch. Hohlweg, V. Ripoll, *Asymptotical behaviour of roots of infinite Coxeter groups II*, en préparation.