

# Comportement asymptotique des systèmes de racines de groupes de Coxeter infinis

Vivien RIPOLL

LaCIM, Université du Québec à Montréal

novembre 2012

Travaux en collaboration avec

- **Matthew Dyer** (University of Notre Dame)
- **Christophe Hohlweg** (UQÀM)
- **Jean-Philippe Labbé** (FU Berlin)

# Plan

- 1 Systèmes de racines et “racines-limites” d’un groupe de Coxeter  $W$
- 2 Racines-limites, cône isotrope et sous-groupes diédraux
- 3 Action de  $W$  sur les racines-limites, propriétés topologiques et cône imaginaire de  $W$

# Plan

- 1 Systèmes de racines et “racines-limites” d’un groupe de Coxeter  $W$
- 2 Racines-limites, cône isotrope et sous-groupes diédraux
- 3 Action de  $W$  sur les racines-limites, propriétés topologiques et cône imaginaire de  $W$

# Groupes de Coxeter et systèmes de racines

## Définition

Un **groupe de Coxeter**  $W$  est un groupe muni d'un ensemble générateur  $S$  d'involutions, et qui a une présentation de la forme :

$$W = \left\langle S \mid s^2 = 1 (\forall s \in S); (st)^{m_{s,t}} = 1 (\forall s \neq t \in S) \right\rangle ,$$

avec  $m_{s,t} \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$  pour  $s \neq t$ .

- un groupe de Coxeter peut se représenter géométriquement comme **groupe engendré par des réflexions** ;
- un **système de racines** est un ensemble de vecteurs qui encodent les réflexions de  $W$ .

# Groupes de Coxeter et systèmes de racines

## Définition

Un **groupe de Coxeter**  $W$  est un groupe muni d'un ensemble générateur  $S$  d'involutions, et qui a une présentation de la forme :

$$W = \left\langle S \mid s^2 = 1 (\forall s \in S); (st)^{m_{s,t}} = 1 (\forall s \neq t \in S) \right\rangle ,$$

avec  $m_{s,t} \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$  pour  $s \neq t$ .

- un groupe de Coxeter peut se représenter géométriquement comme **groupe engendré par des réflexions** ;
- un **système de racines** est un ensemble de vecteurs qui encodent les réflexions de  $W$ .

# Groupes de Coxeter et systèmes de racines

## Définition

Un **groupe de Coxeter**  $W$  est un groupe muni d'un ensemble générateur  $S$  d'involutions, et qui a une présentation de la forme :

$$W = \left\langle S \mid s^2 = 1 (\forall s \in S); (st)^{m_{s,t}} = 1 (\forall s \neq t \in S) \right\rangle ,$$

avec  $m_{s,t} \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$  pour  $s \neq t$ .

- un groupe de Coxeter peut se représenter géométriquement comme **groupe engendré par des réflexions** ;
- un **système de racines** est un ensemble de vecteurs qui encodent les réflexions de  $W$ .

# Une définition de système de racines

- $V$  : e.v. réel de dimension finie
- $B(.,.)$  : une forme bilinéaire symétrique sur  $V$

Construction d'un système de racines dans  $(V, B)$ :

1. On part d'un **système simple**  $\Delta$ , tel que :

- $\Delta$  est une base de  $V$  ;
- $\forall \alpha \in \Delta, B(\alpha, \alpha) = 1$  ;
- $\forall \alpha \neq \beta \in \Delta,$ 
  - soit  $B(\alpha, \beta) = -\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)$ , avec  $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ,
  - soit  $B(\alpha, \beta) \leq -1$ .

# Une définition de système de racines

- $V$  : e.v. réel de dimension finie
- $B(.,.)$  : une forme bilinéaire symétrique sur  $V$

Construction d'un système de racines dans  $(V, B)$ :

1. On part d'un **système simple**  $\Delta$ , tel que :

- $\Delta$  est une base de  $V$  ;
- $\forall \alpha \in \Delta, B(\alpha, \alpha) = 1$  ;
- $\forall \alpha \neq \beta \in \Delta,$ 
  - \* soit  $B(\alpha, \beta) = -\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)$ , avec  $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ,
  - \* soit  $B(\alpha, \beta) \leq -1$ .

# Une définition de système de racines

- $V$  : e.v. réel de dimension finie
- $B(.,.)$  : une forme bilinéaire symétrique sur  $V$

Construction d'un système de racines dans  $(V, B)$ :

1. On part d'un **système simple**  $\Delta$ , tel que :

- $\Delta$  est une base de  $V$  ;
- $\forall \alpha \in \Delta, B(\alpha, \alpha) = 1$  ;
- $\forall \alpha \neq \beta \in \Delta,$ 
  - soit  $B(\alpha, \beta) = -\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)$ , avec  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ,
  - soit  $B(\alpha, \beta) \leq -1$ .

# Une définition de système de racines

- $V$  : e.v. réel de dimension finie
- $B(.,.)$  : une forme bilinéaire symétrique sur  $V$

Construction d'un système de racines dans  $(V, B)$ :

1. On part d'un **système simple**  $\Delta$ , tel que :

- $\Delta$  est une base de  $V$  ;
- $\forall \alpha \in \Delta, B(\alpha, \alpha) = 1$  ;
- $\forall \alpha \neq \beta \in \Delta,$ 
  - soit  $B(\alpha, \beta) = -\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)$ , avec  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ,
  - soit  $B(\alpha, \beta) \leq -1$ .

# Une définition de système de racines

- $V$  : e.v. réel de dimension finie
- $B(.,.)$  : une forme bilinéaire symétrique sur  $V$

Construction d'un système de racines dans  $(V, B)$ :

1. On part d'un **système simple**  $\Delta$ , tel que :

- $\Delta$  est une base de  $V$  ;
- $\forall \alpha \in \Delta, B(\alpha, \alpha) = 1$  ;
- $\forall \alpha \neq \beta \in \Delta,$ 
  - soit  $B(\alpha, \beta) = -\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)$ , avec  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ,
  - soit  $B(\alpha, \beta) \leq -1$ .

# Une définition de système de racines

- $V$  : e.v. réel de dimension finie
- $B(.,.)$  : une forme bilinéaire symétrique sur  $V$

Construction d'un système de racines dans  $(V, B)$ :

1. On part d'un **système simple**  $\Delta$ , tel que :

- $\Delta$  est une base de  $V$  ;
- $\forall \alpha \in \Delta, B(\alpha, \alpha) = 1$  ;
- $\forall \alpha \neq \beta \in \Delta,$ 
  - soit  $B(\alpha, \beta) = -\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)$ , avec  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ,
  - soit  $B(\alpha, \beta) \leq -1$ .

# Une définition de système de racines

- $V$  : e.v. réel de dimension finie
- $B(.,.)$  : une forme bilinéaire symétrique sur  $V$

Construction d'un système de racines dans  $(V, B)$ :

1. On part d'un **système simple**  $\Delta$ , tel que :

- $\Delta$  est une base de  $V$  ;
- $\forall \alpha \in \Delta, B(\alpha, \alpha) = 1$  ;
- $\forall \alpha \neq \beta \in \Delta,$ 
  - soit  $B(\alpha, \beta) = -\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)$ , avec  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ,
  - soit  $B(\alpha, \beta) \leq -1$ .

# Une définition de système de racines

2. Pour chaque  $\alpha \in \Delta$ , on définit la  **$B$ -réflexion**  $s_\alpha$ :

$$\begin{aligned} s_\alpha : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto v - 2B(\alpha, v)\alpha. \end{aligned}$$

**Remarque** :  $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ , et  $s_\alpha$  fixe  $\alpha^\perp$ .

Notation :  $S = \{s_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ .

3. On construit le groupe de  $B$ -réflexion  $W := \langle S \rangle$ .

4. On fait agir  $W$  sur  $\Delta$  pour obtenir le système de racines:

$$\Phi := W(\Delta).$$

**Remarque** : si  $\rho = w(\alpha)$  (avec  $\alpha \in \Delta$ ),  $ws_\alpha w^{-1}$  est la  $B$ -réflexion associée à la racine  $\rho$ .

# Une définition de système de racines

2. Pour chaque  $\alpha \in \Delta$ , on définit la **B-réflexion**  $s_\alpha$ :

$$\begin{aligned} s_\alpha : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto v - 2B(\alpha, v)\alpha. \end{aligned}$$

**Remarque :**  $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ , et  $s_\alpha$  fixe  $\alpha^\perp$ .

Notation :  $S = \{s_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ .

3. On construit le groupe de B-réflexion  $W := \langle S \rangle$ .

4. On fait agir  $W$  sur  $\Delta$  pour obtenir le système de racines:

$$\Phi := W(\Delta).$$

**Remarque :** si  $\rho = w(\alpha)$  (avec  $\alpha \in \Delta$ ),  $ws_\alpha w^{-1}$  est la B-réflexion associée à la racine  $\rho$ .

# Une définition de système de racines

2. Pour chaque  $\alpha \in \Delta$ , on définit la **B-réflexion**  $s_\alpha$ :

$$\begin{aligned} s_\alpha : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto v - 2B(\alpha, v)\alpha. \end{aligned}$$

**Remarque :**  $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ , et  $s_\alpha$  fixe  $\alpha^\perp$ .

Notation :  $S = \{s_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ .

3. On construit le groupe de B-réflexion  $W := \langle S \rangle$ .

4. On fait agir  $W$  sur  $\Delta$  pour obtenir le système de racines:

$$\Phi := W(\Delta).$$

**Remarque :** si  $\rho = w(\alpha)$  (avec  $\alpha \in \Delta$ ),  $ws_\alpha w^{-1}$  est la B-réflexion associée à la racine  $\rho$ .

# Une définition de système de racines

2. Pour chaque  $\alpha \in \Delta$ , on définit la  **$B$ -réflexion**  $s_\alpha$ :

$$\begin{aligned} s_\alpha : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto v - 2B(\alpha, v)\alpha. \end{aligned}$$

**Remarque :**  $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ , et  $s_\alpha$  fixe  $\alpha^\perp$ .

Notation :  $S = \{s_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ .

3. On construit le groupe de  $B$ -réflexion  $W := \langle S \rangle$ .

4. On fait agir  $W$  sur  $\Delta$  pour obtenir le système de racines:

$$\Phi := W(\Delta).$$

**Remarque :** si  $\rho = w(\alpha)$  (avec  $\alpha \in \Delta$ ),  $ws_\alpha w^{-1}$  est la  $B$ -réflexion associée à la racine  $\rho$ .

# Une définition de système de racines

2. Pour chaque  $\alpha \in \Delta$ , on définit la **B-réflexion**  $s_\alpha$ :

$$\begin{aligned} s_\alpha : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto v - 2B(\alpha, v)\alpha. \end{aligned}$$

**Remarque :**  $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ , et  $s_\alpha$  fixe  $\alpha^\perp$ .

Notation :  $S = \{s_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ .

3. On construit le groupe de B-réflexion  $W := \langle S \rangle$ .

4. On fait agir  $W$  sur  $\Delta$  pour obtenir le système de racines:

$$\Phi := W(\Delta).$$

**Remarque :** si  $\rho = w(\alpha)$  (avec  $\alpha \in \Delta$ ),  $ws_\alpha w^{-1}$  est la B-réflexion associée à la racine  $\rho$ .

# Une définition de système de racines

2. Pour chaque  $\alpha \in \Delta$ , on définit la  **$B$ -réflexion**  $s_\alpha$ :

$$\begin{aligned} s_\alpha : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto v - 2B(\alpha, v)\alpha. \end{aligned}$$

**Remarque :**  $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ , et  $s_\alpha$  fixe  $\alpha^\perp$ .

Notation :  $S = \{s_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ .

3. On construit le groupe de  $B$ -réflexion  $W := \langle S \rangle$ .

4. On fait agir  $W$  sur  $\Delta$  pour obtenir le système de racines:

$$\Phi := W(\Delta).$$

**Remarque :** si  $\rho = w(\alpha)$  (avec  $\alpha \in \Delta$ ),  $ws_\alpha w^{-1}$  est la  $B$ -réflexion associée à la racine  $\rho$ .

# Groupes de Coxeter et systèmes de racines

## Théorème (Krammer)

- $(W, S)$  est un système de Coxeter.
- L'ordre de  $s_\alpha s_\beta$  est  $m$  si  $B(\alpha, \beta) = -\cos(\pi/m)$ , et  $\infty$  si  $B(\alpha, \beta) \leq -1$ .
- Soit  $\Phi^+ := \Phi \cap \text{cone}(\Delta)$ . On a :  $\Phi = \Phi^+ \sqcup (-\Phi^+)$ .

**Remarque :** Inversement, à partir d'un groupe de Coxeter on peut construire un système de racines, en utilisant la représentation géométrique classique [Tits].

# Groupes de Coxeter et systèmes de racines

## Théorème (Krammer)

- $(W, S)$  est un système de Coxeter.
- L'ordre de  $s_\alpha s_\beta$  est  $m$  si  $B(\alpha, \beta) = -\cos(\pi/m)$ , et  $\infty$  si  $B(\alpha, \beta) \leq -1$ .
- Soit  $\Phi^+ := \Phi \cap \text{cone}(\Delta)$ . On a :  $\Phi = \Phi^+ \sqcup (-\Phi^+)$ .

**Remarque :** Inversement, à partir d'un groupe de Coxeter on peut construire un système de racines, en utilisant la représentation géométrique classique [Tits].

# Groupes de Coxeter et systèmes de racines

## Théorème (Krammer)

- $(W, S)$  est un système de Coxeter.
- L'ordre de  $s_\alpha s_\beta$  est  $m$  si  $B(\alpha, \beta) = -\cos(\pi/m)$ , et  $\infty$  si  $B(\alpha, \beta) \leq -1$ .
- Soit  $\Phi^+ := \Phi \cap \text{cone}(\Delta)$ . On a :  $\Phi = \Phi^+ \sqcup (-\Phi^+)$ .

**Remarque** : Inversement, à partir d'un groupe de Coxeter on peut construire un système de racines, en utilisant la représentation géométrique classique [Tits].

# Groupes de Coxeter et systèmes de racines

## Théorème (Krammer)

- $(W, S)$  est un système de Coxeter.
- L'ordre de  $s_\alpha s_\beta$  est  $m$  si  $B(\alpha, \beta) = -\cos(\pi/m)$ , et  $\infty$  si  $B(\alpha, \beta) \leq -1$ .
- Soit  $\Phi^+ := \Phi \cap \text{cone}(\Delta)$ . On a :  $\Phi = \Phi^+ \sqcup (-\Phi^+)$ .

**Remarque :** Inversement, à partir d'un groupe de Coxeter on peut construire un système de racines, en utilisant la représentation géométrique classique [Tits].

# Groupes de Coxeter et systèmes de racines

## Théorème (Krammer)

- $(W, S)$  est un système de Coxeter.
- L'ordre de  $s_\alpha s_\beta$  est  $m$  si  $B(\alpha, \beta) = -\cos(\pi/m)$ , et  $\infty$  si  $B(\alpha, \beta) \leq -1$ .
- Soit  $\Phi^+ := \Phi \cap \text{cone}(\Delta)$ . On a :  $\Phi = \Phi^+ \sqcup (-\Phi^+)$ .

**Remarque :** Inversement, à partir d'un groupe de Coxeter on peut construire un système de racines, en utilisant la représentation géométrique classique [Tits].

# Systèmes de racines infinis

Pour les systèmes de racines finis :

$\Phi$  est fini  $\Leftrightarrow W$  est fini ( $\Leftrightarrow B$  est définie positive).

À quoi ressemble un système de racines infini?

L'exemple le plus simple, en rang 2:



Matrice de  $B$  dans la base  $(\alpha, \beta)$ :  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ .

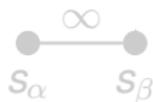
# Systèmes de racines infinis

Pour les systèmes de racines finis :

$\Phi$  est fini  $\Leftrightarrow W$  est fini ( $\Leftrightarrow B$  est définie positive).

À quoi ressemble un système de racines **infini**?

L'exemple le plus simple, en **rang 2**:



Matrice de  $B$  dans la base  $(\alpha, \beta)$ :  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ .

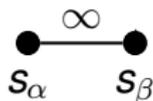
# Systèmes de racines infinis

Pour les systèmes de racines finis :

$\Phi$  est fini  $\Leftrightarrow W$  est fini ( $\Leftrightarrow B$  est définie positive).

À quoi ressemble un système de racines **infini**?

L'exemple le plus simple, en **rang 2**:



Matrice de  $B$  dans la base  $(\alpha, \beta)$ :  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ .



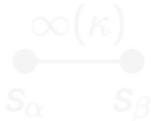
# Observations

- Les **normes** des racines tendent vers  $\infty$ ;
- Les **directions** des racines tendent vers la direction du **cône isotrope  $Q$**  de  $B$ :

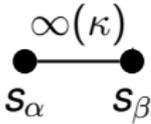
$$Q := \{v \in V, B(v, v) = 0\}.$$

(ici son équation est  $v_\alpha^2 + v_\beta^2 - 2v_\alpha v_\beta = 0$ , i.e.,  $Q = \text{Vect}(\alpha + \beta)$ .)

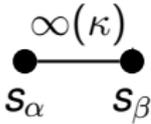
## Et si $B(\alpha, \beta) < -1$ ?

- Matrice de  $B$ :  $\begin{bmatrix} 1 & \kappa \\ \kappa & 1 \end{bmatrix}$  où  $\kappa < -1$ . On écrira 
- $Q$  est la réunion de 2 droites.

Et si  $B(\alpha, \beta) < -1$ ?

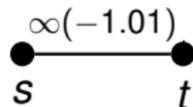
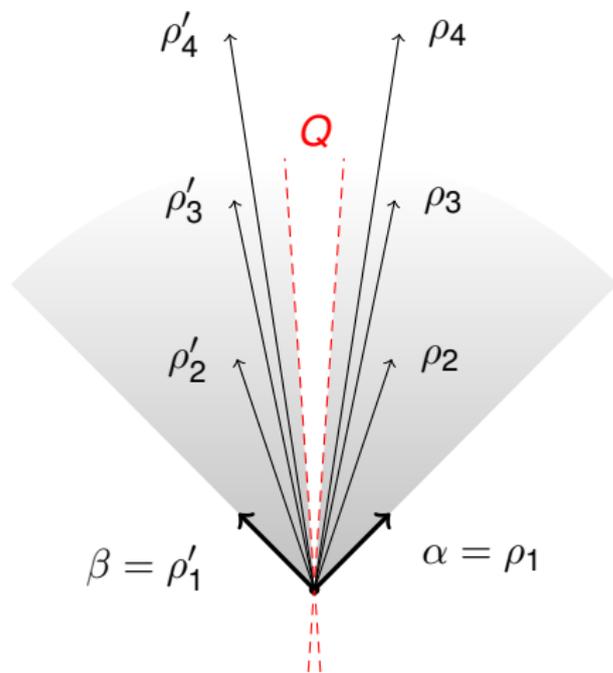
- Matrice de  $B$ :  $\begin{bmatrix} 1 & \kappa \\ \kappa & 1 \end{bmatrix}$  où  $\kappa < -1$ . On écrira 
- $Q$  est la réunion de 2 droites.

Et si  $B(\alpha, \beta) < -1$ ?

- Matrice de  $B$ :  $\begin{bmatrix} 1 & \kappa \\ \kappa & 1 \end{bmatrix}$  où  $\kappa < -1$ . On écrira 
- $Q$  est la réunion de 2 droites.

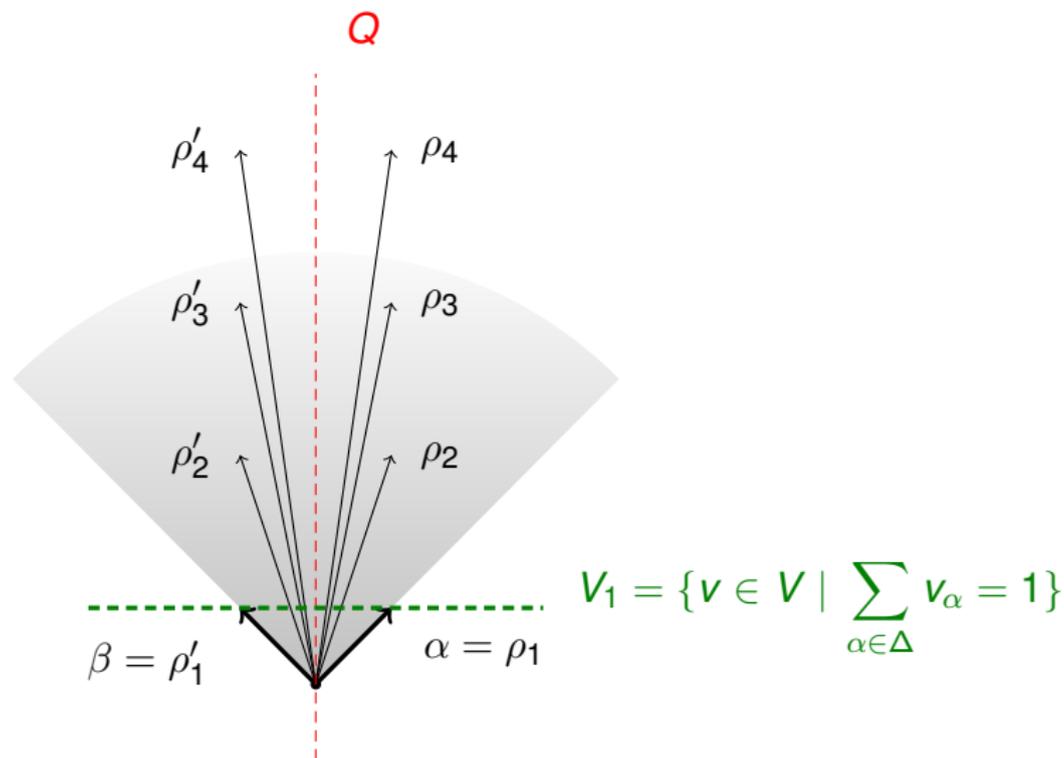
# Et si $B(\alpha, \beta) < -1$ ?

- Matrice de  $B$ :  $\begin{bmatrix} 1 & \kappa \\ \kappa & 1 \end{bmatrix}$  où  $\kappa < -1$ . On écrira  $\overset{\infty(\kappa)}{\bullet} \text{---} \bullet$   
 $s_\alpha$   $s_\beta$
- $Q$  est la réunion de 2 droites.

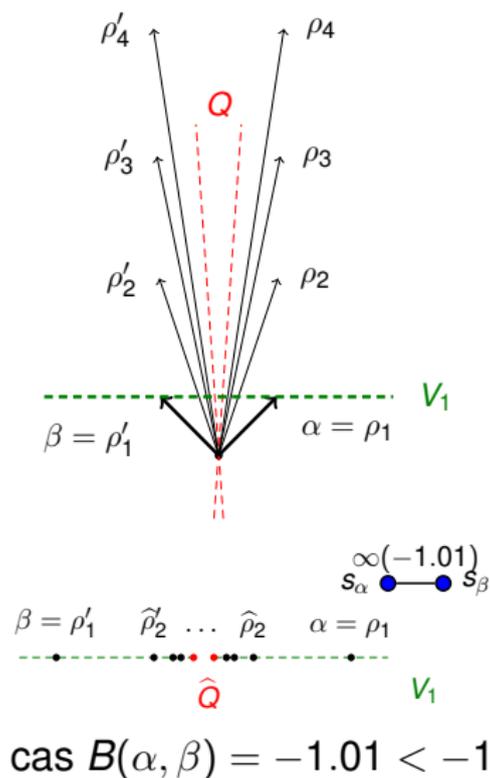
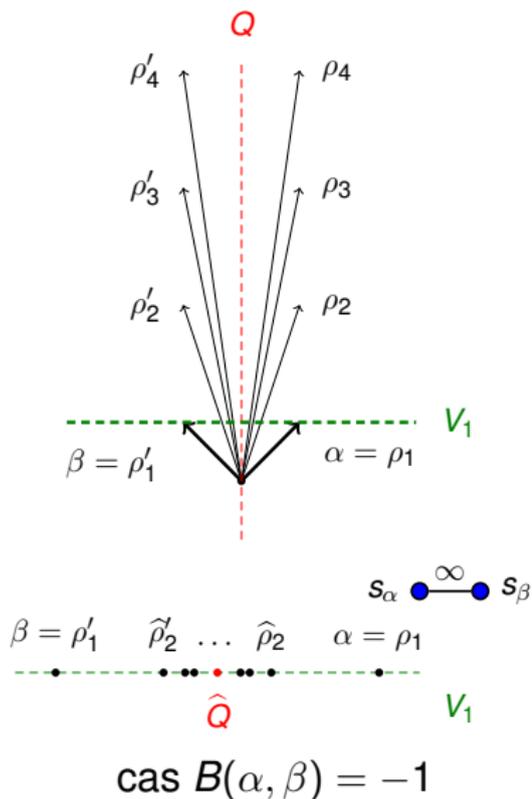


# Comment voir des exemples en rang supérieur ?

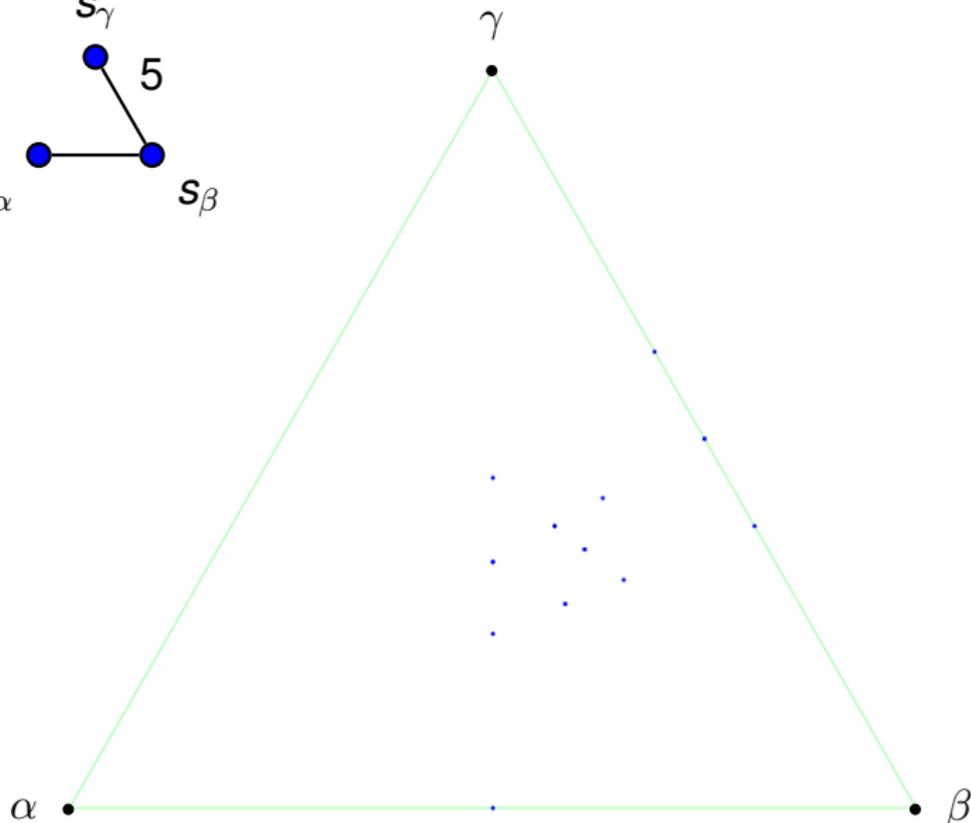
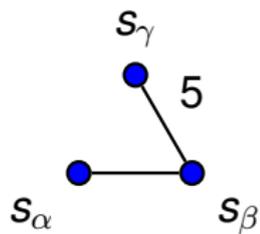
On coupe les directions des racines avec un hyperplan affine.



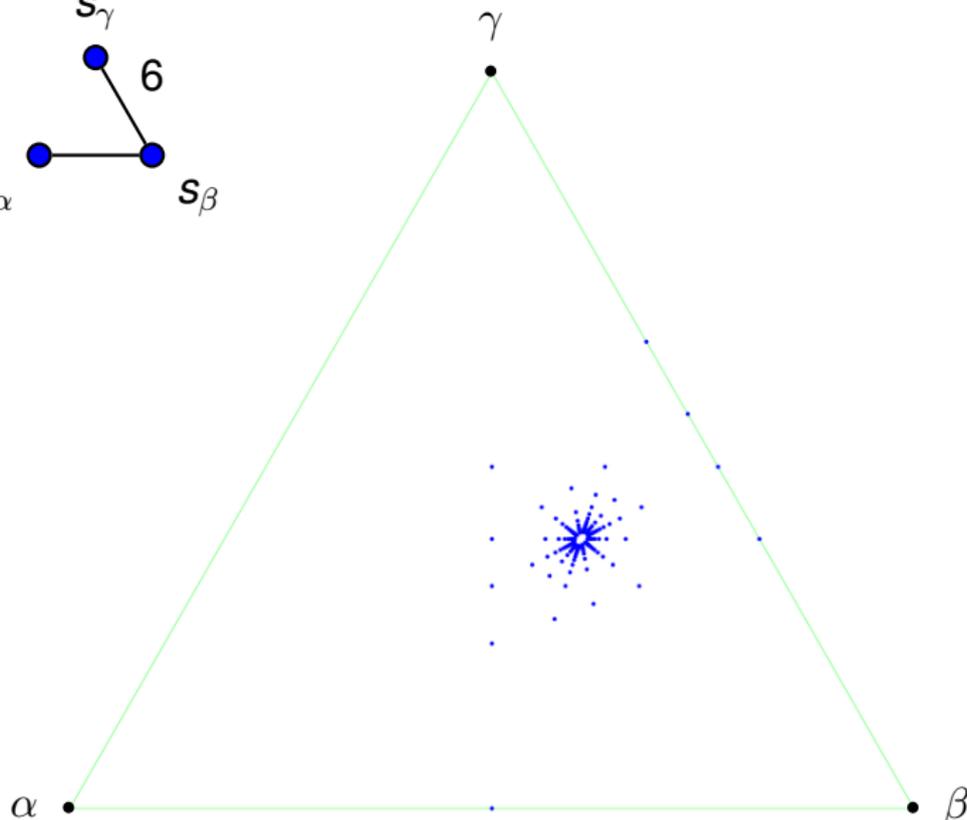
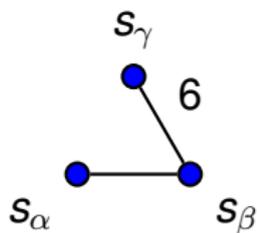
# “Normalisation” des racines



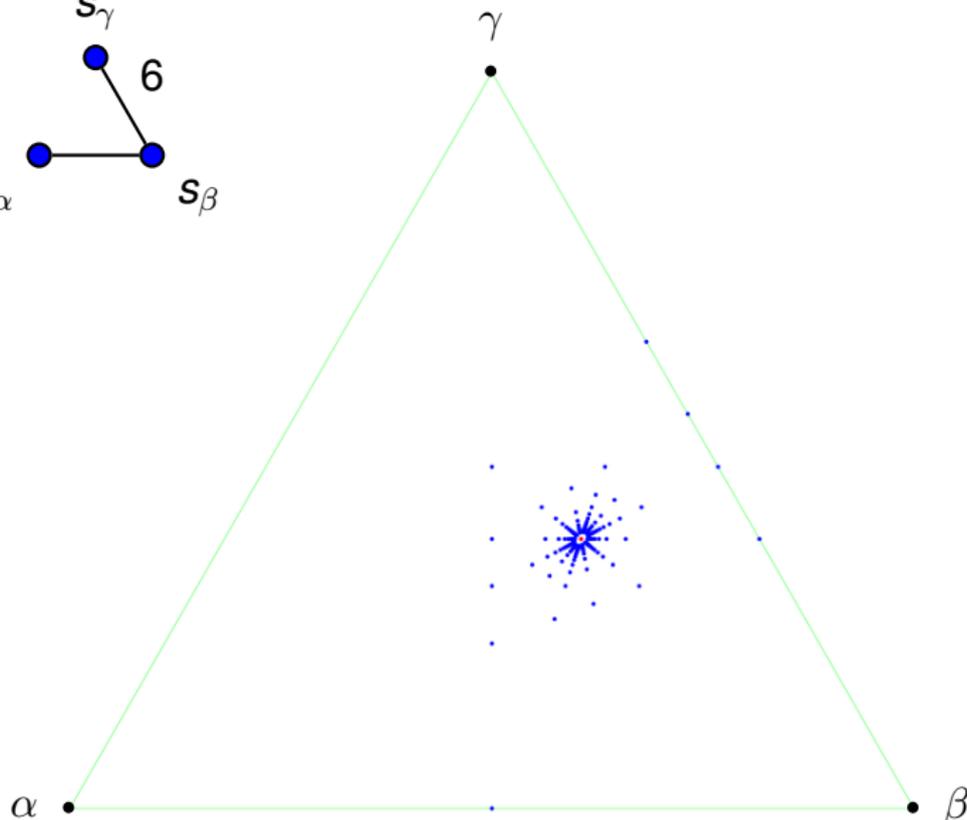
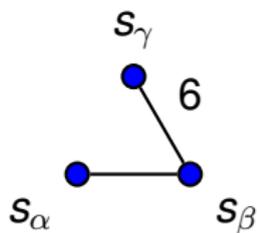
# Exemples en rang 3: groupe fini, $\text{sgn } B = (3, 0)$ . ( $H_3$ )



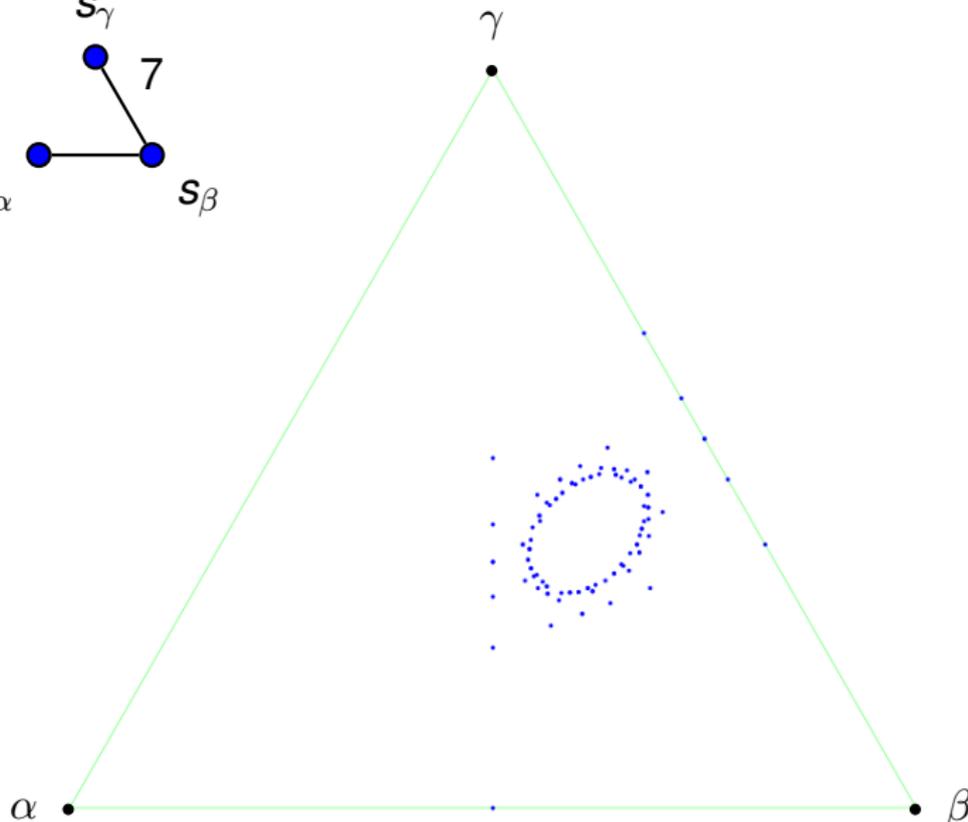
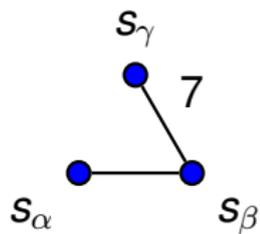
# Exemples en rang 3: groupe affine, $\text{sgn } B = (2, 0)$ ( $\widetilde{G}_2$ )



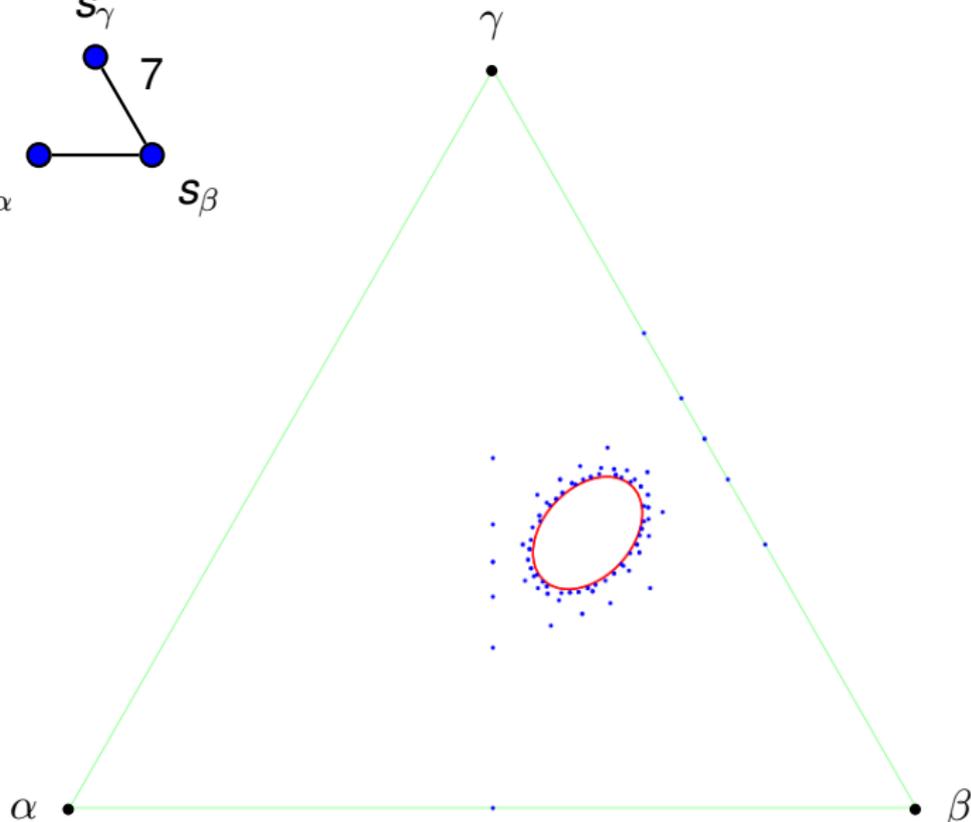
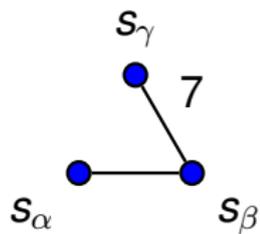
# Exemples en rang 3: groupe affine, $\text{sgn } B = (2, 0)$ ( $\widetilde{G}_2$ )



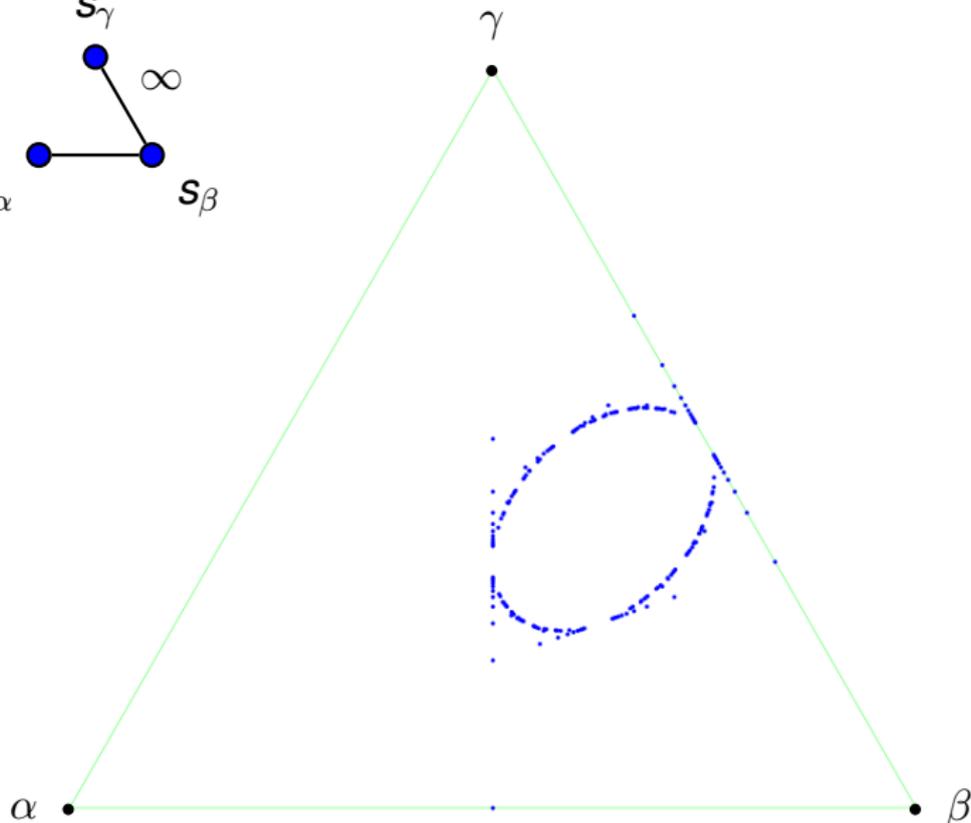
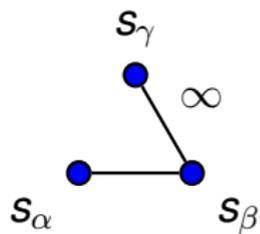
# Exemples en rang 3: cas $\text{sgn } B = (2, 1)$



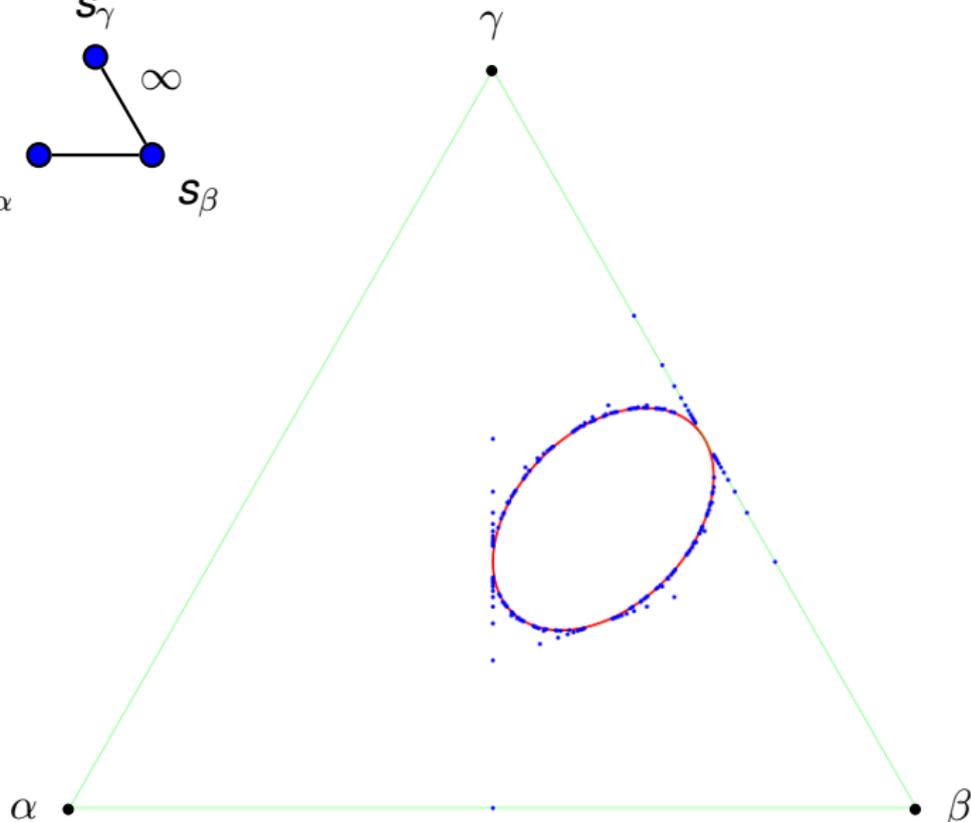
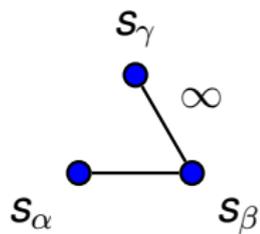
# Exemples en rang 3: cas $\text{sgn } B = (2, 1)$



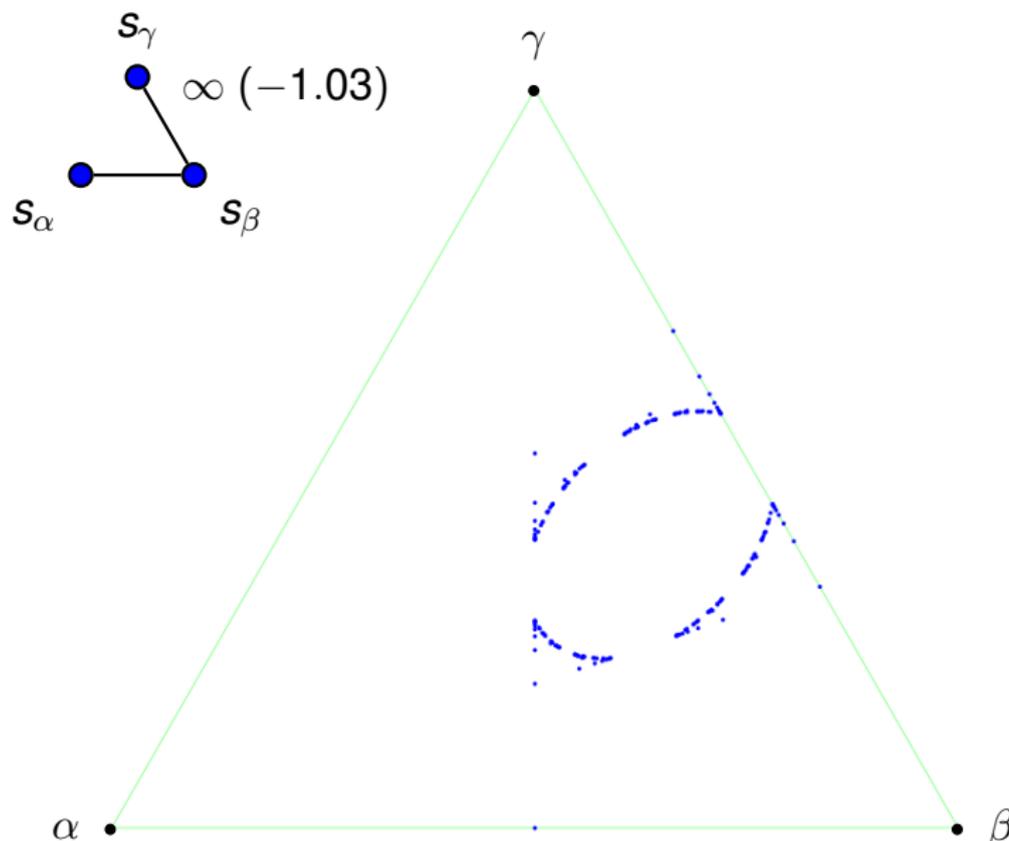
# Exemples en rang 3: cas $\text{sgn } B = (2, 1)$



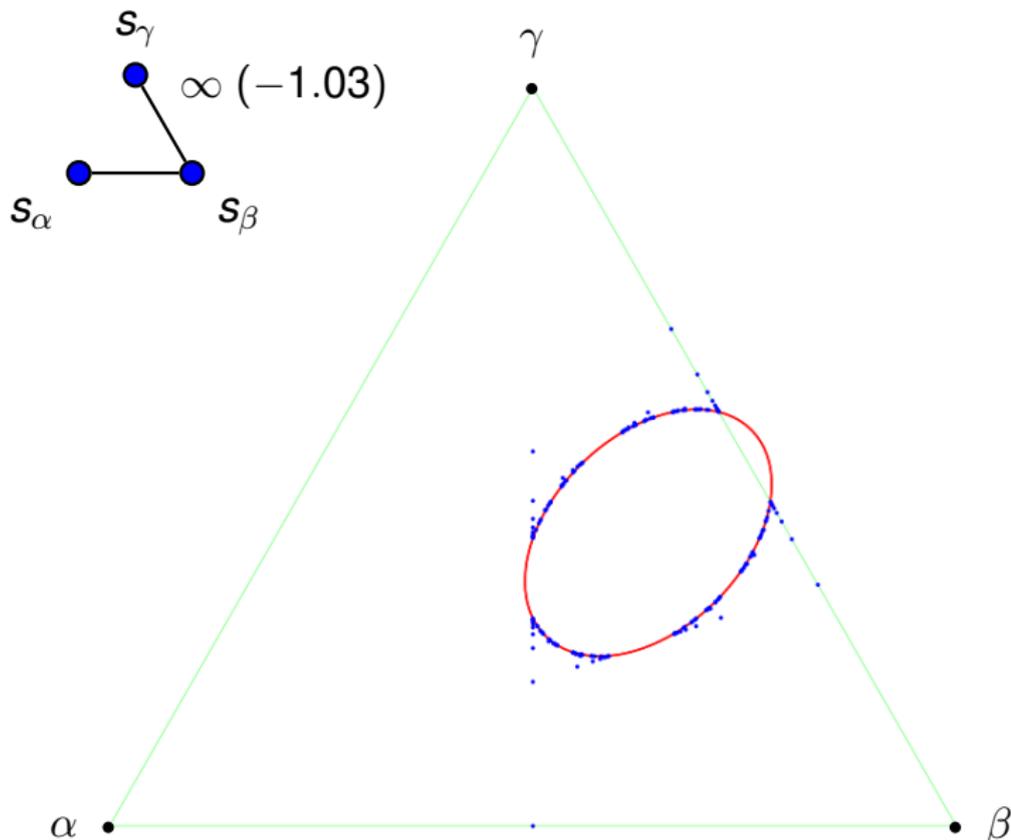
# Exemples en rang 3: cas $\text{sgn } B = (2, 1)$



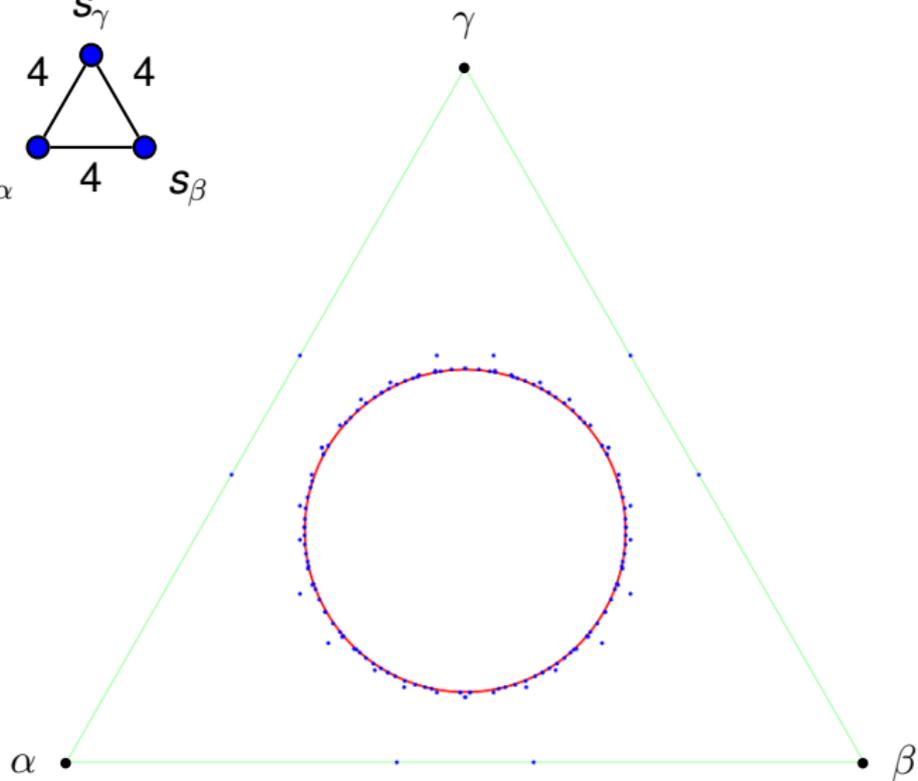
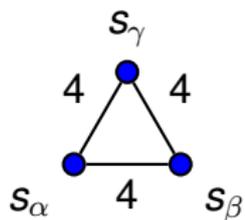
# Exemples en rang 3: cas $\text{sgn } B = (2, 1)$



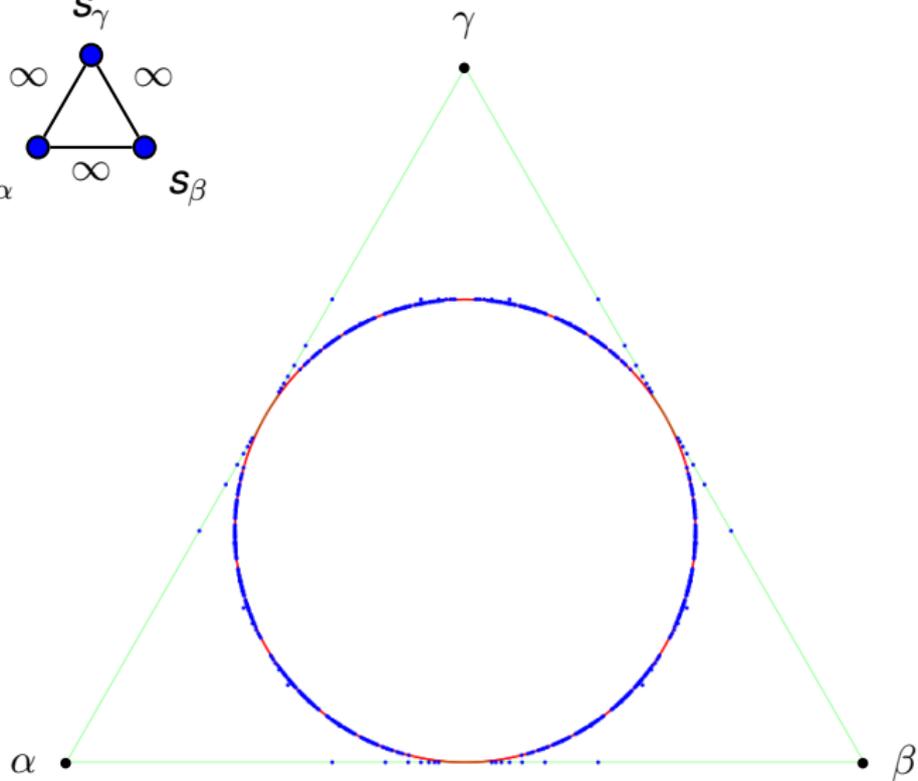
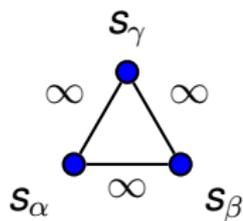
# Exemples en rang 3: cas $\text{sgn } B = (2, 1)$



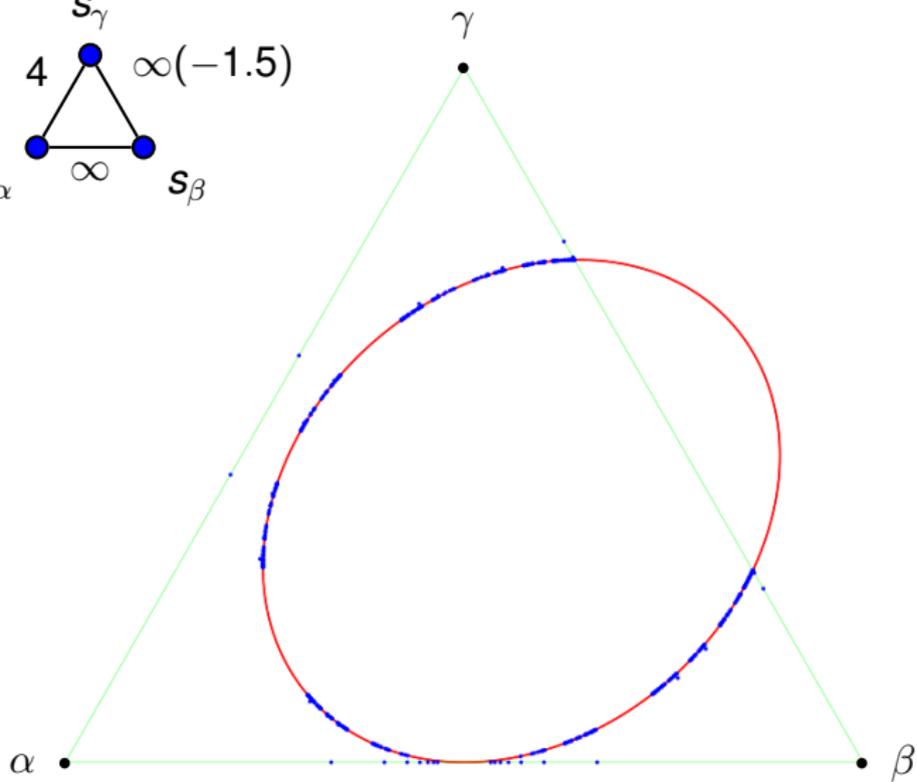
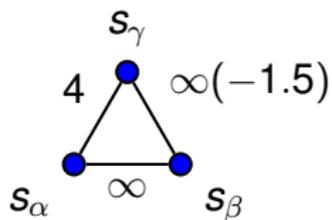
# Exemples en rang 3: cas $\text{sgn } B = (2, 1)$



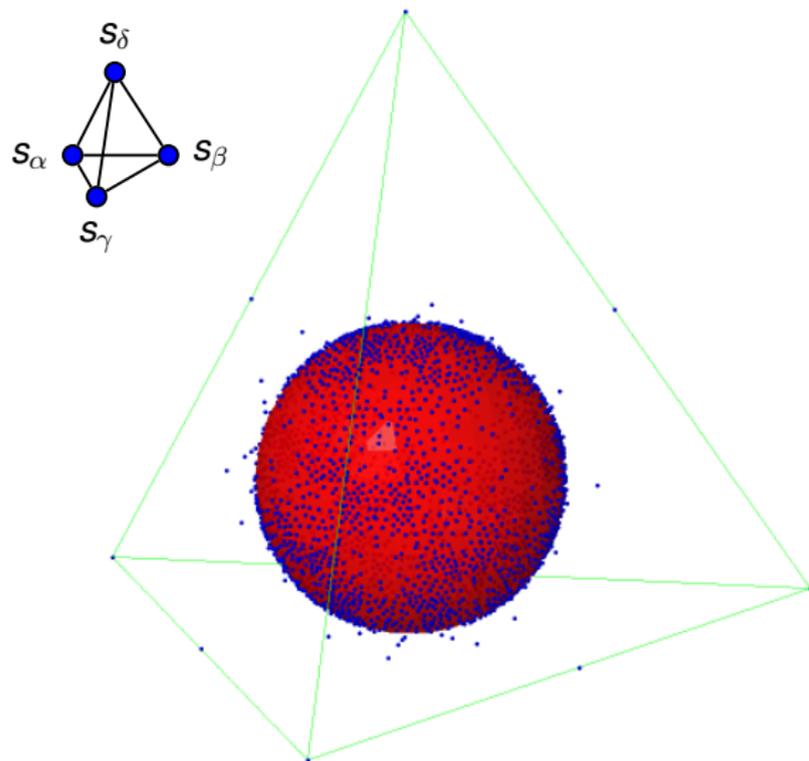
# Exemples en rang 3: cas $\text{sgn } B = (2, 1)$



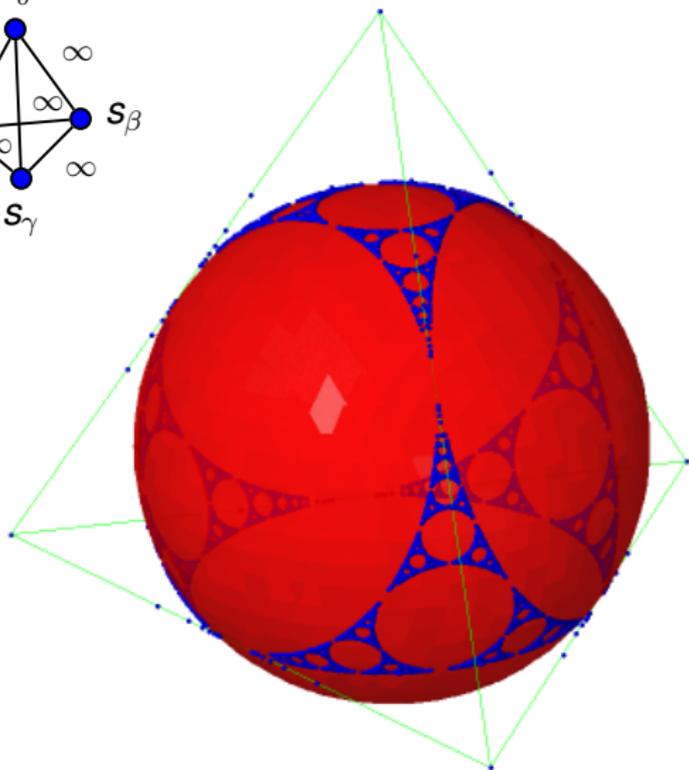
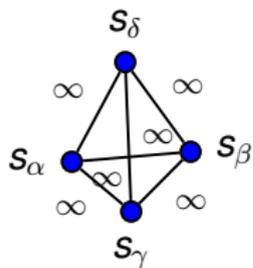
# Exemples en rang 3: cas $\text{sgn } B = (2, 1)$



# Exemples en rang 4



# Exemples en rang 4



# Plan

- 1 Systèmes de racines et “racines-limites” d’un groupe de Coxeter  $W$
- 2 Racines-limites, cône isotrope et sous-groupes diédraux
- 3 Action de  $W$  sur les racines-limites, propriétés topologiques et cône imaginaire de  $W$

# “Racines-limites” et cône isotrope

## Théorème (Hohlweg-Labbé-R.)

Soit  $\Phi$  un système de racines d'un groupe de Coxeter (infini), et  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite injective de  $\Phi$ . Alors :

- 1  $\|\rho_n\|$  tend vers  $\infty$  ;
- 2 si la suite de racines normalisées  $\hat{\rho}_n$  a une limite  $\ell$ , alors

$$\ell \in \hat{Q} \cap \text{conv}(\Delta).$$

Propriété prouvée indépendamment dans d'autres contextes :  
[Kac 90] (pour les groupes de Weyl d'algèbres de Kac-Moody),  
généralisé par [Dyer 2012] (travaux sur le cône imaginaire).

$\rightsquigarrow$  **Problème:** comprendre l'ensemble des limites possibles,  
i.e., les **points d'accumulation** de  $\hat{\Phi}$ :

$$E(\Phi) := \text{Acc}(\hat{\Phi}).$$

Pour faire court, on les appelle **racines-limites**.

# “Racines-limites” et cône isotrope

## Théorème (Hohlweg-Labbé-R.)

Soit  $\Phi$  un système de racines d'un groupe de Coxeter (infini), et  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite injective de  $\Phi$ . Alors :

- 1  $\|\rho_n\|$  tend vers  $\infty$  ;
- 2 si la suite de racines normalisées  $\hat{\rho}_n$  a une limite  $\ell$ , alors

$$\ell \in \hat{Q} \cap \text{conv}(\Delta).$$

Propriété prouvée indépendamment dans d'autres contextes : [Kac 90] (pour les groupes de Weyl d'algèbres de Kac-Moody), généralisé par [Dyer 2012] (travaux sur le cône imaginaire).

$\rightsquigarrow$  **Problème:** comprendre l'ensemble des limites possibles, i.e., les **points d'accumulation** de  $\hat{\Phi}$ :

$$E(\Phi) := \text{Acc}(\hat{\Phi}).$$

Pour faire court, on les appelle **racines-limites**.

# “Racines-limites” et cône isotrope

## Théorème (Hohlweg-Labbé-R.)

Soit  $\Phi$  un système de racines d'un groupe de Coxeter (infini), et  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite injective de  $\Phi$ . Alors :

- 1  $\|\rho_n\|$  tend vers  $\infty$  ;
- 2 si la suite de racines normalisées  $\hat{\rho}_n$  a une limite  $\ell$ , alors

$$\ell \in \hat{Q} \cap \text{conv}(\Delta).$$

Propriété prouvée indépendamment dans d'autres contextes : [Kac 90] (pour les groupes de Weyl d'algèbres de Kac-Moody), généralisé par [Dyer 2012] (travaux sur le cône imaginaire).

$\rightsquigarrow$  **Problème**: comprendre l'ensemble des limites possibles, i.e., les **points d'accumulation** de  $\hat{\Phi}$ :

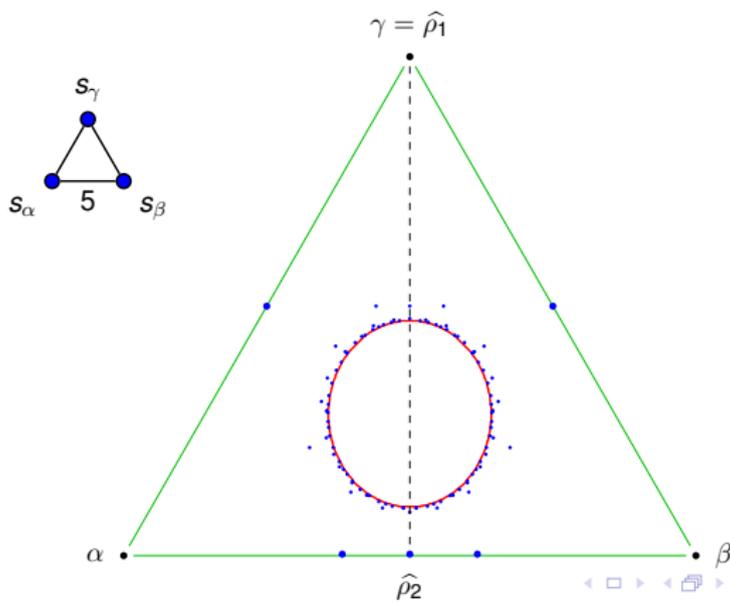
$$E(\Phi) := \text{Acc}(\hat{\Phi}).$$

Pour faire court, on les appelle **racines-limites**.

# Comment construire certaines racines-limites

Fixons 2 racines  $\rho_1, \rho_2$  dans  $\Phi^+ \rightsquigarrow$  on obtient un sous-groupe de réflexion **de rang 2** de  $W$ , et un sous-système de racines  $\Phi'$ .

- $\widehat{\Phi}'$  vit dans la droite  $L(\widehat{\rho}_1, \widehat{\rho}_2)$  ;
- le cône isotrope de  $\Phi'$  est  $Q \cap \text{Vect}(\rho_1, \rho_2)$  ;
- $\rightsquigarrow$  on construit les racines-limites de  $\Phi'$  :  
 $E(\Phi') = Q \cap L(\widehat{\rho}_1, \widehat{\rho}_2)$  (0,1 ou 2 points).



# Les racines-limites diédrales

## Définition

L'ensemble  $E_2(\Phi)$  des **racines-limites diédrales** d'un système de racines  $\Phi$  est le sous-ensemble de  $E(\Phi)$  formé par la **réunion des  $E(\Phi')$** , pour  $\Phi'$  sous-système de racines de **rang 2** de  $\Phi$ . De façon équivalente :

$$E_2(\Phi) := \bigcup_{\rho_1, \rho_2 \in \Phi} L(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) \cap Q.$$

**Remarque :**  $E_2$  est dénombrable.

## Théorème (Hohlweg-Labbé-R.)

L'ensemble  $E_2(\Phi)$  des racines-limites diédrales est **dense** dans  $E(\Phi)$ .

- $E$  est fermé, donc  $E = \overline{E_2}$  ;
- en général,  $E_2 \subsetneq E$ . Parfois même  $E = \hat{Q}$  !

# Les racines-limites diédrales

## Définition

L'ensemble  $E_2(\Phi)$  des **racines-limites diédrales** d'un système de racines  $\Phi$  est le sous-ensemble de  $E(\Phi)$  formé par **la réunion des  $E(\Phi')$** , pour  $\Phi'$  sous-système de racines de **rang 2** de  $\Phi$ . De façon équivalente :

$$E_2(\Phi) := \bigcup_{\rho_1, \rho_2 \in \Phi} L(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) \cap Q.$$

**Remarque :**  $E_2$  est dénombrable.

## Théorème (Hohlweg-Labbé-R.)

L'ensemble  $E_2(\Phi)$  des racines-limites diédrales est **dense** dans  $E(\Phi)$ .

- $E$  est fermé, donc  $E = \overline{E_2}$  ;
- en général,  $E_2 \subsetneq E$ . Parfois même  $E = \hat{Q}$  !

# Les racines-limites diédrales

## Définition

L'ensemble  $E_2(\Phi)$  des **racines-limites diédrales** d'un système de racines  $\Phi$  est le sous-ensemble de  $E(\Phi)$  formé par la **réunion des  $E(\Phi')$** , pour  $\Phi'$  sous-système de racines de **rang 2** de  $\Phi$ . De façon équivalente :

$$E_2(\Phi) := \bigcup_{\rho_1, \rho_2 \in \Phi} L(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) \cap Q.$$

**Remarque :**  $E_2$  est dénombrable.

## Théorème (Hohlweg-Labbé-R.)

L'ensemble  $E_2(\Phi)$  des **racines-limites diédrales** est **dense** dans  $E(\Phi)$ .

- $E$  est fermé, donc  $E = \overline{E_2}$  ;
- en général,  $E_2 \subsetneq E$ . Parfois même  $E = \hat{Q}$  !

# Les racines-limites diédrales

## Définition

L'ensemble  $E_2(\Phi)$  des **racines-limites diédrales** d'un système de racines  $\Phi$  est le sous-ensemble de  $E(\Phi)$  formé par la **réunion des  $E(\Phi')$** , pour  $\Phi'$  sous-système de racines de **rang 2** de  $\Phi$ . De façon équivalente :

$$E_2(\Phi) := \bigcup_{\rho_1, \rho_2 \in \Phi} L(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) \cap Q.$$

**Remarque :**  $E_2$  est dénombrable.

## Théorème (Hohlweg-Labbé-R.)

L'ensemble  $E_2(\Phi)$  des **racines-limites diédrales** est **dense** dans  $E(\Phi)$ .

- $E$  est fermé, donc  $E = \overline{E_2}$  ;
- en général,  $E_2 \subsetneq E$ . Parfois même  $E = \hat{Q}$  !

# Plan

- 1 Systèmes de racines et “racines-limites” d’un groupe de Coxeter  $W$
- 2 Racines-limites, cône isotrope et sous-groupes diédraux
- 3 Action de  $W$  sur les racines-limites, propriétés topologiques et cône imaginaire de  $W$

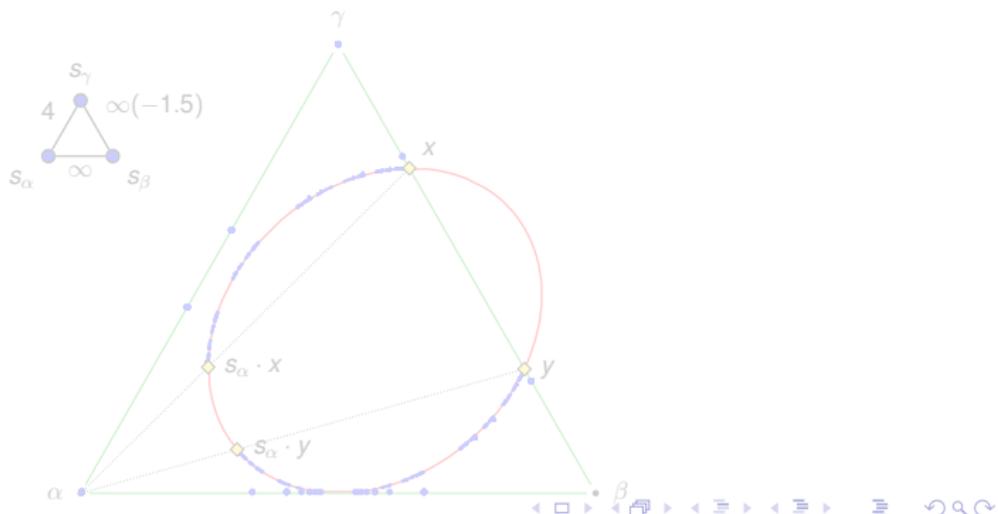
# Action de groupe de $W$ sur $E$

Action naturelle de  $W$  sur une partie de  $V_1$ :  $w \cdot v := \widehat{w(v)}$ .

Définie sur  $D = V_1 \cap \bigcap_{w \in W} w(V \setminus V_0)$ , où  $V_0 = \widehat{V}_1$ .

## Proposition

- $E(\Phi) \subseteq D$  et  $E(\Phi)$  est stable sous l'action de  $W$ .
- Pour  $\alpha \in \Phi$  et  $x \in E$ ,  $\widehat{Q} \cap L(\widehat{\alpha}, x) = \{x, s_\alpha \cdot x\}$ .



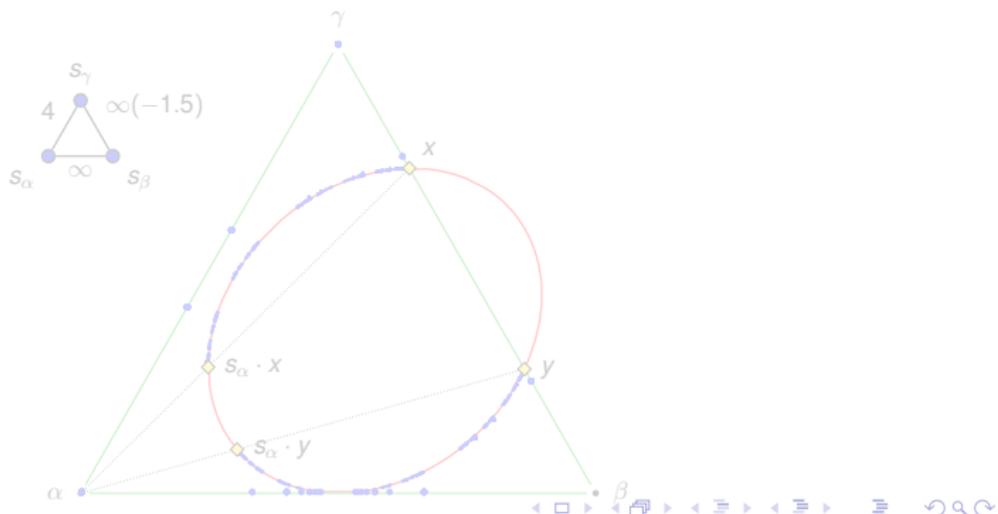
# Action de groupe de $W$ sur $E$

Action naturelle de  $W$  sur une partie de  $V_1$ :  $w \cdot v := \widehat{w(v)}$ .

Définie sur  $D = V_1 \cap \bigcap_{w \in W} w(V \setminus V_0)$ , où  $V_0 = \widehat{V}_1$ .

## Proposition

- $E(\Phi) \subseteq D$  et  $E(\Phi)$  est stable sous l'action de  $W$ .
- Pour  $\alpha \in \Phi$  et  $x \in E$ ,  $\widehat{Q} \cap L(\widehat{\alpha}, x) = \{x, s_\alpha \cdot x\}$ .



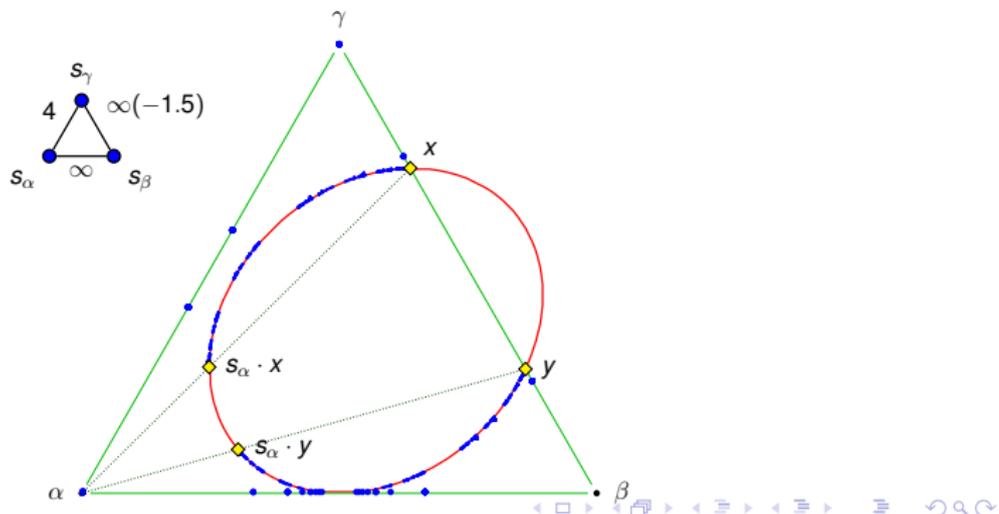
# Action de groupe de $W$ sur $E$

Action naturelle de  $W$  sur une partie de  $V_1$ :  $w \cdot v := \widehat{w(v)}$ .

Définie sur  $D = V_1 \cap \bigcap_{w \in W} w(V \setminus V_0)$ , où  $V_0 = \widehat{V}_1$ .

## Proposition

- $E(\Phi) \subseteq D$  et  $E(\Phi)$  est stable sous l'action de  $W$ .
- Pour  $\alpha \in \Phi$  et  $x \in E$ ,  $\widehat{Q} \cap L(\widehat{\alpha}, x) = \{x, s_\alpha \cdot x\}$ .



## Action de groupe de $W$ sur $E$

Action naturelle de  $W$  sur une partie de  $V_1$ :  $w \cdot v := \widehat{w(v)}$ .

Définie sur  $D = V_1 \cap \bigcap_{w \in W} w(V \setminus V_0)$ , où  $V_0 = \widehat{V_1}$ .

### Proposition

- $E(\Phi) \subseteq D$  et  $E(\Phi)$  est stable sous l'action de  $W$ .
- Pour  $\alpha \in \Phi$  et  $x \in E$ ,  $\widehat{Q} \cap L(\widehat{\alpha}, x) = \{x, s_\alpha \cdot x\}$ .

### Théorème (Dyer-Hohlweg-R.)

Si  $W$  est infini, non affine, et irréductible, l'action de  $W$  sur  $E$  est *fidèle*.

- On montre que  $E$  ne peut pas être inclus dans une union finie de sous-espaces affines de  $V_1$ .
- On utilise le lien avec le "cône imaginaire" de  $\Phi$  étudié par Dyer.

## Action de groupe de $W$ sur $E$

Action naturelle de  $W$  sur une partie de  $V_1$ :  $w \cdot v := \widehat{w(v)}$ .

Définie sur  $D = V_1 \cap \bigcap_{w \in W} w(V \setminus V_0)$ , où  $V_0 = \widehat{V_1}$ .

### Proposition

- $E(\Phi) \subseteq D$  et  $E(\Phi)$  est stable sous l'action de  $W$ .
- Pour  $\alpha \in \Phi$  et  $x \in E$ ,  $\widehat{Q} \cap L(\widehat{\alpha}, x) = \{x, s_\alpha \cdot x\}$ .

### Théorème (Dyer-Hohlweg-R.)

Si  $W$  est infini, non affine, et irréductible, l'action de  $W$  sur  $E$  est *fidèle*.

- On montre que  $E$  ne peut pas être inclus dans une union finie de sous-espaces affines de  $V_1$ .
- On utilise le lien avec le "cône imaginaire" de  $\Phi$  étudié par Dyer.

## Action de groupe de $W$ sur $E$

Action naturelle de  $W$  sur une partie de  $V_1$ :  $w \cdot v := \widehat{w(v)}$ .

Définie sur  $D = V_1 \cap \bigcap_{w \in W} w(V \setminus V_0)$ , où  $V_0 = \widehat{V_1}$ .

### Proposition

- $E(\Phi) \subseteq D$  et  $E(\Phi)$  est stable sous l'action de  $W$ .
- Pour  $\alpha \in \Phi$  et  $x \in E$ ,  $\widehat{Q} \cap L(\widehat{\alpha}, x) = \{x, s_\alpha \cdot x\}$ .

### Théorème (Dyer-Hohlweg-R.)

Si  $W$  est infini, non affine, et irréductible, l'action de  $W$  sur  $E$  est *fidèle*.

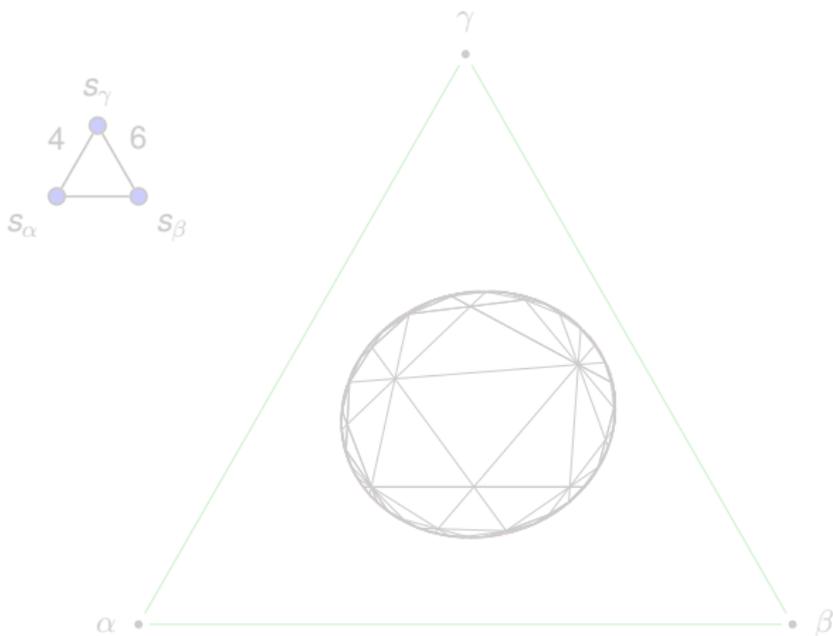
- On montre que  $E$  ne peut pas être inclus dans une union finie de sous-espaces affines de  $V_1$ .
- On utilise le lien avec le “cône imaginaire” de  $\Phi$  étudié par Dyer.

# Enveloppe convexe de $E$ et cône imaginaire

Définition (Kac, Hée, Dyer...)

Le **cône imaginaire** de  $\Phi$  est :

$$\mathcal{Z} := \{w(v) \mid w \in W, v \in \text{cone}(\Delta), \text{ et } \forall \alpha \in \Delta, B(\alpha, v) \leq 0\}.$$

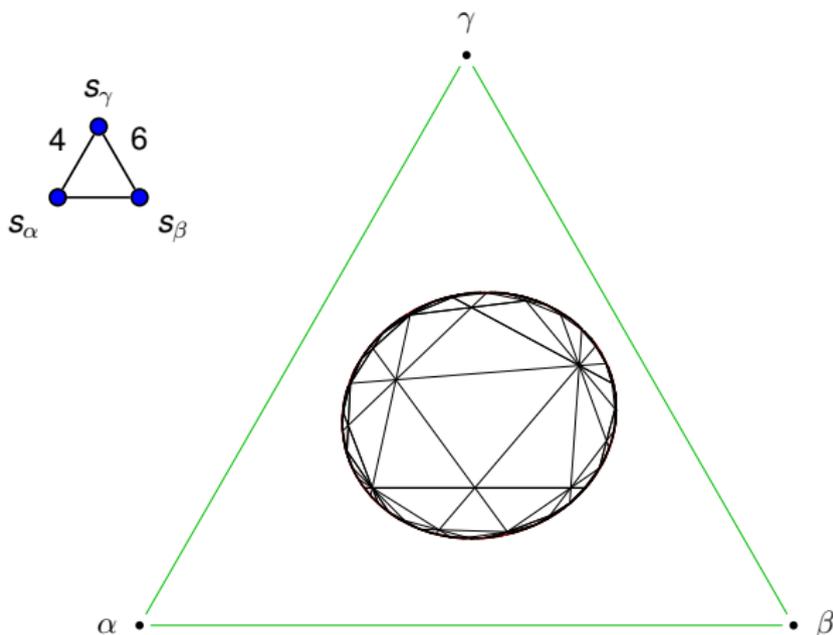


# Enveloppe convexe de $E$ et cône imaginaire

Définition (Kac, Hée, Dyer...)

Le **cône imaginaire** de  $\Phi$  est :

$$\mathcal{Z} := \{w(v) \mid w \in W, v \in \text{cone}(\Delta), \text{ et } \forall \alpha \in \Delta, B(\alpha, v) \leq 0\}.$$



# Enveloppe convexe de $E$ et cône imaginaire

Définition (Kac, Hée, Dyer...)

Le **cône imaginaire** de  $\Phi$  est :

$$\mathcal{Z} := \{w(\nu) \mid w \in W, \nu \in \text{cone}(\Delta), \text{ et } \forall \alpha \in \Delta, B(\alpha, \nu) \leq 0\}.$$

Soit  $C = \text{conv}(E)$  l'enveloppe convexe des racines-limites.

Théorème (Dyer)

*Le cône positif sur  $E$  est égal à l'adhérence du cône imaginaire  $\mathcal{Z}$ , i.e. :*

$$C = \overline{\mathcal{Z}} \cap V_1.$$

# Enveloppe convexe de $E$ et cône imaginaire

Définition (Kac, Hée, Dyer...)

Le **cône imaginaire** de  $\Phi$  est :

$$\mathcal{Z} := \{w(\nu) \mid w \in W, \nu \in \text{cone}(\Delta), \text{ et } \forall \alpha \in \Delta, B(\alpha, \nu) \leq 0\}.$$

Soit  $C = \text{conv}(E)$  l'enveloppe convexe des racines-limites.

Théorème (Dyer)

*Le cône positif sur  $E$  est égal à l'adhérence du cône imaginaire  $\mathcal{Z}$ , i.e. :*

$$C = \overline{\mathcal{Z}} \cap V_1.$$

# Points extrêmes de $C$ et orbite d'un point

## Théorème (Dyer)

Si  $W$  est irréductible infini, alors pour tout  $x \in C = \text{conv}(E)$ ,  
 $\text{conv}(\overline{W \cdot x}) = C$ .

On note  $C_{\text{ext}}$  l'ensemble des points extrêmes de  $C$ .

## Théorème (Dyer-Hohlweg-R.)

$C_{\text{ext}}$  est dense dans  $E$ .

## Corollaire (Minimalité de l'action de $W$ sur $E$ )

Si  $W$  est irréductible infini, alors pour tout  $x \in E$ , l'orbite de  $x$  sous l'action de  $W$  est dense dans  $E$ :

$$\overline{W \cdot x} = E.$$

# Points extrêmes de $C$ et orbite d'un point

## Théorème (Dyer)

Si  $W$  est irréductible infini, alors pour tout  $x \in C = \text{conv}(E)$ ,  
 $\text{conv}(\overline{W \cdot x}) = C$ .

On note  $C_{\text{ext}}$  l'ensemble des points extrêmes de  $C$ .

## Théorème (Dyer-Hohlweg-R.)

$C_{\text{ext}}$  est dense dans  $E$ .

## Corollaire (Minimalité de l'action de $W$ sur $E$ )

Si  $W$  est irréductible infini, alors pour tout  $x \in E$ , l'orbite de  $x$  sous l'action de  $W$  est dense dans  $E$ :

$$\overline{W \cdot x} = E.$$

# Points extrêmes de $C$ et orbite d'un point

## Théorème (Dyer)

Si  $W$  est irréductible infini, alors pour tout  $x \in C = \text{conv}(E)$ ,  
 $\text{conv}(\overline{W \cdot x}) = C$ .

On note  $C_{\text{ext}}$  l'ensemble des points extrêmes de  $C$ .

## Théorème (Dyer-Hohlweg-R.)

$C_{\text{ext}}$  est dense dans  $E$ .

## Corollaire (Minimalité de l'action de $W$ sur $E$ )

Si  $W$  est irréductible infini, alors pour tout  $x \in E$ , l'orbite de  $x$  sous l'action de  $W$  est dense dans  $E$ :

$$\overline{W \cdot x} = E.$$

# Points extrêmes de $C$ et orbite d'un point

## Théorème (Dyer)

Si  $W$  est irréductible infini, alors pour tout  $x \in C = \text{conv}(E)$ ,  
 $\text{conv}(\overline{W \cdot x}) = C$ .

On note  $C_{\text{ext}}$  l'ensemble des points extrêmes de  $C$ .

## Théorème (Dyer-Hohlweg-R.)

$C_{\text{ext}}$  est dense dans  $E$ .

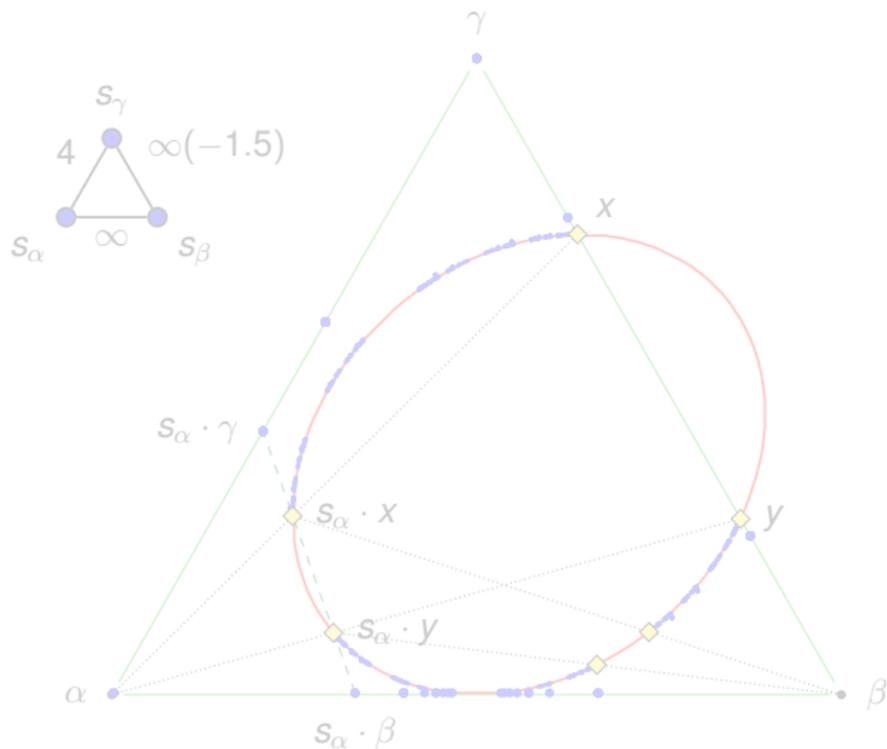
## Corollaire (Minimalité de l'action de $W$ sur $E$ )

Si  $W$  est irréductible infini, alors pour tout  $x \in E$ , l'orbite de  $x$  sous l'action de  $W$  est dense dans  $E$ :

$$\overline{W \cdot x} = E.$$

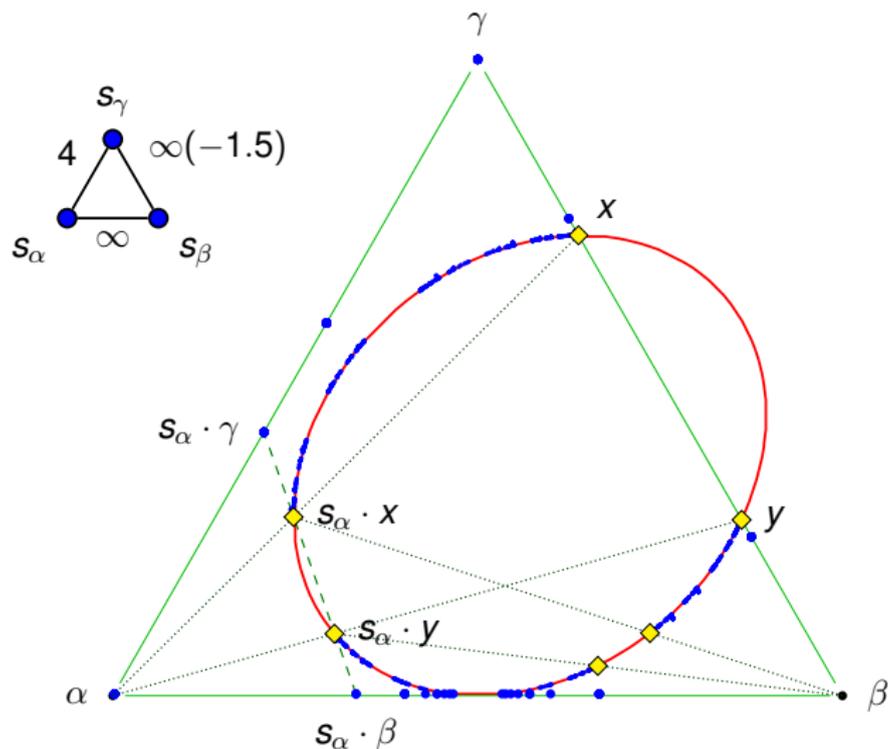
# Description "fractale" d'une partie dense de $E$

On part des intersections de  $\widehat{Q}$  avec les faces de  $\text{conv}(\Delta)$ , et on fait agir  $W$ .

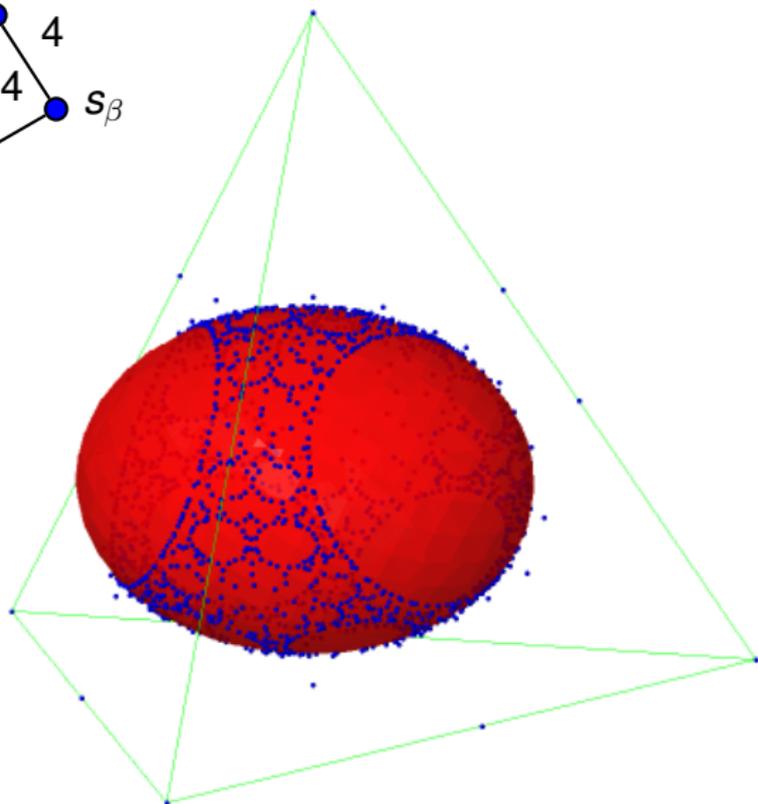
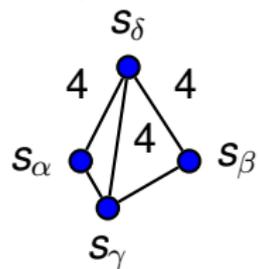


# Description "fractale" d'une partie dense de $E$

On part des intersections de  $\widehat{Q}$  avec les faces de  $\text{conv}(\Delta)$ , et on fait agir  $W$ .



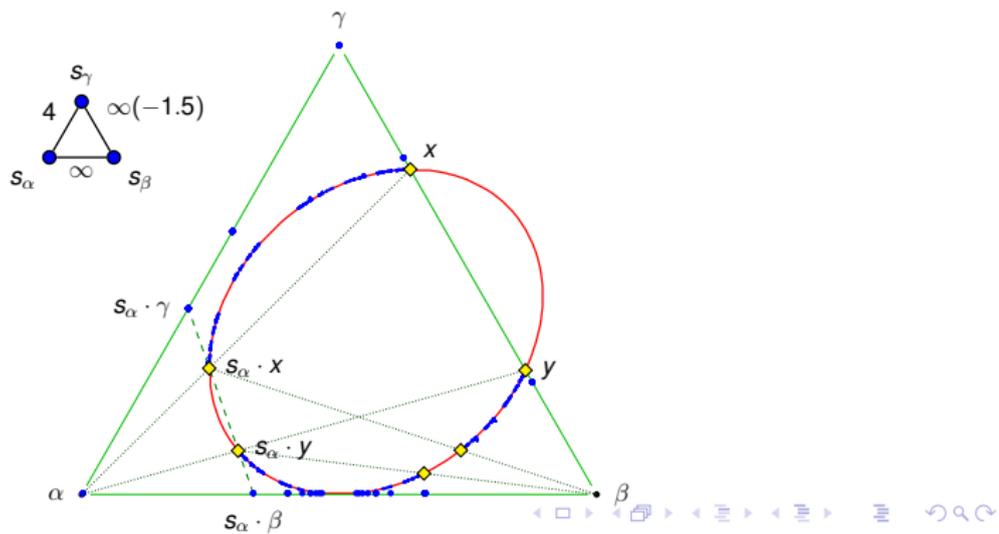
# Description "fractale" d'une partie dense de $E$



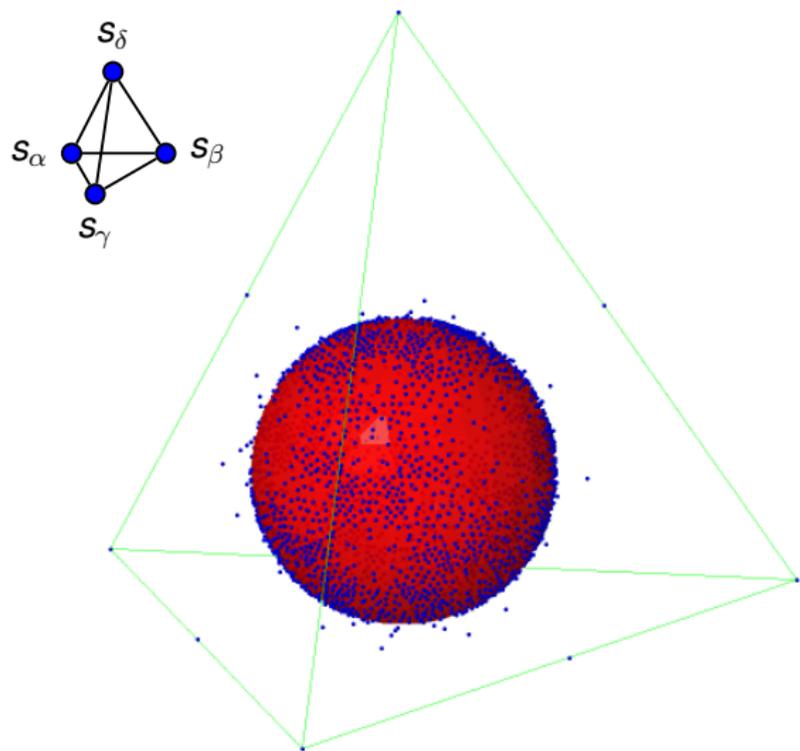
# Peut-on décrire $E$ directement?

## Conjecture

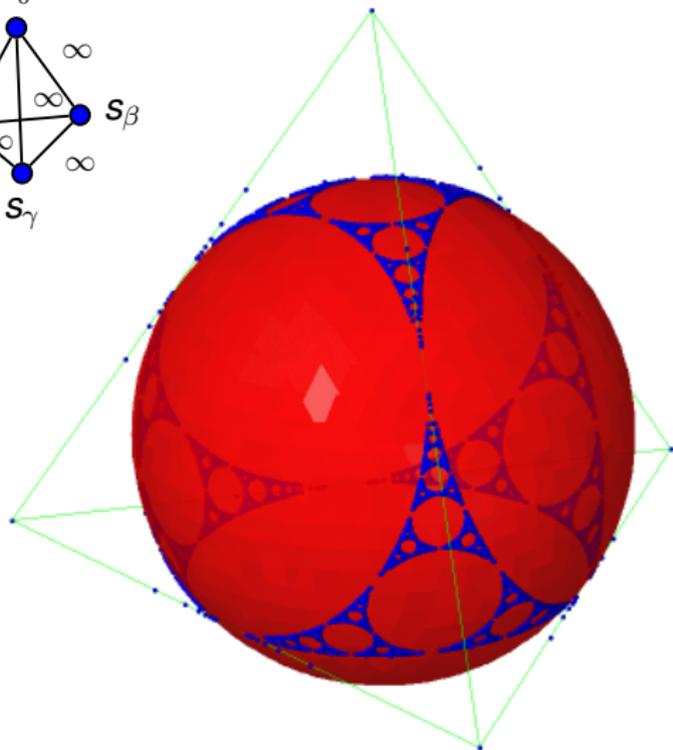
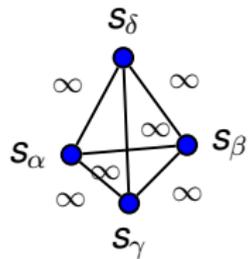
- Si  $\widehat{Q} \subseteq \text{conv}(\Delta)$ , alors  $E(\Phi) = \widehat{Q}$ .
- En général,  $E(\Phi)$  est égal à  $\widehat{Q}$  privé de toutes les images par l'action de  $W$  des parties de  $\widehat{Q}$  qui sont à l'extérieur de  $\text{conv}(\Delta)$ , i.e. :  $E(\Phi) = \widehat{Q} \cap \bigcap_{w \in W} w \cdot \text{conv}(\Delta)$ .



# Cas où $\hat{Q}$ est intérieur



# Cas où $\hat{Q}$ coupe les faces



# Conjecture équivalente

## Conjecture

- Si  $\widehat{Q} \subseteq \text{conv}(\Delta)$ , alors  $E(\Phi) = \widehat{Q}$ .
- En général,  $E(\Phi)$  est égal à  $\widehat{Q}$  privé de toutes les images par l'action de  $W$  des parties de  $\widehat{Q}$  qui sont à l'extérieur de  $\text{conv}(\Delta)$ , i.e. :  $E(\Phi) = \widehat{Q} \cap \bigcap_{w \in W} w \cdot \text{conv}(\Delta)$ .

Or  $\bigcap_{w \in W} w(\text{cone}(\Delta)) = \overline{Z} = \text{cone}(E)$  [Dyer], donc :

$$\text{Conjecture} \Leftrightarrow E = \text{conv}(E) \cap \widehat{Q}.$$

Vrai dans le cas où  $B$  est de signature  $(n-1, 1)$  (on peut se ramener au cas où  $\widehat{Q}$  est une sphère).

# Conjecture équivalente

## Conjecture

- Si  $\widehat{Q} \subseteq \text{conv}(\Delta)$ , alors  $E(\Phi) = \widehat{Q}$ .
- En général,  $E(\Phi)$  est égal à  $\widehat{Q}$  privé de toutes les images par l'action de  $W$  des parties de  $\widehat{Q}$  qui sont à l'extérieur de  $\text{conv}(\Delta)$ , i.e. :  $E(\Phi) = \widehat{Q} \cap \bigcap_{w \in W} w \cdot \text{conv}(\Delta)$ .

Or  $\bigcap_{w \in W} w(\text{cone}(\Delta)) = \overline{Z} = \text{cone}(E)$  [Dyer], donc :

$$\text{Conjecture} \Leftrightarrow E = \text{conv}(E) \cap \widehat{Q}.$$

Vrai dans le cas où  $B$  est de signature  $(n-1, 1)$  (on peut se ramener au cas où  $\widehat{Q}$  est une sphère).

# Conjecture équivalente

## Conjecture

- Si  $\hat{Q} \subseteq \text{conv}(\Delta)$ , alors  $E(\Phi) = \hat{Q}$ .
- En général,  $E(\Phi)$  est égal à  $\hat{Q}$  privé de toutes les images par l'action de  $W$  des parties de  $\hat{Q}$  qui sont à l'extérieur de  $\text{conv}(\Delta)$ , i.e. :  $E(\Phi) = \hat{Q} \cap \bigcap_{w \in W} w \cdot \text{conv}(\Delta)$ .

Or  $\bigcap_{w \in W} w(\text{cone}(\Delta)) = \bar{Z} = \text{cone}(E)$  [Dyer], donc :

$$\text{Conjecture} \Leftrightarrow E = \text{conv}(E) \cap \hat{Q}.$$

Vrai dans le cas où  $B$  est de signature  $(n-1, 1)$  (on peut se ramener au cas où  $\hat{Q}$  est une sphère).

## Autres questions

- Comment  $E$  se comporte vis-à-vis de la restriction aux **sous-groupes paraboliques** ?  
Soit  $I \subseteq \Delta$ ,  $W_I$  le sous-groupe parabolique associé,  $\Phi_I = W_I(\Delta_I)$ , et  $V_I = \text{Vect}(I) \cap V_1$ . Alors  $E(\Phi_I) \neq E(\Phi) \cap V_I$  en général! (contre-exemple en rang 5). Mais ce type de propriété de bonne restriction est valide pour  $E_2(\Phi)$  et pour d'autres sous-ensembles de  $E$  "naturels"...
- Propriétés d'autosimilarité. En rang 4, lien avec la géométrie hyperbolique et les **groupes kleinien**s (ensemble-limite en forme de **cercles d'Apollonius**).

## Autres questions

- Comment  $E$  se comporte vis-à-vis de la restriction aux **sous-groupes paraboliques** ?  
Soit  $I \subseteq \Delta$ ,  $W_I$  le sous-groupe parabolique associé,  $\Phi_I = W_I(\Delta_I)$ , et  $V_I = \text{Vect}(I) \cap V_1$ . Alors  $E(\Phi_I) \neq E(\Phi) \cap V_I$  en général! (contre-exemple en rang 5). Mais ce type de propriété de bonne restriction est valide pour  $E_2(\Phi)$  et pour d'autres sous-ensembles de  $E$  "naturels"...
- Propriétés d'autosimilarité. En rang 4, lien avec la géométrie hyperbolique et les **groupes kleinien**s (ensemble-limite en forme de **cercles d'Apollonius**).

Merci !

## Références:

- Ch. Hohlweg, J.-P. Labbé, V. Ripoll, *Asymptotical behaviour of roots of infinite Coxeter groups I*, arXiv:1112.5415.
- M. Dyer, *Imaginary cone and reflection subgroups of Coxeter groups*, arXiv:1210.5206.
- M. Dyer, Ch. Hohlweg, V. Ripoll, *Asymptotical behaviour of roots of infinite Coxeter groups II*, en préparation.