

MAT 1112

CALCUL I

Robert Bédard
UQAM

Notes pour le cours Calcul I (Sigle: MAT 1112)
offert par le département de mathématiques de l'Université du Québec à Montréal.

PREFACE

Ces notes s'adressent aux étudiantes et étudiants du cours Calcul I (Sigle: MAT1112). Elles constituent la matière pour un cours de premier cycle d'une quarantaine d'heures. Elles sont divisées en douze chapitres. Dans les six premiers chapitres, on traite du calcul différentiel pour les fonctions de plusieurs variables, alors que les six derniers chapitres portent eux sur le calcul intégral pour les fonctions de plusieurs variables. Je crois que la matière des six premiers chapitres peut être vue dans une quinzaine d'heures de cours, alors que celle des six derniers chapitres, il me semble nécessaire d'y investir au minimum vingt-cinq heures. D'ailleurs selon mon expérience, la difficulté majeure pour les étudiantes et étudiants de ce cours est dans la bonne compréhension du calcul intégral pour les fonctions de plusieurs variables.

Quelques exercices sont inclus à la fin de chaque chapitre. Ceux marqués d'un (†) sont considérés comme étant difficile et nécessitent parfois des notions vues dans d'autres cours de mathématiques. Il y a très peu d'exercices de ce type. Ils ne sont là que pour éveiller la curiosité des étudiantes et étudiants sur d'autres sujets mathématiques.

Les preuves de certains des théorèmes ou propositions ne sont qu'esquissées dans le texte. J'ai préféré procéder ainsi pour ne pas trop alourdir ces notes de cours en espérant que les étudiantes et étudiants ne m'en tiendront pas trop rigueur. Certains des graphiques ont été tracés grâce au logiciel Maple V et d'autres au logiciel Illustrator.

D'avance je remercie toute personne qui me signalera les lapsus et autres coquilles qui m'auraient échappés.

Robert Bédard, juillet 2007.

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1: Rappels sur le calcul différentiel à une variable	1
Chapitre 2: Fonctions de plusieurs variables réelles, dérivées partielles	7
Chapitre 3: Continuité	17
Chapitre 4: Approximation linéaire, le gradient et les dérivées directionnelles	21
Chapitre 5: Règle de chaînes et égalité des dérivées partielles mixtes	31
Chapitre 6: Maximums et minimums relatifs, optimisation	39
Chapitre 7: Rappel sur l'intégrale simple	51
Chapitre 8: Intégrales doubles	59
Chapitre 9: Intégrales triples	73
Chapitre 10: Jacobien, changement de coordonnées	87
Chapitre 11: Applications de l'intégrale multiple	97
Chapitre 12: Intégrales impropres, fonctions gamma et bêta et transformée de Laplace	99

CHAPITRE 1

Rappels sur le calcul différentiel à une variable.

C'est à Wilhelm Gottfried Leibnitz (1646 – 1716) et à Isaac Newton (1642 – 1727) que nous devons l'invention du calcul différentiel et intégral. Déjà depuis ses débuts, il s'est avéré un outil indispensable pour formuler des phénomènes en sciences, en génie et en sciences sociales, ainsi que pour calculer les conséquences de ceux-ci. Par exemple, Newton utilisa le calcul infinitésimal pour obtenir de sa théorie de l'attraction universelle les trois lois de Kepler pour les mouvements planétaires.

Dans ces notes, nous travaillerons avec l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels. On dit aussi la droite réelle pour \mathbf{R} et qu'on représente par une ligne droite:

Une fonction réelle $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ d'une variable réelle est une règle qui associe à tout nombre réel x d'un ensemble D contenu dans \mathbf{R} un nombre bien défini $y = f(x)$ de \mathbf{R} . On dit alors que D est le domaine de la fonction et que la fonction f est définie sur D . Dans ces notes, le domaine D consistera en général d'une réunion finie d'intervalles. Nous abuserons parfois en ne précisant pas le domaine D d'une fonction f ; dans ce cas, le domaine D sera l'ensemble des nombres réels pour lesquels la règle définissant f est applicable. Nous n'écrirons souvent que $f(x)$ pour désigner la fonction f .

Exemples 1.1:

- a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$
- b) $g(x) = \sin(x^{-1})$
- c) $h(x) = (x + 3)/(x^2 + 4x - 5)$

a), b) et c) sont des exemples de trois fonctions réelles d'une variable réelle. Le domaine de chacune de celles-ci est respectivement \mathbf{R} , $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ (c'est-à-dire tous les nombres réels à l'exception de 0) et $\mathbf{R} \setminus \{-5, 1\}$ (c'est-à-dire tous les nombres réels à l'exception de -5 et 1)

La règle définissant une fonction f peut être explicite comme ci-dessus ou encore implicite.

Exemples 1.2:

- a) L'équation $x = e^{2y}$ définit implicitement y comme une fonction de x . Explicitement nous avons $y = (\ln(x))/2$ et le domaine D est l'intervalle $(0, \infty)$ (c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels positifs)
- b) L'équation $xy - x + 2y + 1 = 0$ définit aussi implicitement y comme une fonction de x . Explicitement nous avons $y = (x - 1)/(x + 2)$ et le domaine D est $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$
- c) L'équation $(x + y)^2 = 1$ ne définit pas implicitement y comme une fonction de x . Car il y a deux solutions possibles pour y (en terme de x) à cette équation, soit $y = 1 - x$ ou soit $y = -1 - x$, il faudrait ajouter des conditions à l'équation $(x + y)^2 = 1$ pour définir correctement y en fonction de x .

Une fonction peut aussi être définie d'autres façons; par exemple, au moyen d'équations différentielles ou encore d'équations intégrales.

Avec des opérations élémentaires, il est possible d'obtenir de nouvelles fonctions. Si $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions réelles et c est un nombre réel, nous pouvons faire les opérations algébriques suivantes: $f(x) + g(x)$, $cf(x)$, $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$, etc. Il est aussi possible de définir la composition de deux fonctions. Si $z = f(y)$ (c'est-à-dire que z est une fonction de y) et $y = g(x)$ (c'est-à-dire que y est une fonction de x), alors la composition $f \circ g$ est la fonction obtenue en considérant $z = f(g(x))$ comme une fonction de x . La fonction $f \circ g$ est bien définie en x si $g(x)$ appartient au domaine de f . Si une fonction f est injective (c'est-à-dire $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$), alors f a une fonction inverse f^{-1} défini par $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$.

Exemples 1.3:

- a) Si $z = f(y) = \ln(y + 3)$ et $y = g(x) = x^2 - 4$, alors la composition $f \circ g$ est $z = \ln(x^2 - 4 + 3) = \ln(x^2 - 1)$. Le domaine de cette composition est $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
- b) Si $f(x) = e^x$, alors $f^{-1}(x) = \ln(x)$. Le domaine de f est \mathbf{R} , alors que celui de f^{-1} est $(0, \infty)$.

Soit f , une fonction réelle d'une variable réelle. On écrira $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ pour indiquer que $f(x)$ peut être aussi près de L que nous le désirons en prenant x à l'intérieur d'un intervalle $(a - \delta, a + \delta)$ suffisamment petit centré en a . La définition exacte est la suivante: pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ (dépendant de a et ϵ) tel que si x est compris entre $a - \delta$ et $a + \delta$, alors $f(x)$ est compris entre $L - \epsilon$ et $L + \epsilon$. L sera appelé la limite de f au point a . La limite d'une fonction à un point n'existe pas toujours.

Exemple 1.4:

Définissons $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ par la règle suivante: $f(x) = 1$ si x appartient à l'ensemble \mathbf{Q} des nombres rationnels, $f(x) = -1$ sinon. Alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ n'existe pas. Car, pour tout intervalle centré en 0, f prend les deux valeurs -1 et 1 . Ainsi f n'approche ni -1 , ni 1 . Cet exemple est quelque peu exotique, mais il illustre le fait que la limite n'existe pas toujours. En fait, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ n'existe pour aucun nombre réel a .

Nous écrirons aussi $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$) pour indiquer que $f(x)$ peut être aussi près de L que nous le désirons en prenant x suffisamment grand (respectivement petit). La définition exacte est la suivante: pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre réel M (dépendant de ϵ) tel que si x est plus grand (respectivement plus petit) que M , alors $f(x)$ est compris entre $L - \epsilon$ et $L + \epsilon$.

Nous écrirons aussi $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$) pour indiquer que $f(x)$ devient aussi grand (respectivement aussi petit) que nous le désirons en prenant x suffisamment près de a . Noter que ceci est un abus de notation, car la limite n'existe pas dans ces cas.

Exemples 1.5:

- a) Si $f(x) = e^{(1/x)}$ pour $x \neq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} e^{(1/x)}$ n'existe pas, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(1/x)} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{(1/x)} = 1$.
- b) Si $f(x) = \sin(x)/x$ pour $x \neq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Nous avons tracé le graphe de $f(x) = \sin(x)/x$ sur l'intervalle fermé $[-10, 10]$ dans la figure 1.1 et, sur $[-100, 100]$ dans la figure 1.2 ci-dessous. La figure 1.1 illustre bien le fait que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)/x = 1$, alors que la figure 1.2 illustre que $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)/x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin(x)/x = 0$

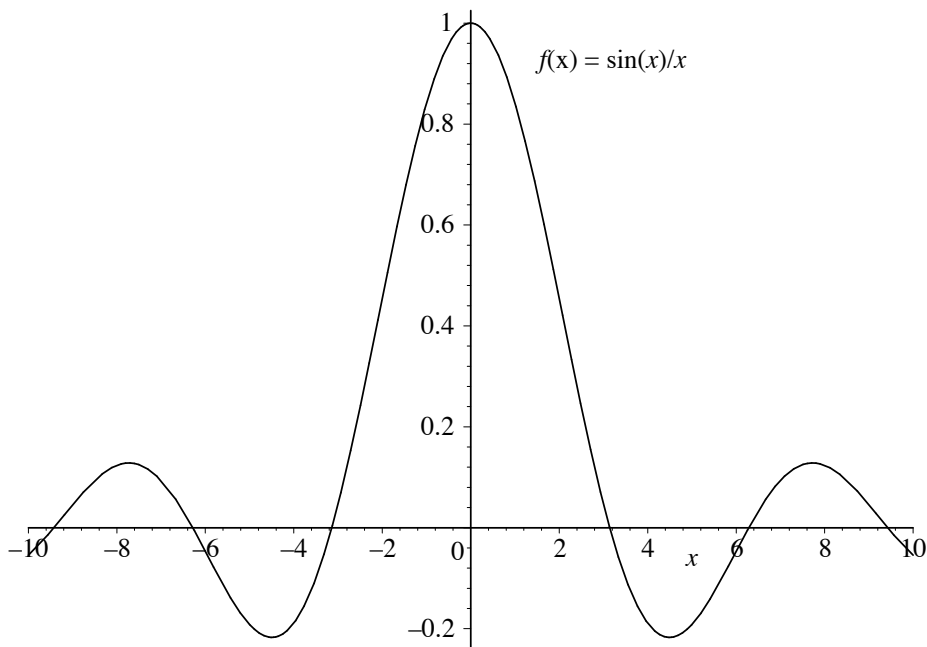


figure 1.1

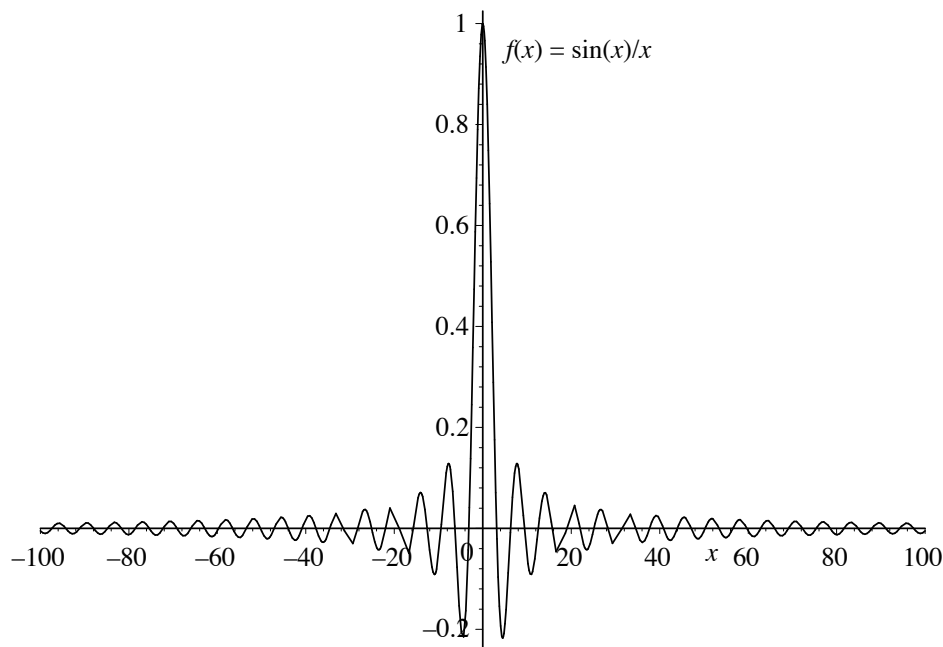


figure 1.2

Proposition 1.1:

Soient c , un nombre réel et $f(x)$, $g(x)$, deux fonctions réelles d'une variable réelle x . Supposons que les deux limites $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ existent. Alors:

- a) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$;
- b) $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cL_1$;
- c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = L_1L_2$;
- d) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x)) = L_1/L_2$, si $L_2 \neq 0$.

La proposition est aussi valable si, au lieu de a , nous avons eu plutôt ∞ ou $-\infty$.

Étant donné une fonction f et un nombre réel a du domaine de f , si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

existe, alors on dira que la fonction f est dérivable à $x = a$ et cette limite sera appelée la dérivée de f à $x = a$. Nous noterons celle-ci soit par $f'(a)$, soit par $f^{(1)}(a)$ ou encore par $\frac{df}{dx}(a)$. Si la dérivée d'une fonction f existe pour tous les points d'un domaine D , nous obtenons une nouvelle fonction $f'(x)$ sur D appelée la dérivée de f . Nous noterons aussi cette dérivée par $\frac{df}{dx}$ ou encore $f^{(1)}(x)$.

Exemple 1.6:

Si $f(x) = x^3 + x$ et $a \in \mathbf{R}$, alors

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((a + h)^3 + (a + h)) - (a^3 + a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3a^2 + 3ah + h^2 + 1) = 3a^2 + 1.$$

Ainsi $f'(x) = 3x^2 + 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Si une fonction f a une dérivée f' en tout point d'un domaine D , alors nous pouvons considérer cette nouvelle fonction f' et si celle-ci est dérivable au nombre réel $x = a$, nous dirons que f a une dérivée seconde en a . Nous noterons cette dérivée seconde d'une des façons suivantes: soit $f''(a)$, soit $f^{(2)}(a)$ ou encore $\frac{d^2f}{dx^2}(a)$. Si la dérivée seconde d'une fonction f existe en tout point d'un domaine D , nous obtenons alors

une nouvelle fonction $f''(x)$, la dérivée seconde de f , sur le domaine D . Nous la noterons aussi par $f^{(2)}(x)$ ou par $\frac{d^2 f}{dx^2}$. Nous pouvons continuer ce processus de dérivation et obtenir la dérivée troisième, la dérivée quatrième, etc. Nous noterons par $f^{(n)}(x)$ ou encore $\frac{d^n f}{dx^n}$ la dérivée n -ième de f (si elle existe).

Pour visualiser la dérivée d'une fonction, il suffit de noter que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (\text{pour } a \neq b)$$

est la pente de la droite passant par les deux points: $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. En laissant b être de plus en plus près de a , nous voyons que $f'(a)$ est la pente de la droite tangente à la courbe $(x, f(x))$ (pour x appartenant à un intervalle contenant a). La figure 1.3 illustre ceci ci-dessous. Nous avons tracé le graphe de $f(x) = x^2$, ceux des sécantes $y = 2.5x - 1.5$, $y = 2.25x - 1.25$ et $y = 2.125x - 1.125$ passant par le point $(1, 1)$, ainsi que celui de la droite tangente $y = 2x - 1$ au graphe de $f(x)$ au point $(1, 1)$.

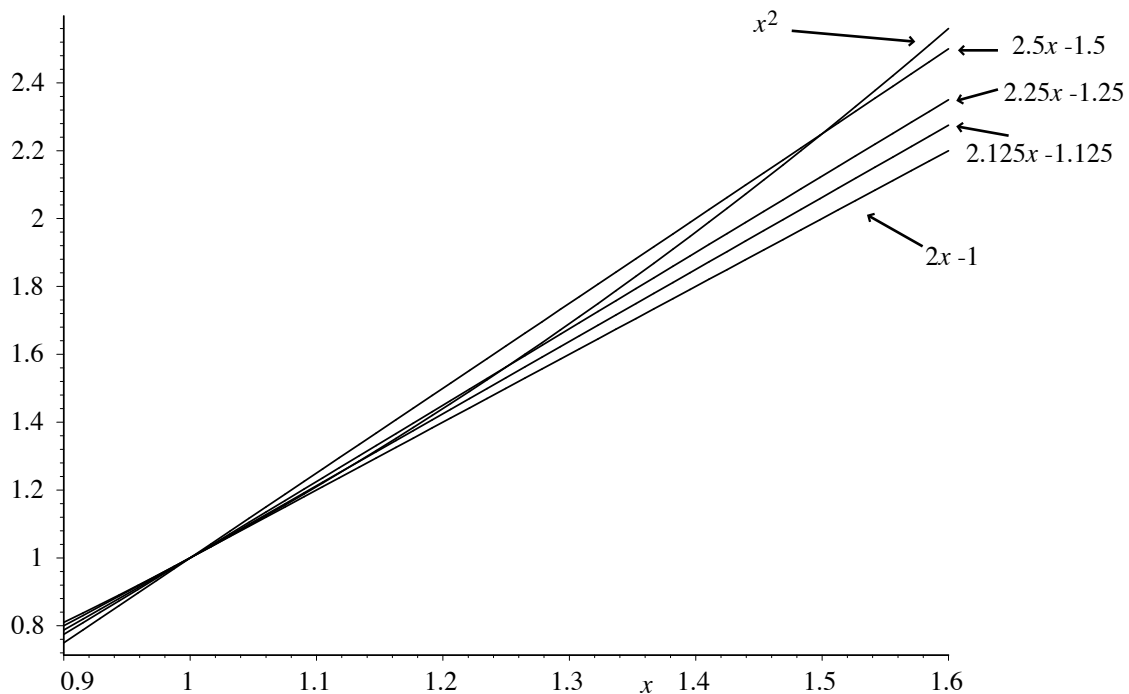


figure 1.3

Pour calculer la dérivée d'une fonction, il existe des règles obtenues de la définition de dérivée. Nous énumérons ces règles ci-dessous.

Proposition 1.2:

Soient $f(x)$, $g(x)$ deux fonctions et a , b deux nombres réels. Alors:

- a) (règle linéaire) $(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)$;
- b) (règle du produit) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
- c) (règle du quotient) $(f(x)/g(x))' = (f'(x)g(x) - f(x)g'(x))/g^2(x)$, (si $g(x) \neq 0$);
- d) (règle de chaînes) Si $h(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$, alors $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$;
- e) (règle des puissances) $(x^n)' = nx^{n-1}$ (où $n \in \mathbf{R}$);
- f) (dérivée de fonctions usuelles)

$$\begin{aligned} (e^x)' &= e^x, & (\ln(x))' &= x^{-1} \quad (\text{si } x > 0), \\ (\sin(x))' &= \cos(x), & (\cos(x))' &= -\sin(x). \end{aligned}$$

Exemple 1.7:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}((\ln(1+x^2))^{3/2}) &= (3/2)((\ln(1+x^2))^{1/2}) \frac{d}{dx}(\ln(1+x^2)) = (3/2)((\ln(1+x^2))^{1/2}) \frac{1}{(1+x^2)} \frac{d}{dx}(1+x^2) \\ &= (3/2)((\ln(1+x^2))^{1/2}) \frac{2x}{(1+x^2)}\end{aligned}$$

en utilisant les règles précédentes.

Exemple 1.8:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x \tan(x)) &= \tan(x) + x \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right) = \tan(x) + x \left(\frac{\cos(x) \cos(x) - (-\sin(x)) \sin(x)}{\cos^2(x)} \right) \\ &= \tan(x) + \frac{x}{\cos^2(x)}\end{aligned}$$

en utilisant les règles précédentes ainsi que le fait que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Si une fonction y est définie implicitement au moyen d'une équation, il est possible de calculer y' en dérivant chacun des côtés de cette équation et en utilisant les règles de dérivation ci-dessus.

Exemple 1.9:

Considérons la fonction y définie par l'équation $xy - x + 2y + 1 = 0$, alors $y + xy' - 1 + 2y' = 0$ et nous obtenons finalement $y' = (1 - y)/(2 + x)$ si $x \neq -2$.

* * *

Exercice 1.1:

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes:

- a) $f(x) = (x^3 - 5x + 2)/(x^2 + x + 1)$;
- b) $f(x) = \sqrt[3]{1 + 4x^4}$;
- c) $f(x) = (x^5 - 3) \exp(x^2)$;
- d) $f(x) = \cos(\sin(x))$.

Exercice 1.2:

Pour quelles valeurs de x , la dérivée $f'(x)$ de chacune des fonctions suivantes s'annule (c'est-à-dire $f'(x) = 0$)?

- a) $f(x) = \exp(-x^2)$;
- b) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 2$;
- c) $f(x) = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$.

Exercice 1.3:

En utilisant seulement la définition théorique de la dérivée et le fait que $\lim_{h \rightarrow 0} (\cos(h) - 1)/h = 0$, montrer que

- a) $(\sin(x))' = \cos(x)$;
- b) $(\cos(x))' = -\sin(x)$.

CHAPITRE 2

Fonctions de plusieurs variables réelles, dérivées partielles.

Très souvent les fonctions rencontrées sont dépendantes non pas d'une seule variable, mais plutôt de plusieurs. Par exemple, si nous frappons sur la membrane d'un tambour, elle vibrera et son déplacement $u(x, y, t)$ sera une fonction de trois variables: x, y, t , où (x, y) correspond à un point de la membrane et t au temps. Premièrement, nous verrons comment représenter graphiquement des fonctions réelles de deux et trois variables. Par la suite, nous définirons la notion de dérivées partielles de fonctions réelles de plusieurs variables. Dans des chapitres subséquents, nous discuterons comment utiliser ces dérivées partielles pour résoudre certains problèmes d'optimisation.

Nous noterons par \mathbf{R}^n , l'ensemble des n -tuplets (x_1, x_2, \dots, x_n) dont toutes les entrées x_i sont des nombres réels. Dans le cas de \mathbf{R}^2 , nous écrirons plutôt ces éléments sous la forme (x, y) où x, y sont des nombres réels; alors que, pour \mathbf{R}^3 , ces éléments seront notés sous la forme (x, y, z) où x, y et z sont des nombres réels.

Il est possible de représenter graphiquement \mathbf{R}^2 comme l'ensemble des points du plan et \mathbf{R}^3 comme l'ensemble des points de l'espace à trois dimensions. Nous avons illustré ceci dans les figures 2.1 et 2.2 ci-dessous.

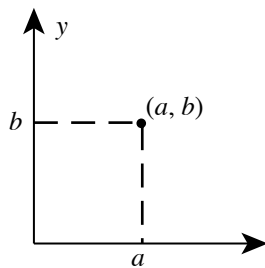


figure 2.1

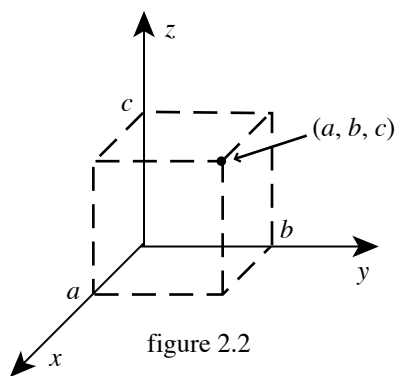


figure 2.2

Noter la façon de désigner les axes de \mathbf{R}^3 dans la figure 2.2. Nous avons orienté \mathbf{R}^3 en utilisant la règle de la main droite. Nous utiliserons toujours cette orientation de \mathbf{R}^3 par la suite.

Une fonction réelle $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ de n variables réelles est une règle bien définie qui associe à tout n -tuplet (x_1, x_2, \dots, x_n) d'un ensemble D contenu dans \mathbf{R}^n un nombre bien défini $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de \mathbf{R} . On dit alors que D est le domaine de la fonction et que la fonction f est définie sur D . Dans ces notes, D sera généralement un ouvert de \mathbf{R}^n , c'est-à-dire que pour chaque point (x_1, x_2, \dots, x_n) de D , il existe un nombre réel $\epsilon > 0$ (dépendant de notre point (x_1, x_2, \dots, x_n)) tel que si un n -tuplet (y_1, y_2, \dots, y_n) de \mathbf{R}^n satisfait la condition suivante: $x_i - \epsilon < y_i < x_i + \epsilon$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, alors (y_1, y_2, \dots, y_n) est aussi un point de D . Nous abuserons parfois en ne précisant pas le domaine D d'une fonction f ; dans ce cas, le domaine D sera l'ensemble des n -tuplets de \mathbf{R}^n pour lesquels la règle définissant f est applicable. Nous n'écrirons souvent que $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pour désigner la fonction f .

Exemples 2.1:

- a) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_3 - 5x_4)/x_2$
- b) $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sin(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)$
- c) $f(x, y, z) = 1/(x^2 + y^2 + z^2)$

a), b) et c) sont respectivement des fonctions réelles de 4, 5 et 3 variables réelles. Les domaines de celles-ci sont respectivement $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_2 \neq 0\}$, \mathbf{R}^5 et $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Tout comme pour les fonctions d'une seule variable, la règle définissant une fonction de plusieurs variables peut être explicite comme ci-dessus, implicite ou encore au moyen d'équations aux dérivées partielles. Nous

définirons et illustrerons ceci un peu plus loin dans le texte. Il est aussi possible d'effectuer des opérations algébriques, ainsi que la composition de fonctions de plusieurs variables. Nous reviendrons sur ceci après avoir présenté la notion de dérivées partielles.

Il est possible de représenter graphiquement une fonction de deux variables $f(x, y)$ au moyen d'un graphe dans \mathbf{R}^3 . Il suffit de tracer tous les points $(x, y, f(x, y)) \in \mathbf{R}^3$ avec (x, y) appartenant au domaine D de f . Souvent le graphe d'une telle fonction sera une surface dans \mathbf{R}^3 .

Exemples 2.2:

a) Le graphe de la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$ est tracé à la figure 2.3.

Noter que dans cette figure, nous avons tracé les axes des x et y en les décalant de l'origine afin de permettre une meilleure visualisation du graphe de f . Le graphe de f nous donne une surface dans \mathbf{R}^3 qui est un paraboloïde hyperbolique.

b) Le graphe de la fonction $g(x, y) = x + 0.5y$ est tracé à la figure 2.4. Noter que dans cette figure, nous avons aussi tracé les axes des x et y en les décalant de l'origine afin de permettre une meilleure visualisation du graphe de g . Le graphe de g nous donne une surface dans \mathbf{R}^3 qui est un plan.

Il est aussi possible de représenter une fonction $f(x, y)$ au moyen de courbes de niveau. Une courbe de niveau de $f(x, y)$ est définie comme un sous-ensemble de \mathbf{R}^2 de la forme $C_\nu = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) = \nu\}$ où ν est un nombre réel. Il suffit alors pour décrire f de tracer quelques-unes de ses courbes de niveau C_ν .

L'utilisation des courbes de niveau est très répandue en cartographie. Nous pouvons énumérer quelques exemples de ceci. Une ligne isohypse est une courbe sur une carte représentant les points d'une région terrestre ayant la même altitude; une ligne isotherme, celle des points d'une région ayant la même température moyenne; une ligne isobare, celle des points d'une région ayant la même pression atmosphérique à un instant et à une altitude donnés. Une ligne isobathe est une courbe sur une carte représentant les points d'une région terrestre ayant la même profondeur et une ligne isohyète, celle des points d'une région ayant les mêmes pluies moyennes.

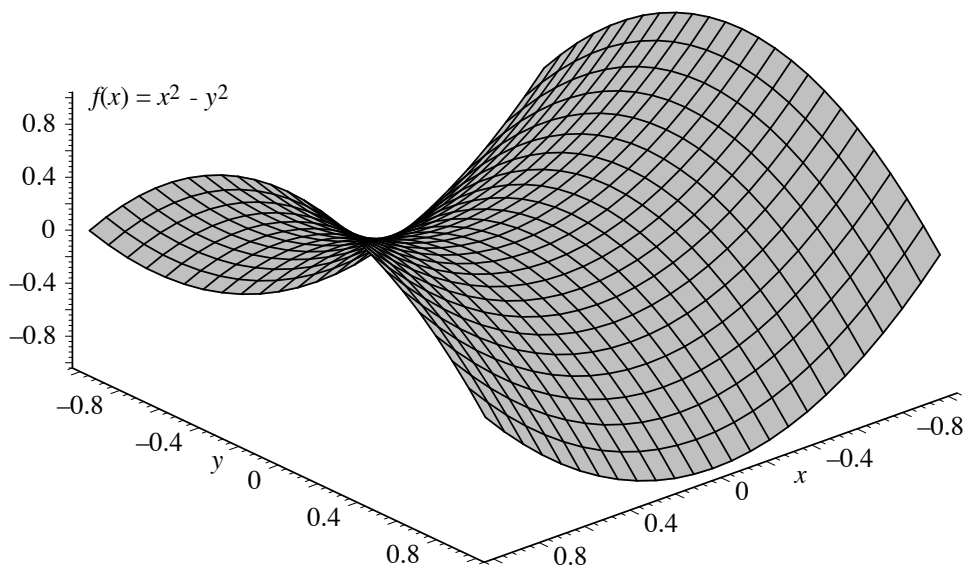


figure 2.3

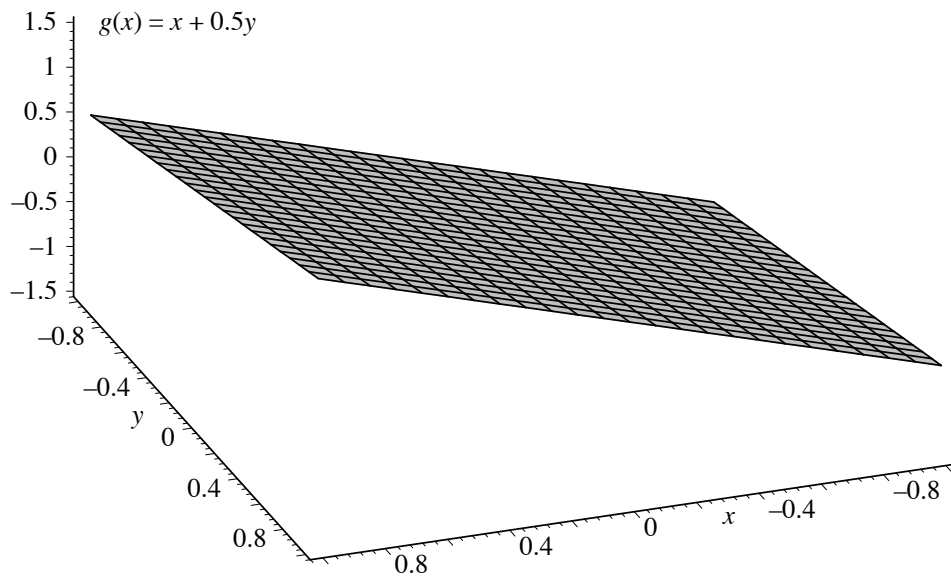


figure 2.4

Exemples 2.3:

a) Les courbes de niveau C_ν de la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$ de l'exemple 2.2 a) ci-dessus sont les courbes suivantes. Si $\nu = 0$, alors C_ν est la réunion des deux droites $x - y = 0$ et $x + y = 0$ car $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$ ou $x + y = 0$. Si $\nu \neq 0$, alors la courbe de niveau C_ν est une hyperbole. Quelques-unes de ces courbes de niveau sont tracées à la figure 2.5.

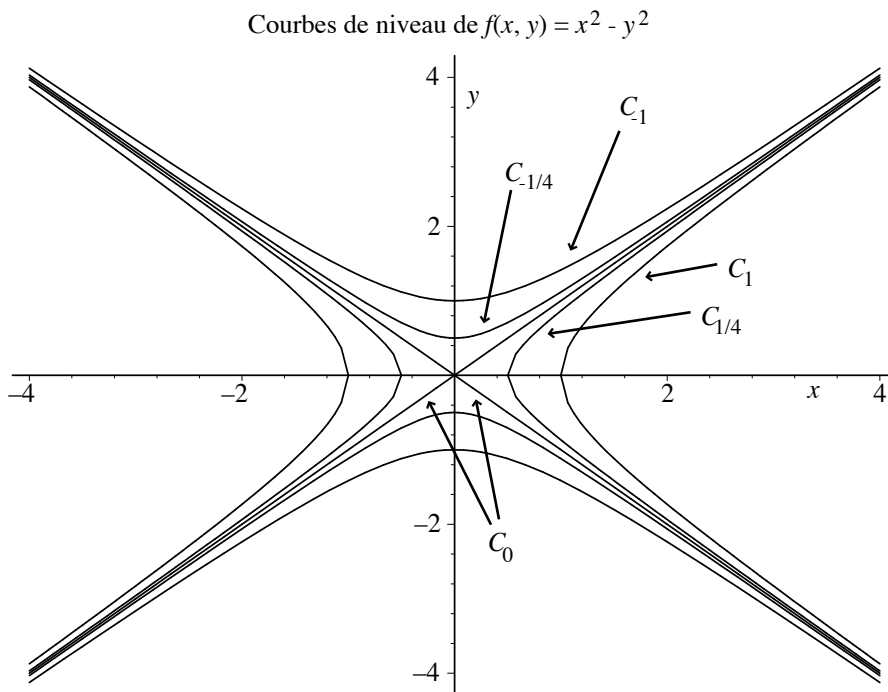
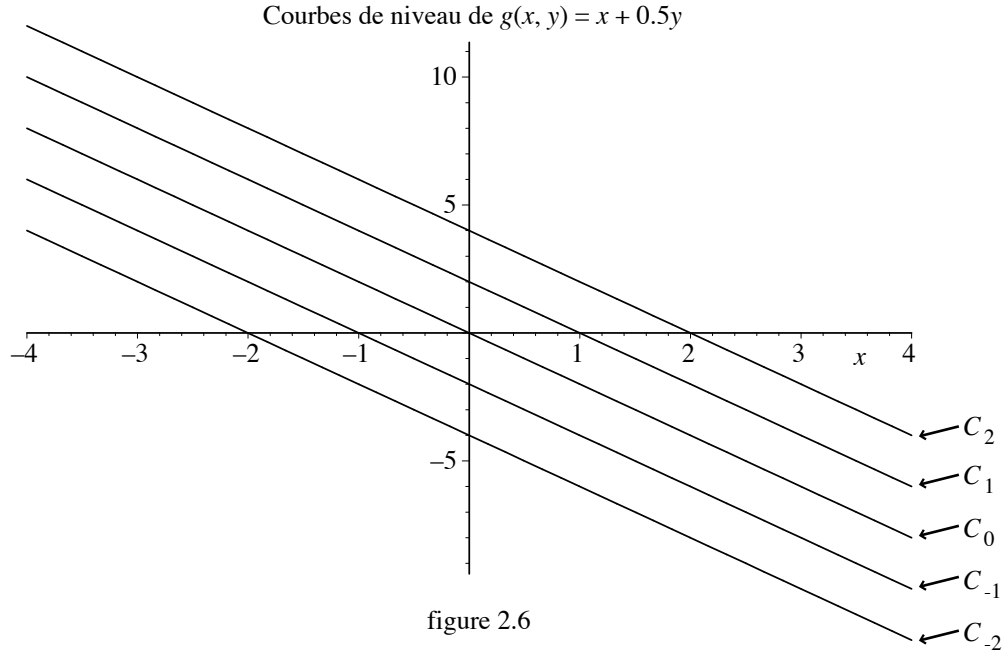


figure 2.5

b) Les courbes de niveau C_ν de la fonction $g(x, y) = x + 0.5y$ de l'exemple 2.2 b) sont les droites dont la

la pente est -2 car $x + 0.5y = \nu \Leftrightarrow y = -2x + 2\nu$. Quelques-unes de ces courbes de niveau sont tracées à la figure 2.6.



Pour représenter graphiquement une fonction de trois variables $f(x, y, z)$ au moyen d'un graphe, il faudrait avoir recours à \mathbf{R}^4 . Ceci s'avère impossible. Mais il est possible d'avoir recours à des surfaces de niveau pour représenter $f(x, y, z)$. Une surface de niveau de $f(x, y, z)$ est un sous-ensemble de \mathbf{R}^3 de la forme $S_\nu = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid f(x, y, z) = \nu\}$ où ν est un nombre réel. Il suffit alors pour décrire f de tracer quelques-unes de ses surfaces.

Exemples 2.4:

a) Les surfaces de niveau de S_ν de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ sont des paraboloides elliptiques $S_\nu = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x^2 + y^2 - \nu\}$. Quelques-unes de ces surfaces de niveau sont tracées à la figure 2.7.

b) Les surfaces de niveau de S_ν de la fonction $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2$ sont des ellipsoïdes lorsque $\nu > 0$ et l'origine $\{(0, 0, 0)\}$ lorsque $\nu = 0$. Noter que $S_\nu = \emptyset$ lorsque $\nu < 0$. Quelques-unes de ces surfaces de niveau sont tracées à la figure 2.8.

c) Les surfaces de niveau S_ν de $h(x, y, z) = x + y - z$ sont des plans dans \mathbf{R}^3 .

Nous n'insisterons pas plus sur les surfaces de niveau dans ces notes. Il est en général difficile de tracer les surfaces de niveau d'une fonction de trois variables réelles. Nous allons maintenant définir la notion de dérivée partielle premièrement pour les fonctions de deux variables, ensuite pour celles de trois variables et finalement pour celles de n variables.

Surfaces de niveau de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$

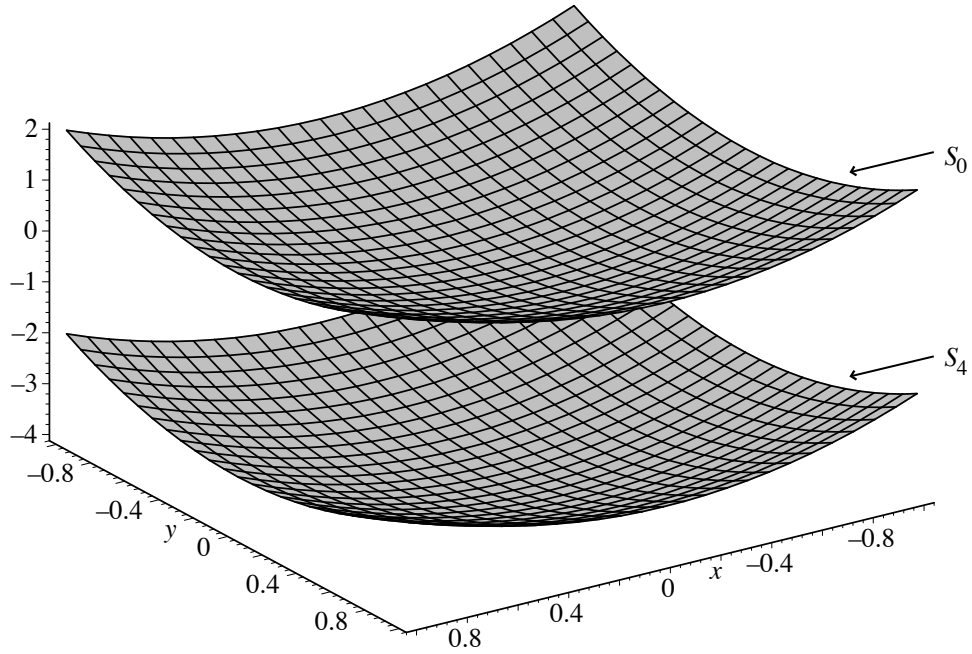


figure 2.7

Surface de niveau de $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2$

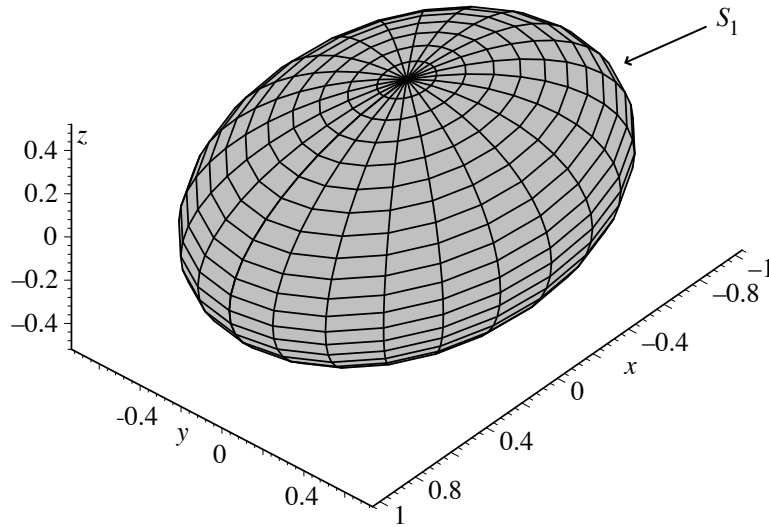


figure 2.8

Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables définie sur le domaine D . Alors la dérivée partielle de f par rapport à x au point $(a, b) \in D$ est la dérivée au point $x = a$ de la fonction d'une variable $x \mapsto f(x, b)$ obtenue en posant $y = b$ dans la définition de f . Cette dérivée partielle est notée

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(a,b)} \text{ ou encore } f_x(a, b).$$

Plus formellement, nous avons

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a,b)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}.$$

De façon similaire, la dérivée partielle de f par rapport à y au point $(a, b) \in D$ est la dérivée au point $y = b$ de la fonction d'une variable $y \mapsto f(a, y)$ obtenue en posant $x = a$ dans la définition de f . Cette dérivée partielle est notée

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(a,b)} \text{ ou encore } f_y(a, b).$$

Ainsi formellement nous avons

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(a,b)} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}.$$

Si la dérivée partielle $f_x(a, b)$ par rapport à x (respectivement $f_y(a, b)$ par rapport à y) est définie pour tout point (a, b) appartenant à un domaine D' , nous obtenons ainsi une nouvelle fonction notée f_x (respectivement f_y).

Nous allons maintenant illustrer comment calculer les dérivées partielles f_x et f_y pour la fonction $f(x, y) = x \sin(x^2 y) + 2xy - 3x + 4y$. Pour calculer f_x , il suffit de considérer y comme une constante et de prendre la dérivée de f par rapport à x avec cette hypothèse. Nous obtenons alors

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \sin(x^2 y) + x(\cos(x^2 y))2xy + 2y - 3.$$

Alors que pour calculer f_y , il suffit de considérer x comme une constante et de prendre la dérivée de f par rapport à y avec cette hypothèse. Nous obtenons alors

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x^3(\cos(x^2 y)) + 2x + 4.$$

Pour donner un sens plus concret à ce que sont les dérivées partielles, il faut procéder de la façon suivante. Si nous considérons l'intersection du graphe de $f(x, y)$ avec le plan vertical $y = b$ dans \mathbf{R}^3 , nous obtenons une courbe et $f_x(a, b)$ est la pente de la droite tangente à cette courbe au point $x = a$. De façon similaire, si nous considérons l'intersection du graphe de $f(x, y)$ avec le plan vertical $x = a$ dans \mathbf{R}^3 , nous obtenons une courbe et $f_y(a, b)$ est la pente de la droite tangente à cette courbe au point $y = b$. Nous avons illustrer ceci à la figure 2.9.

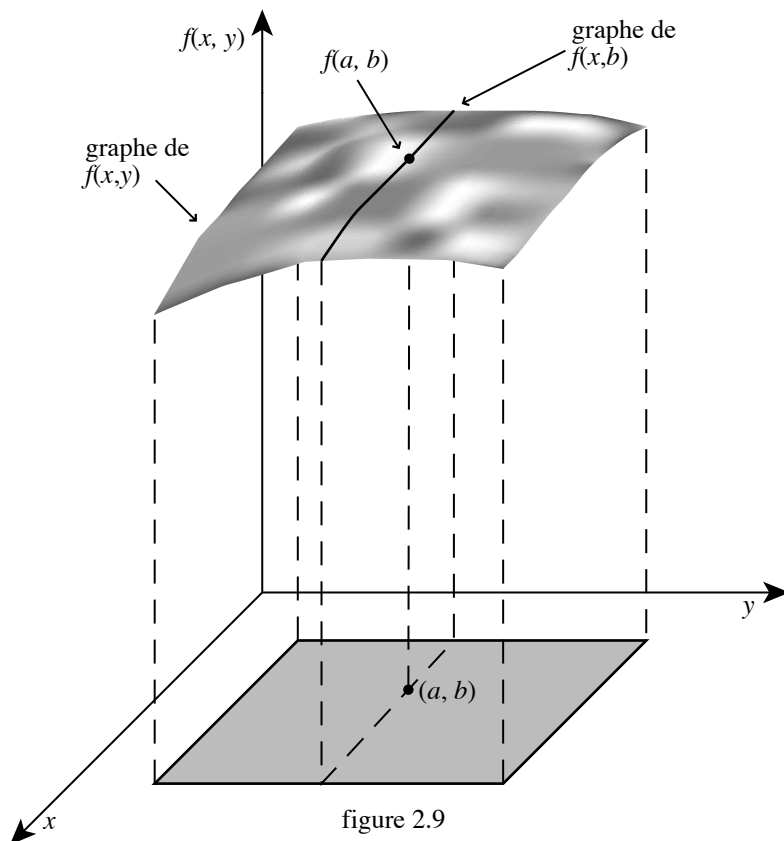


figure 2.9

Tout comme pour les fonctions à une variable, il existe des dérivées partielles d'ordres supérieurs pour $f(x, y)$. Plus précisément, les dérivées partielles f_x et f_y de $f(x, y)$ sont des fonctions de deux variables, il est donc possible de considérer leurs dérivées partielles. Nous obtenons ainsi quatre dérivées partielles mixtes d'ordre deux que l'on notera

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad (\text{respectivement } f_{xx}, f_{yx}, f_{xy} \text{ et } f_{yy}).$$

Elles sont définies par les formules suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Il faut ici noter la différence dans ces deux systèmes de notation dans l'ordre de différenciation. Nous allons illustrer ceci dans un exemple.

Exemples 2.5:

Soit $f(x, y) = 2x^3y + e^{xy}$. Alors:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 6x^2y + ye^{xy}, & \frac{\partial f}{\partial y} &= 2x^3 + xe^{xy}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(6x^2y + ye^{xy}) = 12xy + y^2e^{xy}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^3 + xe^{xy}) = 6x^2 + e^{xy} + xye^{xy}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}(6x^2y + ye^{xy}) = 6x^2 + e^{xy} + xye^{xy}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^3 + xe^{xy}) = x^2e^{xy}. \end{aligned}$$

Noter que dans cet exemple nous avons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Ceci n'est pas fortuit. Nous expliquerons dans un chapitre ultérieur sous quelles conditions ceci est vrai .

En procédant comme pour les dérivées partielles d'ordre deux, il est possible de considérer des dérivées partielles d'ordre trois, quatre, . . . , etc. Par exemple,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right), & \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right), & \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right), \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right), & \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right), & \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right), \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right), & \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right), & & \text{etc.} \end{aligned}$$

Il est important de noter que l'ordre de dérivation est déterminé en lisant les termes du "dénominateur" de la droite vers la gauche. Il est aussi possible de noter ces dérivées de la façon suivante:

$$\begin{aligned} f_{xxx} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, & f_{xxy} &= \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, & f_{xyx} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \\ f_{xyy} &= \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, & f_{yxx} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, & f_{yxy} &= \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \\ f_{yyx} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, & f_{yyy} &= \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}, & & \text{etc.} \end{aligned}$$

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que le cas des fonctions de deux variables. Mais il est facile de généraliser la notion de dérivées partielles pour les fonctions de trois variables réelles. Soient $f(x, y, z)$, une fonction de trois variables x, y et z définie sur le domaine D et $(a, b, c) \in D$. Alors les dérivées partielles de f au point (a, b, c) sont définies par

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(a,b,c)} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(a+r, b, c) - f(a, b, c)}{r}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(a,b,c)} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(a, b+s, c) - f(a, b, c)}{s}, \\ \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(a,b,c)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a, b, c+t) - f(a, b, c)}{t}. \end{aligned}$$

En d'autres mots, la dérivée partielle f_x est obtenue en dérivant la fonction f par rapport à x tout en considérant y et z comme des constantes. De la même façon, la dérivée partielle f_y est obtenue en dérivant la fonction f par rapport à y tout en considérant x et z comme des constantes et la dérivée partielle f_z est obtenue en dérivant la fonction f par rapport à z tout en considérant x et y comme des constantes.

Exemple 2.6:

Si $f(x, y, z) = x^3y + xz^2 + y^4z^6$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + z^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 4y^3z^6, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2xz + 6y^4z^5.$$

Tout comme pour les fonctions de deux variables, il est possible de considérer les dérivées partielles mixtes d'ordre deux, trois, etc. Le lecteur n'aura aucune difficulté à généraliser ces dérivées d'ordres supérieurs. Nous illustrerons ceci dans les exercices à la fin de ce chapitre.

Finalement soient $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction définie sur un domaine D de \mathbf{R}^n et $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$. Alors la dérivée partielle de f par rapport à x_i au point (a_1, a_2, \dots, a_n) est

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{(a_1, a_2, \dots, a_n)} = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_i + h_i, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h_i}.$$

Il est aussi facile de généraliser aux fonctions à n variables les dérivées mixtes d'ordres supérieurs.

Exemple 2.7:

Soit $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^4 x_2 + x_3 x_4^5$. Alors:

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_4^5, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}(4x_1^3 x_2) = 12x_1^2 x_2, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_4^2 \partial x_3} = 20x_4^3.$$

* * *

Exercice 2.1:

Pour chacune des fonctions $f(x, y)$ suivantes, tracer son graphe et déterminer ses courbes de niveau:

- a) $f(x, y) = 2x^2 + y^2$;
- b) $f(x, y) = e^{xy}$;
- c) $f(x, y) = |x + y|$ où $|\cdot|$ est la valeur absolue.

Exercice 2.2:

Déterminer les dérivées partielles f_x et f_y pour chacune des fonctions $f(x, y)$ suivantes:

- a) $f(x, y) = (x^2 - 3xy + y^4)/(2x + 3y)$;
- b) $f(x, y) = e^{5 \cos(xy)}$
- c) $f(x, y) = (x^2 + xy + y^2) \cos(xy)$
- d) $f(x, y) = 2xy/e^{x+y}$.

Exercice 2.3:

Calculer toutes les dérivées d'ordre ≤ 2 de la fonction $f(x, y) = x^2 + 3xy^5 + \cos(xy)$, i. e. calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Exercice 2.4:

Montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

pour toute fonction $f(x, y)$ de la forme

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \dots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n$$

où a_0, a_1, \dots, a_n sont des nombres réels.

Exercice 2.5:

Montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

pour toute fonction $f(x, y)$ de la forme

$$\cos(ax^p y^q) + \sin(bx^r y^s)$$

où a, b sont des nombres réels et p, q, r, s sont des entiers positifs.

Exercice 2.6:

En utilisant la définition de dérivées partielles, montrer que

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(0,0)}$$

pour la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{si } x = 0 \text{ ou } y = 0; \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 2.7:

Pour chacune des fonctions $f(x, y)$ suivantes, déterminer les points (a, b) pour lesquels nous avons simultanément

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 :$$

a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2;$

b) $f(x, y) = x^3y + xy^2.$

Exercice 2.8:

Pour la fonction $f(x, y, z) = (x^2 + xy + yz)e^{x+2y}$, calculer les dérivées partielles suivantes:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z}.$$

Exercice 2.9:

Déterminer $f_{xy}(0, 0)$ et $f_{yx}(0, 0)$ pour la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Que peut-on déduire de ce calcul?

Exercice 2.10:

Même question qu'au numéro précédent, mais cette fois pour la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} yx^4 \sin(1/x), & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

CHAPITRE 3

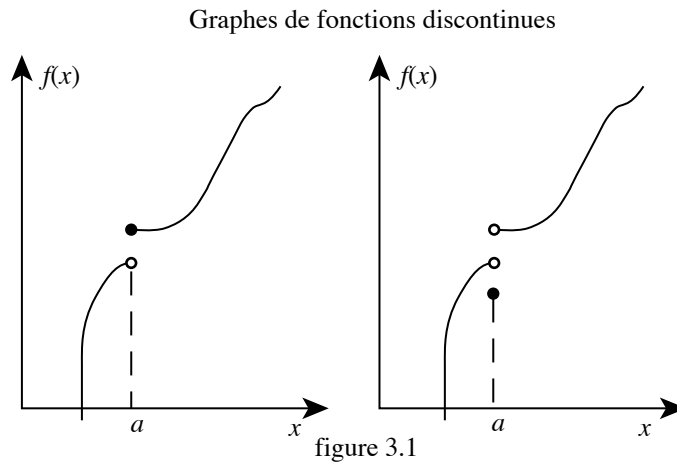
Continuité.

Ce chapitre sera bref. Nous y décrivons la notion de continuité pour les fonctions de plusieurs variables. Beaucoup de résultats sur les fonctions de plusieurs variables ne sont vérifiés qu'avec l'hypothèse que celles-ci et leurs dérivées partielles soient continues. Nous rappellerons premièrement la définition de continuité pour les fonctions d'une variable. Après ce rappel, nous définirons la notion de limite dans le contexte des fonctions de plusieurs variables, ainsi que la continuité.

Soient $f(x)$, une fonction d'une variable x définie sur le domaine D et $a \in D$. Alors

$$f \text{ est continue au point } a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Si f n'est pas continue à $x = a$, on dit que f est discontinue à $x = a$. En d'autres mots, si f est continue à $x = a$, alors $f(a)$ est définie et lorsque x approche a , alors $f(x)$ approche $f(a)$. De façon très imprécise, on peut dire que f n'a pas de saut, de trou à $x = a$. Ci-dessous nous avons tracé les graphes de fonctions discontinues dans la figure 3.1. Si f est continue à chacun des points du domaine D , on dit alors que f est continue sur D .



Soient $f(x, y)$, une fonction de deux variables définie sur le domaine D et $(a, b) \in D$. Nous allons maintenant définir ce qu'est la limite de $f(x, y)$ si (x, y) approche (a, b) . On dit que L est la limite de $f(x, y)$ lorsque (x, y) approche (a, b) et qu'on note

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ (qui dépend de (a, b) et de ϵ) tel que, pour tout point $(x, y) \in D$ et satisfaisant la condition suivante: $\max\{|x - a|, |y - b|\} < \delta$, alors nous avons $|f(x, y) - L| < \epsilon$. Nous avons représenté ceci à la figure 3.2. Ainsi $f(x, y)$ approche L lorsque (x, y) approche (a, b) peu importe la direction. Noter que la limite n'existe pas toujours.

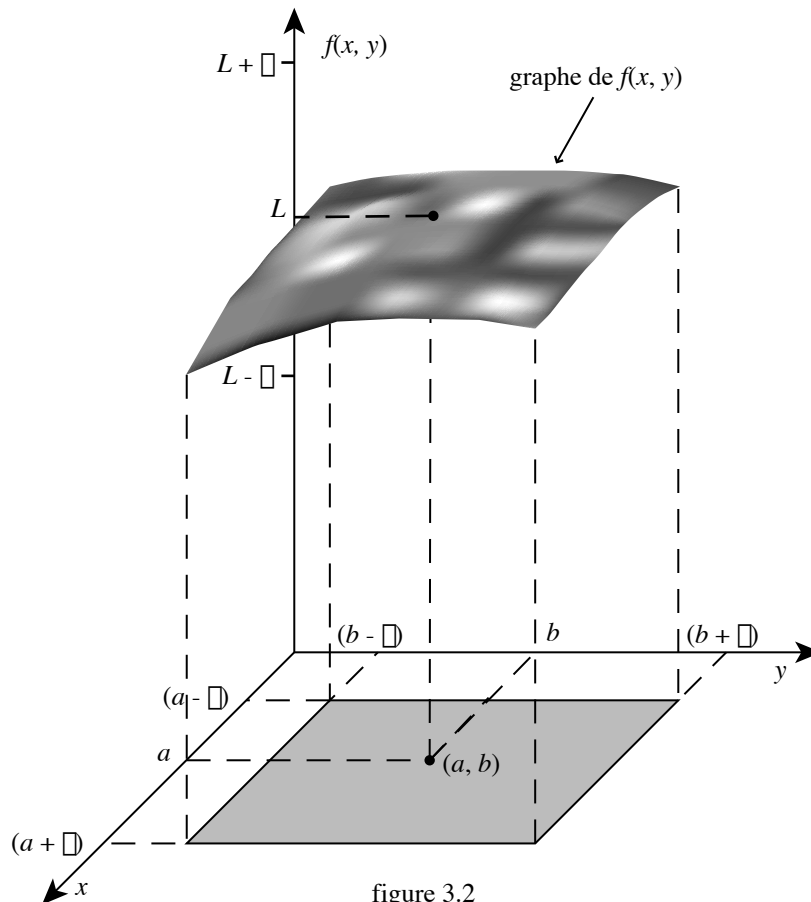


figure 3.2

Exemples 3.1:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x + y) = 0$.

b) Soit

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y / (x^4 + y^2) & \text{si } y \neq 0; \\ 0, & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas. Car nous avons que, sur l'axe des x , $f(x, y) = f(x, 0) = 0$; alors que sur la parabole $y = x^2$ pour $x \neq 0$, $f(x, y) = f(x, x^2) = 1/2$.

Soient $f(x, y)$, une fonction à deux variables définie sur le domaine D et (a, b) , un point de D . On dit que la fonction $f(x, y)$ est continue au point (a, b) si et seulement si $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$. Si une fonction $f(x, y)$ est continue à chacun des points $(a, b) \in D$, on dit alors que f est continue sur D .

Proposition 3.1:

a) Soient $f(x, y)$ et $g(x, y)$, deux fonctions continues au point $(x, y) = (a, b)$, c et d , deux nombres réels.

Alors:

$cf(x, y) + dg(x, y)$, $f(x, y)g(x, y)$ et $f(x, y)/g(x, y)$ (si $g(a, b) \neq 0$) sont des fonctions continues à $(x, y) = (a, b)$.

b) La composition des fonctions continues est continue.

La plupart des fonctions rencontrées dans ce cours seront continues. Les polynômes, les fonctions cosinus, sinus et exponentielles sont continues. Les fonctions $\log_b(x)$, $\ln(x)$ sont continues pour $x > 0$.

Exemples 3.2:

a) $x^2 y + 2x^3 y + x + 5y$, e^{x+2y} , $\sin(y + \cos(xy))$ sont des fonctions continues sur \mathbf{R}^2 .

b) $(x^2 + y^2)^{-1}$ est continue sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Nous allons maintenant définir les notions de limite et continuité pour une fonction de n variables. Soient $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, une fonction de n variables définie sur le domaine D et $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$. On dira que le nombre réel L est la limite de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ lorsque (x_1, x_2, \dots, x_n) approche (a_1, a_2, \dots, a_n) et qu'on note

$$\lim_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = L$$

si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ (dépendant de (a_1, a_2, \dots, a_n) et de ϵ) tel que, $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ et satisfaisant: $\max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|, \dots, |x_n - a_n|\} < \delta$, nous avons $|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - L| < \epsilon$.

Ainsi $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ approche L lorsque (x_1, x_2, \dots, x_n) approche (a_1, a_2, \dots, a_n) peu importe la direction. Noter que la limite n'existe pas toujours.

Soient $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, une fonction à n variables définie sur le domaine D et $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$. On dira que $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est continue au point (a_1, a_2, \dots, a_n) si et seulement si

$$\lim_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

La proposition 3.1 est aussi valable pour les fonctions à n variables.

★ ★ ★

Exercice 3.1:

Pour chacune des fonctions suivantes $f(x, y)$, calculer $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ et indiquer si f est continue à $(0, 0)$.

a) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} (xy)^2/((xy)^2 + (x + y)^2), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Exercice 3.2:

Etudier la continuité sur \mathbf{R}^2 des fonctions $f(x, y)$ suivantes telles que $f(0, 0) = 0$ et, pour $(x, y) \neq (0, 0)$, nous ayons

a) $f(x, y) = \frac{(x^3 + y^3)}{(x^2 + y^2)}$, b) $f(x, y) = \frac{(x + y)^2}{(x^2 + y^2)}$, c) $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)}$, d) $f(x, y) = \frac{x^3 y}{(x^4 + y^2)}$.

Exercice 3.3:

Etudier la continuité et l'existence des dérivées partielles de la fonction $f(x, y)$ définie sur \mathbf{R}^2 par

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^3 - y^3)/(x^2 + y^2), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Exercice 3.4:

Indiquer si chacune des fonctions f ci-dessous est continue à l'origine $(0, 0)$ et calculer les dérivées partielles suivantes: $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$ et $f_{xx}(0, 0)$.

$$\text{a) } f(x, y) = \begin{cases} (x^3 + 2xy^2)/(3x^2 + 4y^2), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)/(x - y), & \text{si } x \neq y; \\ 0, & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Exercice 3.5:

Soit la fonction $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^4 - y^3)/(x^2 + 2y^2), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Est-ce que la fonction f est continue à l'origine $(0, 0)$?

Exercice 3.6 (†):

Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur \mathbf{R} . Pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, posons $F(x, y) = \int_x^y f(t) dt$.

a) Montrer que F est continue sur \mathbf{R}^2

b) Déterminer les dérivées partielles F_x et F_y .

Exercice 3.7 (†):

Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, une fonction réelle d'une variable réelle. Montrer que la fonction $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $F(x, y) = f(x)$ est continue au point $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ si et seulement si f est continue au point $a \in \mathbf{R}$.

CHAPITRE 4

Approximation linéaire, le gradient et les dérivées directionnelles.

Soit $y = f(x)$, une fonction réelle d'une seule variable. La dérivée de f au point $x = c$ est

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_c = \left. \frac{df}{dx} \right|_c = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

et ceci peut être récrit

$$\Delta y = \left(\left. \frac{dy}{dx} \right|_c \right) h + \epsilon h,$$

où $\Delta y = f(c+h) - f(c)$ et ϵ (dépendant de h et de c) est tel que $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon = 0$.

Cette dernière formule nous fournit une approximation linéaire de $y = f(x)$, c'est - à - dire que

$$f(c+h) \approx f(c) + \left(\left. \frac{dy}{dx} \right|_c \right) h$$

si h est approximativement nul. Graphiquement nous avons représenté ceci pour $f(x) = \sin(x)$ à $c = \pi/4$ dans la figure 4.1 . Dans ce cas, $f'(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.

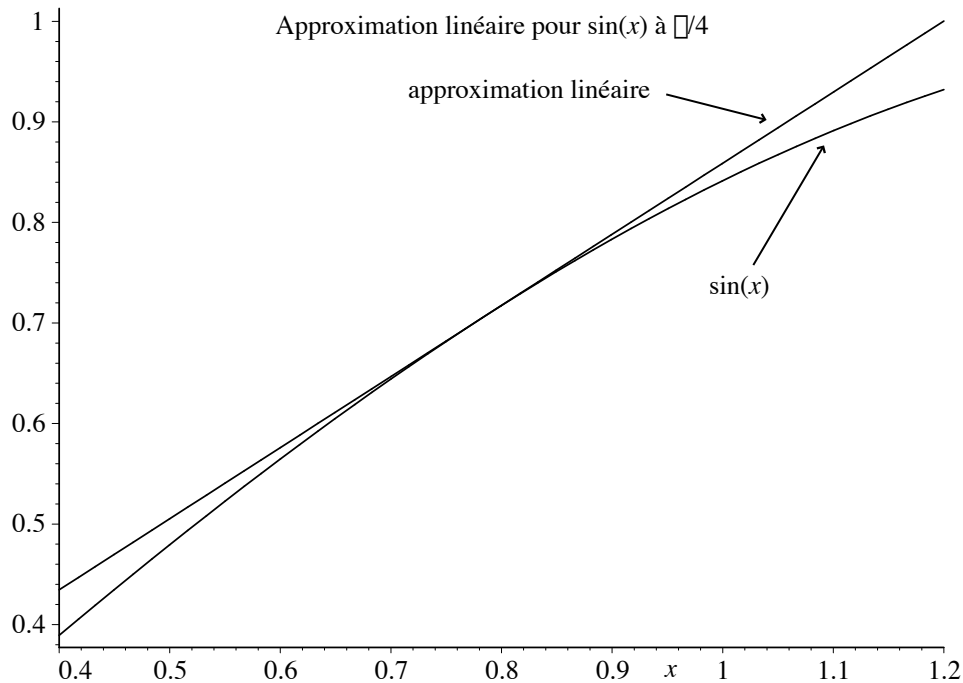


figure 4.1

Nous voulons premièrement décrire un résultat similaire d'approximation linéaire pour les fonctions de deux variables, ensuite pour celles de trois variables et finalement pour celles de n variables. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous définirons le gradient et les dérivées directionnelles d'une fonction de plusieurs variables et finalement nous décrirons la relation entre ces deux notions.

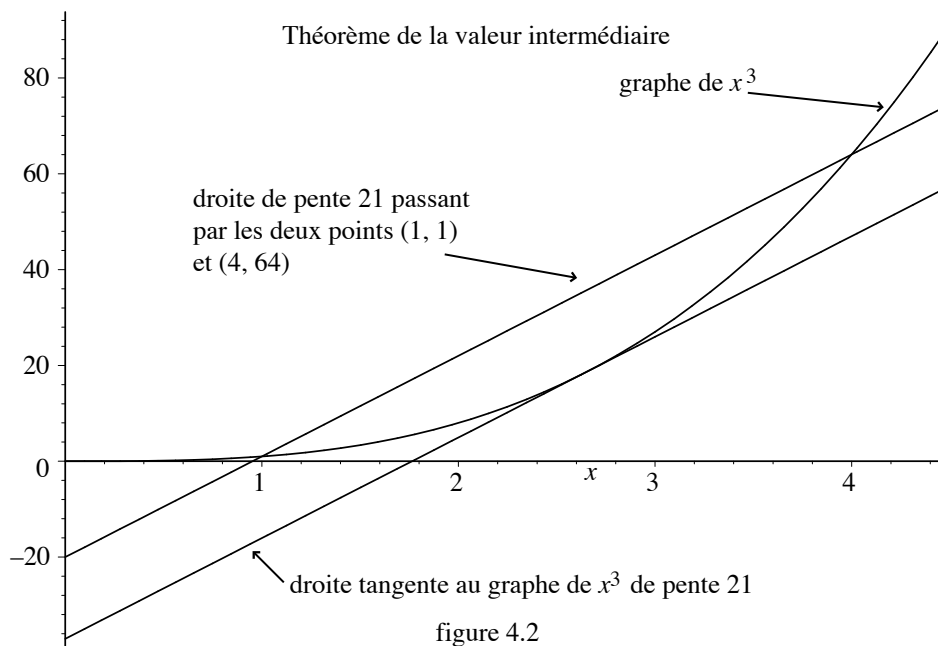
Avant de poursuivre plus en avant notre discussion, nous aurons besoin du théorème de la valeur intermédiaire pour une fonction réelle $f(x)$ d'une seule variable. Nous le rappellons ci-dessous.

Théorème 4.1 (de la valeur intermédiaire):

Soit une fonction $f(x)$ une fonction réelle ayant une dérivée à chacun des points de l'intervalle ouvert (a, b) et supposons aussi que f est continue aux points a et b . Alors il existe un nombre $c \in (a, b)$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Nous avons illustré ce théorème à la figure 4.2. Noter que $(f(b) - f(a))/(b - a)$ est la pente de la droite L passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. L'énoncé dit qu'il existe une tangente au graphe de $f(x)$ dont la pente est celle de L .



L'énoncé du théorème d'approximation linéaire pour les fonctions de plusieurs variables est légèrement plus complexe que celui des fonctions d'une variable. Il faut ajouter des hypothèses supplémentaires sur la continuité des dérivées partielles.

Théorème 4.2 (d'approximation linéaire):

Soient $z = f(x, y)$, une fonction réelle de deux variables réelles x, y et (a, b) un point de \mathbf{R}^2 . Supposons que les dérivées partielles f_x et f_y sont continues dans un rectangle R dont l'intérieur contient le point (a, b) . Pour tout point $(a + h, b + k)$ à l'intérieur de R , nous avons alors

$$\Delta z = f(a + h, b + k) - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(a,b)} h + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(a,b)} k + \epsilon_1 h + \epsilon_2 k$$

où ϵ_1 et ϵ_2 (dépendants de $(a, b), h$ et k) sont tels que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \epsilon_1 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \epsilon_2 = 0.$$

Preuve: Posons $\Delta z_1 = f(a + h, b) - f(a, b)$ et $\Delta z_2 = f(a + h, b + k) - f(a + h, b)$. Alors $\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2$. Parce que la dérivée partielle f_x est continue sur R , nous obtenons en utilisant le théorème de la valeur intermédiaire au cas de la fonction d'une variable: $x \mapsto f(x, b)$ définie sur l'intervalle I ayant pour extrémités a et $a + h$ que

$$\Delta z_1 = f(a + h, b) - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(c,b)} h$$

où $c \in I$. De façon analogue, nous avons en considérant cette fois la fonction d'une variable: $y \mapsto f(a+h, y)$ définie sur l'intervalle J ayant comme extrémités b et $b+k$ que

$$\Delta z_2 = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(a+h, d)} k$$

où $d \in J$. Parce que les dérivées partielles f_x et f_y sont continues sur R , nous avons

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(c, b)} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a, b)} + \epsilon_1 \text{ et } \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(a+h, d)} = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(a, b)} + \epsilon_2$$

avec

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \epsilon_1 = 0 \text{ et } \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \epsilon_2 = 0.$$

Conséquemment nous obtenons après substitution,

$$\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2 = \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(c, d)} \right) h + \left(\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(a+h, d)} \right) k = \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a, b)} \right) h + \left(\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(a, b)} \right) k + \epsilon_1 h + \epsilon_2 k.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Ce théorème d'approximation linéaire nous permet d'écrire

$$f(a+h, b+k) \approx f(a, b) + \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a, b)} \right) h + \left(\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(a, b)} \right) k$$

lorsque h et k sont presque nuls. Ceci peut être utilisé pour estimer numériquement la valeur de $f(a+h, b+k)$ lorsque $f(a, b)$, $f_x(a, b)$ et $f_y(a, b)$ sont connus. Nous allons illustrer ceci en estimant la valeur $f(1.01, 2.05)$ dans le cas de la fonction $f(x, y) = \sqrt[3]{8x^2 + 2y^3} + 3$. Nous obtenons facilement que

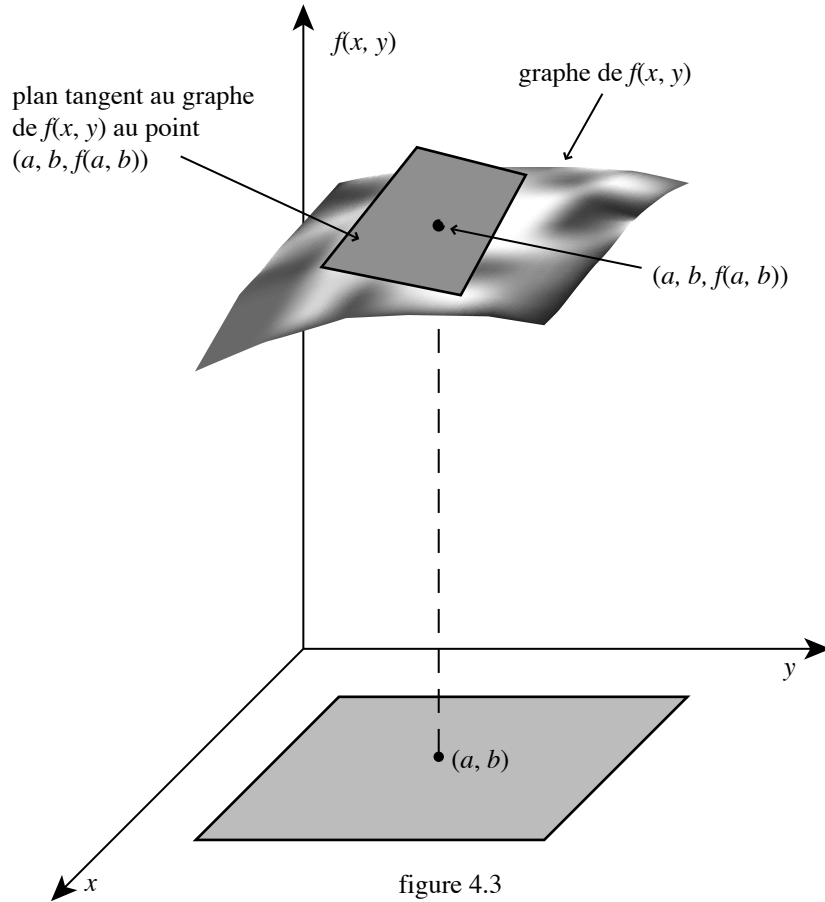
$$\frac{\partial f}{\partial x} = (8x^2 + 2y^3 + 3)^{(-2/3)}(16x/3) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = (8x^2 + 2y^3 + 3)^{(-2/3)}(2y^2).$$

Donc nous avons $f(1, 2) = \sqrt[3]{8 + 16 + 3} = 3$, $f_x(1, 2) = 16/27$ et $f_y(1, 2) = 24/27$. En utilisant le théorème d'approximation linéaire, nous pouvons estimer $f(1.01, 2.05) \approx f(1, 2) + f_x(1, 2)(0.01) + f_y(1, 2)(0.05) = 3 + (16/27)(0.01) + (24/27)(0.05) = 3.050370371$. La valeur exacte de $f(1.01, 2.05)$ à 9 décimales près est 3.050660074. Comme nous l'avons vu auparavant, le théorème d'approximation linéaire pour une fonction $f(x)$ d'une seule variable au point c est obtenu graphiquement au moyen de la droite tangente au graphe de f à ce point. Il est aussi possible de visualiser l'approximation linéaire pour une fonction $f(x, y)$ de deux variables au point (a, b) comme étant obtenue graphiquement en utilisant le plan tangent au graphe de $z = f(x, y)$ au point (a, b) . Le plan tangent au graphe de la fonction $z = f(x, y)$ au point (a, b) est le plan dont l'équation est

$$z - c = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a, b)} (x - a) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(a, b)} (y - b) \text{ avec } c = f(a, b).$$

Nous avons illustré ceci dans la figure 4.3.

Interprétation graphique de l'approximation linéaire



Nous allons maintenant énoncer le théorème d'approximation linéaire pour les fonctions réelles de trois variables.

Théorème 4.2' (d'approximation linéaire):

Soient $w = f(x, y, z)$, une fonction réelle de trois variables réelles x, y, z et (a, b, c) un point de \mathbf{R}^3 . Supposons que les dérivées partielles f_x, f_y et f_z sont continues dans un parallépipède rectangle R dont l'intérieur contient le point (a, b, c) . Pour tout point $(a + r, b + s, c + t) \in R$, nous avons

$$\begin{aligned} \Delta w &= f(a + r, b + s, c + t) - f(a, b, c) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(a,b,c)} r + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(a,b,c)} s + \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(a,b,c)} t + \epsilon_1 r + \epsilon_2 s + \epsilon_3 t \end{aligned}$$

où ϵ_1, ϵ_2 et ϵ_3 (dépendants de $(a, b, c), r, s$, et t) sont tels que

$$\lim_{(r,s,t) \rightarrow (0,0,0)} \epsilon_1 = 0, \quad \lim_{(r,s,t) \rightarrow (0,0,0)} \epsilon_2 = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{(r,s,t) \rightarrow (0,0,0)} \epsilon_3 = 0.$$

La preuve est similaire à celle présentée dans le cas des fonctions de deux variables. De ce théorème, nous pouvons écrire

$$f(a + r, b + s, c + t) \approx f(a, b, c) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(a,b,c)} r + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(a,b,c)} s + \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(a,b,c)} t$$

lorsque r, s, t sont presque nuls. Tout comme pour les fonctions réelles de deux variables, nous pouvons utiliser cette dernière formule pour estimer numériquement la valeur de $f(a + r, b + s, c + t)$ lorsque les

valeurs $f(a, b, c)$, $f_x(a, b, c)$, $f_y(a, b, c)$ et $f_z(a, b, c)$ sont connues. Finalement nous énoncerons le théorème d'approximation linéaire pour les fonctions réelles de n variables.

Théorème 4.2'' (d'approximation linéaire):

Soient $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, une fonction réelle de n variables et $P = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$. Supposons que les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

sont continues dans une région R de \mathbf{R}^n de la forme $(a_1 - \delta_1, a_1 + \delta_1) \times (a_2 - \delta_2, a_2 + \delta_2) \times \dots \times (a_n - \delta_n, a_n + \delta_n)$ où $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n > 0$. Pour tout point $(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_n) \in R$, nous avons

$$\begin{aligned} \Delta w &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_P h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_P h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_P h_n + \epsilon_1 h_1 + \epsilon_2 h_2 + \dots + \epsilon_n h_n \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_P h_i + \sum_{i=1}^n \epsilon_i h_i \end{aligned}$$

où $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ (dépendants de $(a_1, a_2, \dots, a_n), h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$ et h_n) sont tels que

$$\lim_{(h_1, h_2, \dots, h_n) \rightarrow (0, 0, \dots, 0)} \epsilon_i = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Nous allons maintenant définir le gradient et les dérivées directionnelles d'une fonction de plusieurs variables. Soient $f(x, y)$ une fonction réelle de deux variables définie sur le domaine D de \mathbf{R}^2 et $(a, b) \in D$ tels les dérivées partielles $f_x(a, b)$, $f_y(a, b)$ sont définies. Alors le gradient de f au point (a, b) , noté

$$\text{grad}(f)|_{(a,b)} \text{ ou encore } \nabla f|_{(a,b)},$$

est l'élément $(f_x(a, b), f_y(a, b))$ de \mathbf{R}^2 . Ainsi le gradient de f au point (a, b) est un vecteur.

Si les dérivées partielles f_x et f_y de f sont définies pour tous les points de D , alors nous obtenons une fonction

$$\begin{aligned} \nabla f: D &\rightarrow \mathbf{R}^2. \\ (a, b) &\mapsto (f_x(a, b), f_y(a, b)) \end{aligned}$$

Nous allons maintenant définir la notion de dérivées directionnelles pour la fonction $f(x, y)$. Une direction $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ dans \mathbf{R}^2 est un vecteur unitaire de \mathbf{R}^2 , c'est-à-dire de longueur $(u_x^2 + u_y^2)^{1/2} = 1$. Ainsi $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ et $(\cos(\theta), \sin(\theta))$, où θ est un nombre réel, sont des exemples de direction. La dérivée directionnelle de f au point $(a, b) \in D$ dans la direction $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ est définie comme la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hu_x, b + hu_y) - f(a, b)}{h}.$$

Nous noterons cette dérivée directionnelle (si elle existe)

$$\frac{df}{ds} \Big|_{\mathbf{u}, (a,b)} \text{ ou encore } f'(\mathbf{u}, (a, b)).$$

Pour visualiser celle-ci, il suffit de considérer l'intersection du graphe de $f(x, y)$ avec le plan vertical contenant le vecteur \mathbf{u} et passant par (a, b) ; nous obtenons ainsi une courbe dans ce plan et la dérivée directionnelle est la pente de la tangente à cette courbe au point $(a, b, f(a, b))$. Nous avons illustré ceci à la figure 4.4.

Interprétation graphique de la dérivée directionnelle

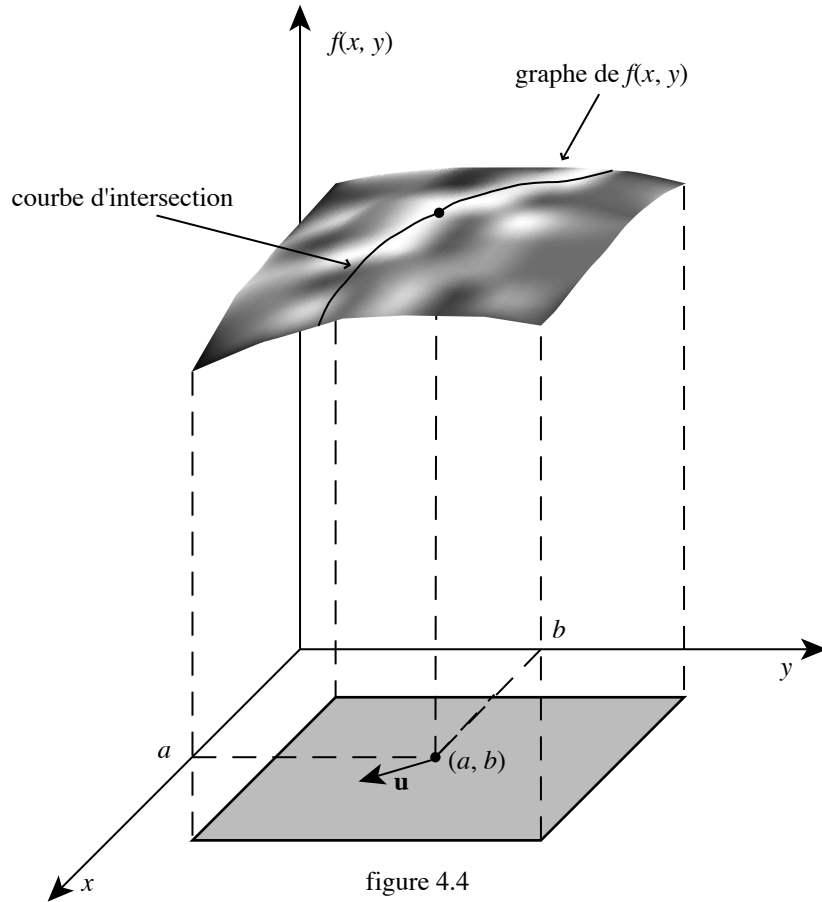


figure 4.4

Les dérivées partielles $f_x(a, b)$ et $f_y(a, b)$ sont des cas particuliers de dérivées directionnelles. En effet,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(a,b)} = \frac{df}{ds} \Big|_{(1,0),(a,b)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(a,b)} = \frac{df}{ds} \Big|_{(0,1),(a,b)}.$$

Sous certaines conditions, il est possible de calculer la dérivée directionnelle $f'(\mathbf{u}, (a, b))$ pour toute direction \mathbf{u} en terme du gradient f au point (a, b) . Ceci est énoncé dans la proposition suivante.

Proposition 4.1:

Soient une fonction $f(x, y)$ réelle définie sur un rectangle R contenu dans \mathbf{R}^2 et un point (a, b) à l'intérieur de R . Supposons que les dérivées partielles f_x, f_y sont continues en tout point de R . Alors, pour toute direction $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$, la dérivée directionnelle $f'(\mathbf{u}, (a, b))$ existe et nous avons l'égalité

$$\frac{df}{ds} \Big|_{\mathbf{u},(a,b)} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(a,b)} u_x + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(a,b)} u_y.$$

Preuve: Nous pouvons utiliser le théorème d'approximation linéaire car si h est suffisamment près de 0, alors $(a + hu_x, b + hu_y)$ sera à l'intérieur du rectangle R . Donc

$$\frac{f(a + hu_x, b + hu_y) - f(a, b)}{h} = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(a,b)} hu_x + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(a,b)} hu_y + \epsilon_1 hu_x + \epsilon_2 hu_y \right)$$

par le théorème d'approximation. Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{df}{ds} \Big|_{\mathbf{u},(a,b)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hu_x, b + hu_y) - f(a, b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(a,b)} u_x + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(a,b)} u_y + \epsilon_1 u_x + \epsilon_2 u_y \right) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(a,b)} u_x + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(a,b)} u_y \right) \end{aligned}$$

car

$$\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_1 = \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_2 = 0 \text{ et } u_x, u_y \text{ sont des constantes.}$$

Exemple 4.1:

Soit la fonction $f(x, y) = x^2y + 2xy^3$. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 2y^3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 6xy^2.$$

Ainsi les dérivées partielles de f au point $(1, 2)$ seront $f_x(1, 2) = 20$ et $f_y(1, 2) = 25$. Donc la dérivée directionnelle de f au point $(1, 2)$ dans la direction $\mathbf{u} = (1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})$ sera

$$\frac{df}{ds} \Big|_{\mathbf{u},(1,2)} = 20 \frac{1}{\sqrt{10}} + 25 \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{95}{\sqrt{10}}.$$

En utilisant la proposition 4.1, nous pouvons caractériser le gradient ∇f de f . À cette fin, il nous faut rappeler ce qu'est le produit scalaire $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ de deux vecteurs $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ et $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ de \mathbf{R}^2 . La définition algébrique est la suivante: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y$. Par exemple, nous avons $(1, -1) \cdot (2, 3) = (1)(2) + (-1)(3) = -1$. Géométriquement, nous avons $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\theta)$ où $\|\mathbf{u}\|$ (respectivement $\|\mathbf{v}\|$) est la norme ou longueur $(u_x^2 + u_y^2)^{1/2}$ (respectivement $(v_x^2 + v_y^2)^{1/2}$) du vecteur \mathbf{u} (respectivement \mathbf{v}) et θ est la mesure de l'angle entre les deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} . Voir la figure 4.5.

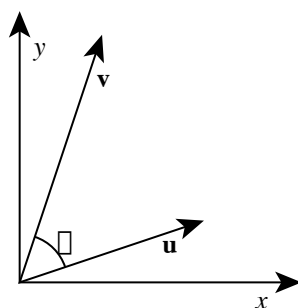


figure 4.5

Avec cette notion de produit scalaire, il est possible de récrire la proposition 4.1 de la façon suivante:

$$\frac{df}{ds} \Big|_{\mathbf{u},(a,b)} = \nabla f \Big|_{(a,b)} \cdot \mathbf{u}.$$

Corollaire 4.1:

Soit une fonction $f(x, y)$ réelle définie sur un rectangle R contenu dans \mathbf{R}^2 . Supposons que les dérivées partielles f_x et f_y soient continues en tout point de R . Alors le gradient $\nabla f \Big|_{(a,b)}$ de f au point (a, b) est le vecteur de \mathbf{R}^2 dont la direction \mathbf{u} est celle pour laquelle la dérivée directionnelle $f'(\mathbf{u}, (a, b))$ est maximale et dont la longueur $\|\nabla f \Big|_{(a,b)}\|$ est la valeur de cette dérivée directionnelle $f'(\mathbf{u}, (a, b))$ dans cette direction \mathbf{u} .

Preuve: À cause de la proposition 4.1, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{df}{ds}\Big|_{\mathbf{u},(a,b)} &= \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(a,b)} u_x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(a,b)} u_y \quad \text{pour une direction } \mathbf{u} = (u_x, u_y) \text{ quelconque} \\ &= \|\nabla f|_{(a,b)}\| \|\mathbf{u}\| \cos(\theta) = \|\nabla f|_{(a,b)}\| \cos(\theta), \quad \text{car } \|\mathbf{u}\| = 1\end{aligned}$$

où ci-dessus θ est la mesure de l'angle entre les vecteurs $\nabla f|_{(a,b)}$ et \mathbf{u} . Il est alors clair que $f'(\mathbf{u}, (a, b))$ est maximal lorsque $\theta = 0$, c'est-à-dire $\cos(\theta) = 1$. Ainsi $f'(\mathbf{u}, (a, b))$ est maximal lorsque \mathbf{u} est la direction de $\nabla f|_{(a,b)}$ et alors cette valeur maximale est $\|\nabla f|_{(a,b)}\|$. Le corollaire est démontré.

Il est possible de définir le gradient, ainsi que les dérivées directionnelles pour les fonctions réelles $f(x, y, z)$ de trois variables: x, y, z . Soient $f(x, y, z)$, une fonction réelle de trois variables définie sur le domaine D de \mathbf{R}^3 et un point $(a, b, c) \in D$ tels que les dérivées partielles $f_x(a, b, c)$, $f_y(a, b, c)$ et $f_z(a, b, c)$ sont définies, alors le gradient de f au point (a, b, c) , noté

$$\text{grad}(f)|_{(a,b,c)} \text{ ou encore } \nabla f|_{(a,b,c)},$$

est le vecteur $(f_x(a, b, c), f_y(a, b, c), f_z(a, b, c))$ de \mathbf{R}^3 .

Si les dérivées partielles f_x, f_y et f_z de f sont définies pour tous les points du domaine D , alors nous obtenons une fonction

$$\begin{aligned}\nabla f: D &\rightarrow \mathbf{R}^3. \\ (a, b, c) &\mapsto (f_x(a, b, c), f_y(a, b, c), f_z(a, b, c))\end{aligned}$$

La notion de dérivées directionnelles pour la fonction $f(x, y, z)$ est définie de façon similaire à celle pour les fonctions de deux variables. Une direction $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ dans \mathbf{R}^3 est un vecteur unitaire de \mathbf{R}^3 , c'est-à-dire de longueur $(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{(1/2)} = 1$. La dérivée directionnelle de f au point $(a, b, c) \in D$ dans la direction $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ est définie comme la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hu_x, b + hu_y, c + hu_z) - f(a, b, c)}{h}.$$

Nous noterons cette dérivée directionnelle (si elle existe)

$$\frac{df}{ds}\Big|_{\mathbf{u},(a,b,c)} \text{ ou encore } f'(\mathbf{u}, (a, b, c)).$$

Tout comme pour les fonctions de deux variables, il existe une relation entre le gradient et les dérivées directionnelles lorsque la fonction satisfait certaines conditions. Ceci est énoncé dans la proposition suivante:

Proposition 4.1':

Soient une fonction $f(x, y, z)$ réelle définie sur un parallépipède rectangle R contenu dans \mathbf{R}^3 et un point (a, b, c) à l'intérieur de R . Supposons que les dérivées partielles f_x, f_y et f_z sont continues en tout point de R . Alors, pour toute direction $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$, la dérivée directionnelle $f'(\mathbf{u}, (a, b, c))$ existe et nous avons l'égalité

$$\frac{df}{ds}\Big|_{\mathbf{u},(a,b,c)} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(a,b,c)} u_x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(a,b,c)} u_y + \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(a,b,c)} u_z.$$

La preuve de cette proposition est similaire à celle de la proposition 4.1.

Il est possible de généraliser les notions de gradient, dérivées directionnelles aux fonctions réelles $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variables. Ainsi le gradient est

$$\nabla f = \text{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

et la dérivée directionnelle de f dans la direction $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ au point (a_1, a_2, \dots, a_n) est

$$\frac{df}{ds}\Big|_{\mathbf{u},(a_1,a_2,\dots,a_n)} = f'(\mathbf{u}, (a_1, a_2, \dots, a_n)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + hu_1, a_2 + hu_2, \dots, a_n + hu_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h}.$$

Noter que pour que \mathbf{u} soit une direction, il faut que $(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)^{(1/2)} = 1$. Finalement la proposition 4.1 se généralise pour ces fonctions. Cette généralisation est énoncée ci-dessous.

Proposition 4.1':

Soient $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, une fonction réelle de n variables et $P = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$. Supposons que les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

sont continues dans une région R de \mathbf{R}^n de la forme $(a_1 - \delta_1, a_1 + \delta_1) \times (a_2 - \delta_2, a_2 + \delta_2) \times \dots \times (a_n - \delta_n, a_n + \delta_n)$ où $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n > 0$. Alors, pour toute direction $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbf{R}^n$, la dérivée directionnelle $f'(\mathbf{u}, (a_1, a_2, \dots, a_n))$ existe et nous avons l'égalité

$$\frac{df}{ds} \Big|_{\mathbf{u}, (a_1, a_2, \dots, a_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{(a_1, a_2, \dots, a_n)} u_i = \nabla f \Big|_{(a_1, a_2, \dots, a_n)} \cdot \mathbf{u}.$$

* * *

Exercice 4.1:

Estimer numériquement les valeurs suivantes en utilisant le théorème d'approximation linéaire:

- a) $\sqrt[3]{(3.02)^2 - (1.1)}$
- b) $e^{0.1} + \sin(0.2)$
- c) $\ln((1.01)^2 + (0.1))$

Exercice 4.2:

En utilisant la définition théorique de dérivée directionnelle, déterminer $f'((d_1, d_2), (0, 0))$ au point $(0, 0)$ dans la direction (d_1, d_2) pour chacune des fonctions suivantes:

- a) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^3)/(x + y), & \text{si } (x + y) \neq 0; \\ 0 & \text{si } (x + y) = 0. \end{cases}$
- b) $f(x, y) = \begin{cases} (x^4 + y^3)/(x^2 + 5y^2), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Exercice 4.3:

Calculer les dérivées directionnelles suivantes en utilisant le gradient:

- a) $f'((1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (1, 0))$ au point $(1, 0)$ dans la direction $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ pour $f(x, y) = xe^{xy} + x^3y$;
- b) $f'((1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}), (1, -1, 1))$ au point $(1, -1, 1)$ dans la direction $(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$ pour la fonction $f(x, y, z) = xze^y + (x - y)^2 - xyz^3$;
- c) $f'((1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}), (1, 0, -1))$ au point $(1, 0, -1)$ dans la direction $(1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$ pour la fonction $f(x, y, z) = 3x^5y - 2z + 2xyz^2 - 3y - x^2 - yz$.

Exercice 4.4:

- a) Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $f'(\mathbf{u}, (a_1, a_2, \dots, a_n)) > 0$ pour toutes les directions \mathbf{u} à un point (a_1, a_2, \dots, a_n) donné.
- b) Donner l'exemple d'une fonction $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ telle que pour une direction déterminée \mathbf{u} , les dérivées directionnelles $f'(\mathbf{u}, (a_1, a_2, \dots, a_n)) > 0$ pour tout point $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$.

Exercice 4.5:

Indiquer pour chacune des fonctions $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ suivantes s'il existe une fonction $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $\nabla f = F$.

a) $F(x, y) = (4x^3y + 2y^2, x^4 + 4xy)$;

b) $F(x, y) = (3x^2y, x^3y + x^2)$.

Exercice 4.6(†):

Déterminer une fonction $\phi: \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $((1 + x^2)\phi(x), 2xy\phi(x)) = \nabla f(x, y)$ pour une fonction $f(x, y)$ définie sur l'ouvert $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \neq 0\}$.

CHAPITRE 5

Règle de chaines et égalité des dérivées partielles mixtes.

Nous allons premièrement énoncer la règle de chaines pour une fonction $f(u, v)$ de deux variables u, v elles-mêmes fonction de deux autres variables x, y .

Proposition 5.1 (Règle de chaines):

Soient $w = f(u, v)$, $u = u(x, y)$ et $v = v(x, y)$ des fonctions, c'est-à-dire que w peut alors être considéré comme une fonction $f(u(x, y), v(x, y))$ de x et y . Soient $P_0 = (x_0, y_0)$ un point dans le plan des x, y ; $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$, $Q_0 = (u_0, v_0)$ le point correspondant à P_0 dans le plan des u, v et R un rectangle dans le plan des u, v dont l'intérieur contient Q_0 . Si f est une fonction dont les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial u} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial v}$$

sont continues à l'intérieur du rectangle R et si u et v sont continues au point P_0 et leurs dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{P_0}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{P_0}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{P_0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{P_0}$$

existent au point P_0 , alors

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{P_0} = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{Q_0} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{P_0} + \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_{Q_0} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{P_0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{P_0} = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{Q_0} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{P_0} + \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_{Q_0} \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{P_0}.$$

En général, on écrit plus simplement

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Preuve: Par le théorème d'approximation linéaire au point Q_0 , nous avons

$$\begin{aligned} \Delta w &= f(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - f(u_0, v_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{Q_0} \Delta u + \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_{Q_0} \Delta v + \epsilon_1 \Delta u + \epsilon_2 \Delta v \end{aligned}$$

avec

$$\lim_{(\Delta u, \Delta v) \rightarrow (0,0)} \epsilon_1 = \lim_{(\Delta u, \Delta v) \rightarrow (0,0)} \epsilon_2 = 0.$$

Si nous considérons $\Delta u = u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)$, $\Delta v = v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)$ et nous divisons Δw par h , alors nous obtenons que

$$\frac{\Delta w}{h} = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{Q_0} \frac{\Delta u}{h} + \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_{Q_0} \frac{\Delta v}{h} + \epsilon_1 \frac{\Delta u}{h} + \epsilon_2 \frac{\Delta v}{h}.$$

En prenant la limite lorsque h approche 0, nous avons que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{h} = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{Q_0} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{h} \right) + \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_{Q_0} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\epsilon_1 \frac{\Delta u}{h} + \epsilon_2 \frac{\Delta v}{h} \right).$$

Pour le côté gauche de cette dernière égalité, nous avons

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u(x_0 + h, y_0), v(x_0 + h, y_0)) - f(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))}{h} = \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{P_0}.$$

Si nous substituons $\Delta u = u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)$ et $\Delta v = v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)$, nous obtenons ainsi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{P_0} \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{P_0}.$$

Finalement si $h \rightarrow 0$, alors $\Delta u \rightarrow 0$, $\Delta v \rightarrow 0$ par la continuité de u et v à P_0 , et $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_1 = \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_2 = 0$.
Donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\epsilon_1 \frac{\Delta u}{h} + \epsilon_2 \frac{\Delta v}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_1 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{h} = 0 \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{P_0} + 0 \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{P_0} = 0.$$

De tout ceci, il est possible de conclure après substitution que le côté droit de l'égalité ci-dessus est

$$\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{Q_0} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{P_0} + \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{Q_0} \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{P_0}.$$

Nous avons ainsi démontré

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{P_0} = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{Q_0} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{P_0} + \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{Q_0} \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{P_0}.$$

Il est possible de procéder de façon analogue pour obtenir l'équation

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{P_0} = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{Q_0} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{P_0} + \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{Q_0} \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{P_0}$$

avec cette fois $\Delta u = u(x_0, y_0 + k) - u(x_0, y_0)$ et $\Delta v = v(x_0, y_0 + k) - v(x_0, y_0)$.

Exemple 5.1:

Soient $w = 2u^2 + 3v^3$, $u = xy$ et $v = (x + y)$. Dans ce cas, la règle de chaines signifie que

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 4u(y) + 9v^2(1) = 4xy(y) + 9(x + y)^2 = 4xy^2 + 9(x + y)^2.$$

On voit bien que la règle de chaines est vérifiée dans ce cas, car si nous exprimons premièrement w comme une fonction de x et y , nous obtenons $w = 2(xy)^2 + 3(x + y)^3$ et ainsi nous obtenons

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 4(xy)y + 9(x + y)^2(1) = 4xy^2 + 9(x + y)^2.$$

Nous allons maintenant présenter l'énoncé général de la règle de chaines

Proposition 5.1' (Règle de chaines):

Soient $w = f(u_1, u_2, \dots, u_m)$, $u_1 = u_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, \dots , $u_m = u_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$, des fonctions. Soient $P_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ un point dans l'espace des x_1, x_2, \dots, x_n , le point $Q_0 = (b_1, b_2, \dots, b_m) = (u_1(a_1, a_2, \dots, a_n), u_2(a_1, a_2, \dots, a_n), \dots, u_m(a_1, a_2, \dots, a_n)) \in \mathbf{R}^m$ correspondant à P_0 dans l'espace des u_1, u_2, \dots, u_m et une région R de \mathbf{R}^m de la forme $(b_1 - \delta_1, b_1 + \delta_1) \times (b_2 - \delta_2, b_2 + \delta_2) \times \dots \times (b_m - \delta_m, b_m + \delta_m)$ où $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m > 0$. Si f est une fonction dont les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial u_2}, \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial u_m}$$

sont continues à l'intérieur de la région R et si les dérivées partielles

$$\left. \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right|_{P_0} \text{ existent à } P_0 \quad \forall i, j; 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq m.$$

Alors nous avons

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|_{P_0} = \sum_{j=1}^m \left. \frac{\partial f}{\partial u_j} \right|_{Q_0} \left. \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right|_{P_0} \quad \forall i; 1 \leq i \leq n.$$

La preuve de cette généralisation est analogue à la preuve de la proposition 5.1. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier ceci.

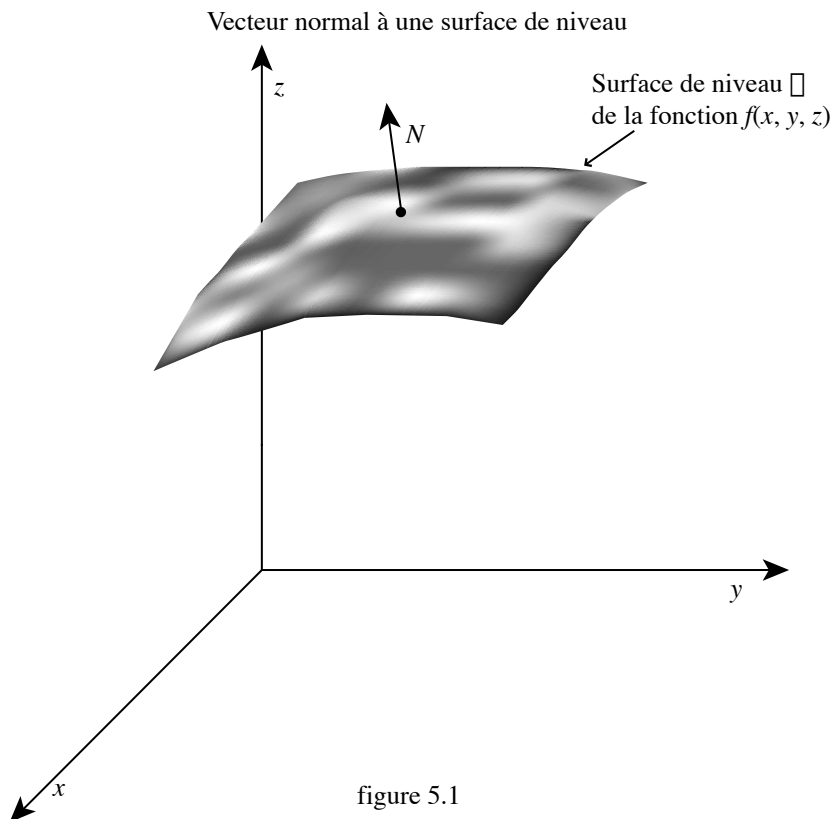
Une des applications de la règle de chaînes est la détermination d'un vecteur normal à une surface de niveau. Soit une surface S dans \mathbf{R}^3 définie par l'équation $f(x, y, z) = \nu$. En d'autres mots, S est une surface de niveau ν pour la fonction f . Soit $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point de S . On dit que le vecteur $N = (N_x, N_y, N_z)$ est normal à la surface S au point P_0 si, pour chaque courbe incluse dans S et passant par P_0 , son vecteur tangent au point P_0 est orthogonal à N ; c'est-à-dire pour toute fonction différentiable

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R}^3 \\ t &\mapsto (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

telle que, pour tout t , $f(x(t), y(t), z(t)) = \nu$ et $\gamma(0) = (x(0), y(0), z(0)) = P_0$, alors

$$N \cdot (x'(0), y'(0), z'(0)) = N_x \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} + N_y \frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} + N_z \frac{dz}{dt} \Big|_{t=0} = 0.$$

Nous avons illustré ceci dans la figure 5.1.



Corollaire 5.1:

Soient P_0 un point de \mathbf{R}^3 et f une fonction telle que ses dérivées partielles f_x, f_y et f_z soient continues à l'intérieur d'un parallépipède rectangle R dont l'intérieur contient P_0 . Soit une surface S de niveau ν pour f contenant P_0 . Alors le gradient $\nabla f|_{P_0}$ est normal à la surface S au point P_0 .

Preuve: Considérons une courbe $t \rightarrow (x(t), y(t), z(t))$ incluse dans S et passant par P_0 comme dans le paragraphe ci-dessus. Nous avons donc $f(x(t), y(t), z(t)) = \nu$ pour tout t . En dérivant les deux cotés de cette équation et en évaluant à $t = 0$, nous obtenons au moyen de la règle de chaînes

$$\frac{d}{dt}(f(x(t), y(t), z(t))) \Big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{P_0} \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{P_0} \frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} + \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{P_0} \frac{dz}{dt} \Big|_{t=0} = 0.$$

On peut alors conclure que $\nabla f|_{P_0}$ est normal à la surface S au point P_0 .

Exemples 5.2:

a) Si $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, alors la surface d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a $\nabla f|_{P_0} = (2x_0, 2y_0, 2z_0)$ comme vecteur normal au point $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Ici $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$. Noter que cette surface est une sphère de rayon 1 centrée à l'origine $(0, 0, 0)$. Nous avons illustré ceci à la figure 5.2 ci-dessous.

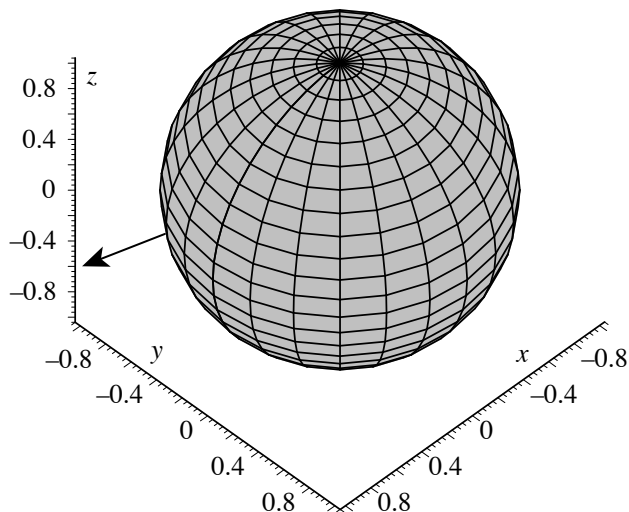


figure 5.2

b) Si $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, alors la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ a $\nabla f|_{P_0} = (2x_0, 2y_0, -2z_0)$ comme vecteur normal au point $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Ici $x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1$. Noter que cette surface est un hyperboloïde à une nappe. Nous avons illustré ceci à la figure 5.3 ci-dessous.

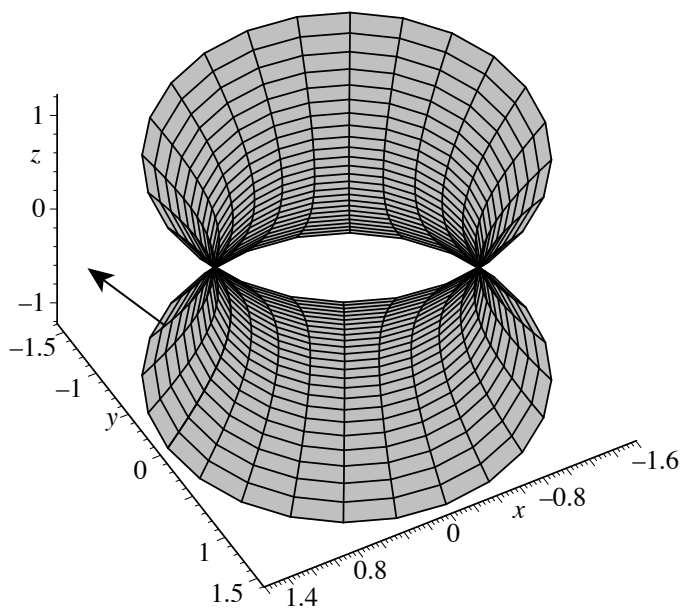


figure 5.3

Une autre application de la règle de chaînes est obtenue dans le cadre de la théorie des équations aux

dérivées partielles. Une équation aux dérivées partielles (E.D.P) est une équation contenant les dérivées partielles d'une fonction f à déterminer. Une fonction f qui satisfait cette équation est dite être une solution de celle-ci.

Exemple 5.3:

$$2x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (E)$$

est une équation aux dérivées partielles. $f(x, y) = \exp(xy^2)$ est une solution de (E). Mais elle n'est pas la seule. En effet, $f(x, y) = xy^2$ est une autre solution. De même que $f(x, y) = h(xy^2)$ est aussi une solution de (E) pour toute fonction $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dérivable sur \mathbf{R} . Dans ce dernier cas, il suffit de noter que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 h'(xy^2) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy h'(xy^2)$$

et de substituer dans (E).

Il est parfois possible de résoudre une équation aux dérivées partielles en considérant de nouvelles coordonnées et l'équation (E') correspondant à (E) dans ces nouvelles coordonnées. (E') est obtenue au moyen de la règle de chaînes. En choisissant bien ces nouvelles coordonnées, nous obtenons qu'il est plus facile de résoudre (E') que (E). Nous allons illustrer ceci avec l'équation (E) ci-dessus.

Déterminons toutes les fonctions $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ ayant des dérivées partielles continues d'ordre 1 sur l'ouvert $D = \{(x, y) \in \mathbf{R} \mid x, y > 0\}$ et satisfaisant l'équation aux dérivées partielles:

$$2x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (E)$$

sur D . Nous pouvons considérer les nouvelles coordonnées: $u = x$ et $v = xy^2$. Il est facile de vérifier que $u, v > 0$, $x = u$ et $y = \sqrt{v/u}$ car $x, y > 0$. Par la règle de chaînes, nous obtenons

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{v}{u} \frac{\partial f}{\partial v} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 2\sqrt{uv} \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Ici il faut noter que les dérivées partielles f_u et f_v sont continues. En remplaçant x, y, f_x et f_y par leurs expressions correspondantes en fonction de u et v dans (E), nous obtenons

$$2u \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{v}{u} \frac{\partial f}{\partial v} \right) - \sqrt{v/u} \left(2\sqrt{uv} \frac{\partial f}{\partial v} \right) = 0 \quad (E'),$$

c'est-à-dire que

$$2u \frac{\partial f}{\partial u} = 0.$$

Comme $u > 0$, nous avons $\frac{\partial f}{\partial u} = 0 \Rightarrow f$ est une fonction de v seulement, qu'elle est indépendante de u . Ainsi $f = h(v) = h(xy^2)$ avec $h: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Il est facile de vérifier qu'une fonction $f(x, y) = h(xy^2)$ est une solution de (E) sur D si $h: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction dérivable sur l'intervalle $(0, \infty)$.

Nous allons maintenant énoncer et démontrer la proposition sur l'égalité des dérivées partielles mixtes. Cette proposition tout comme la règle de chaînes est une conséquence du théorème de la valeur intermédiaire. Nous l'énoncerons pour les fonctions de deux variables.

Proposition 5.2 (Egalité des dérivées partielles mixtes):

Soit une fonction $f(x, y)$ telle que

$$f, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

sont continues sur un rectangle R dans \mathbf{R}^2 dont l'intérieur contient le point $P_0 = (a, b)$. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{P_0} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Big|_{P_0}.$$

Preuve: Soit $(h, k) \in \mathbf{R}^2$ tel que $(a + h, b + k)$, $(a + h, b)$ et $(a, b + k)$ appartiennent à R . Considérons la fonction de x : $F(x) = f(x, b + k) - f(x, b)$, ainsi que la fonction de y : $G(y) = f(a + h, y) - f(a, y)$. Dans ces deux définitions, h et k sont des constantes fixées. Soit $\Delta = F(a + h) - F(a)$. Alors après substitution, nous obtenons $\Delta = f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b)$. Il est aussi facile de vérifier que $\Delta = G(b + k) - G(b)$. Parce que f est continue et que f_x existe, alors F est continue et dérivable. Par le théorème 4.1 (de la valeur intermédiaire), il existe un nombre c compris entre a et $a + h$ tel que $\Delta = F(a + h) - F(a) = F'(c)h$. Parce que

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x, b+k)} - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x, b)},$$

nous avons que

$$F'(c) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(c, b+k)} - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(c, b)}.$$

Comme f_x est continue et que f_{xy} existe, nous pouvons de nouveau utiliser le théorème 4.1 (de la valeur intermédiaire) et obtenir qu'il existe un nombre réel d compris entre b et $b + k$ tel que

$$F'(c) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(c, b+k)} - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(c, b)} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Big|_{(c, d)} k.$$

De tout ceci, nous obtenons

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Big|_{(c, d)} hk.$$

Parce que f est continue et que f_y existe, alors G est continue et dérivable. Par le théorème 4.1 (de la valeur intermédiaire), il existe un nombre réel d' compris entre b et $b + k$ tel que $\Delta = G(b + k) - G(b) = G'(d')k$. Parce que

$$G'(y) = \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(a+h, y)} - \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(a, y)},$$

nous avons

$$G'(d') = \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(a+h, d')} - \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(a, d')}.$$

Comme f_y est continue et que f_{yx} existe, nous pouvons utiliser encore une fois le théorème 4.1 (de la valeur intermédiaire) et obtenir qu'il existe un nombre réel c' compris entre a et $a + h$ tel que

$$G'(d') = \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(a+h, d')} - \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(a, d')} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(c', d')} h.$$

De tout ceci, nous obtenons

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(c', d')} hk.$$

Donc

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{\Delta}{hk} = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Big|_{(c, d)} = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(c', d')}$$

et nous pouvons ainsi conclure que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Big|_{(a, b)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(a, b)},$$

car ces dérivées partielles sont continues et, lorsque $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ alors $(c, d) \rightarrow (a, b)$ et $(c', d') \rightarrow (a, b)$.

En utilisant cette proposition et en supposant la continuité des dérivées partielles d'ordres supérieures, nous obtenons

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \quad \text{etc} \dots$$

* * *

Exercice 5.1:

Soit $f(x, y)$, une fonction de deux variables. Considérons les nouvelles variables (r, θ) définies par les équations suivantes:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta = \arctan(y/x). \end{cases}$$

Noter que dans ce cas, nous avons aussi

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta), \\ y = r \sin(\theta). \end{cases}$$

Ces nouvelles variables sont appelées les coordonnées polaires. Montrer en utilisant la règle de chaînes les formules suivantes:

a) $f_x = \cos(\theta)f_r - (\sin(\theta)/r)f_\theta$;

b) $f_y = \sin(\theta)f_r + (\cos(\theta)/r)f_\theta$;

c) $f_{xx} + f_{yy} = f_{rr} + (1/r^2)f_{\theta\theta} + (1/r)f_r$.

Exercice 5.2:

Déterminer un vecteur normal au point (a, b, c) à chacune des surfaces de niveau dans \mathbf{R}^3 définies par les équations suivantes:

a) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$;

b) $2x + y - z = 0$;

c) $x^2 + y^2 - z = 0$;

d) $xyz = 1$;

e) $x^2 + y^2 = 1$.

Exercice 5.3:

Soit l'équation aux dérivées partielles suivante:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (E).$$

a) Déterminer toutes les fonction $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ ayant des dérivées partielles d'ordre 1 continues et solutions de (E) sur l'ouvert $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \neq 0\}$ en utilisant les nouvelles coordonnées $u = x$ et $v = y/x$.

b) (†) Parmi toutes ces solutions, quelles sont celles $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ ayant des dérivées partielles d'ordre ≤ 2 sur D et qui vérifient l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}?$$

Exercice 5.4:

Soit l'équation aux dérivées partielles suivante:

$$(x^2 + 1) \frac{\partial f}{\partial x} + 2xy \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (E).$$

Déterminer toutes les fonctions $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ayant des dérivées partielles d'ordre 1 continues et solutions de (E) sur \mathbf{R}^2 en utilisant les nouvelles coordonnées: $u = x$ et $v = y/(x^2 + 1)$.

Exercice 5.5:

Soit l'équation aux dérivées partielles suivante:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + (3x^2 - y) \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (E).$$

a) Déterminer toutes les fonction $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ ayant des dérivées partielles d'ordre 1 continues et solutions de (E) sur l'ouvert $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \neq 0, (x^2 - y) \neq 0\}$ en utilisant les nouvelles coordonnées $u = x$ et $v = x^3 - xy$.

b) (†) Parmi toutes ces solutions, quelles sont celles $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ ayant des dérivées partielles d'ordre ≤ 2 sur D et qui vérifient l'équation

$$2x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0?$$

Exercice 5.6(†):

Soient $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, une primitive de g (c'est-à-dire que h est dérivable sur \mathbf{R} et que $h'(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$).

a) Déterminer toutes les fonctions $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ayant des dérivées partielles d'ordre 1 continues sur \mathbf{R}^2 , solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$g(y) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (E)$$

en utilisant les nouvelles coordonnées: u et v telles que $x = u + h(v)$ et $y = v$.

b) Utiliser le résultat obtenu en a) pour résoudre l'équation

$$y \frac{\partial f}{\partial x} + (y^2 + 1) \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (E_1)$$

sur \mathbf{R}^2 ; plus précisément, déterminer toutes les fonctions $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ayant des dérivées partielles d'ordre 1 continues sur \mathbf{R}^2 , solutions de (E_1) .

CHAPITRE 6

Maximums et minimums relatifs, optimisation.

Nous allons initialement considérer dans ce chapitre que des fonctions de deux variables pour l'optimisation sans contrainte. Cependant la théorie peut être présentée dans un cadre plus général, mais alors il faut utiliser des outils d'algèbre linéaire, en particulier la classification des formes quadratiques réelles, qui dépassent le cadre de ce cours. À la fin du chapitre, nous discuterons d'optimisation avec contrainte en présentant la méthode du multiplicateur de Lagrange (1736 - 1813) et nous considérerons alors des fonctions de plusieurs variables.

Soit $f(x, y)$, une fonction réelle de deux variables réelles. On dit que f possède un maximum relatif au point $P = (a, b)$ s'il existe un rectangle R dont l'intérieur contient P tel que $f(x, y) \leq f(a, b)$ pour tout $(x, y) \in R$. On dit que f possède un minimum relatif au point $P = (a, b)$ s'il existe un rectangle R dont l'intérieur contient P tel que $f(x, y) \geq f(a, b)$ pour tout $(x, y) \in R$. Nous avons illustré ceci aux figures 6.1 et 6.2.

Si les dérivées partielles f_x et f_y existent en tout point d'un domaine D , il est alors possible de donner une condition nécessaire pour qu'une fonction ait un maximum ou minimum relatif. Cette condition est présentée dans la proposition suivante.

Proposition 6.1:

Si f satisfait aux conditions du paragraphe précédent et si f a un maximum ou minimum relatif au point $P = (a, b)$, alors

$$\nabla f|_P = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_P, \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_P \right) = (0, 0).$$

On dira d'un point P tel que $\nabla f|_P = (0, 0)$ qu'il est un point critique de f .

Preuve: Il suffit de considérer la fonction d'une variable $F(x) = f(x, b)$. Si (a, b) est un maximum ou minimum relatif, alors F a un maximum ou minimum relatif au point $x = a$. Donc $F'(a) = 0$ et ceci se traduit par $f_x(a, b) = 0$. De façon similaire, nous avons que $f_y(a, b) = 0$. Il suffit dans ce cas de considérer la fonction $G(y) = f(a, y)$.

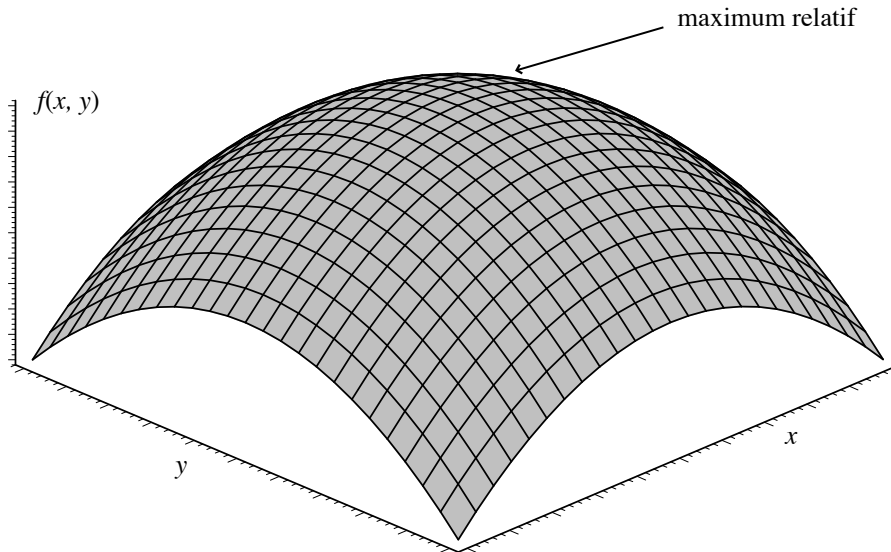


figure 6.1

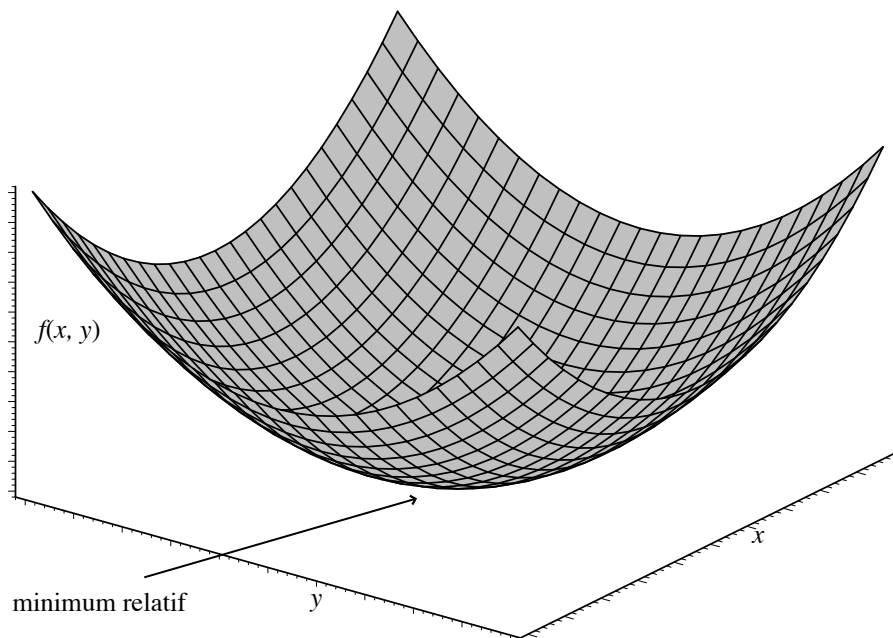


figure 6.2

Exemples 6.1:

a) Si $f(x, y) = x^3 - xy^2 + x + y$, alors pour déterminer les points critiques de f , il suffit de résoudre simultanément les deux équations suivantes:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y^2 + 1 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2xy + 1 = 0.$$

Noter que la seconde équation nous permet d'affirmer que $x \neq 0$. De cette seconde équation, nous pouvons donc conclure que $y = 1/2x$. En substituant ceci dans la première équation, nous obtenons

$$\begin{aligned} 3x^2 - \left(\frac{1}{2x}\right)^2 + 1 = 0 &\quad \Rightarrow \quad 12x^4 - 1 + 4x^2 = 0 &\quad \Rightarrow \\ 12(x^2)^2 + 4x^2 - 1 = 0 &\quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{24}. \end{aligned}$$

De ces deux possibilités, nous pouvons déjà rejeter le cas $x^2 = -1/2$, car $x^2 > 0$. Il nous reste à considérer le cas $x^2 = 1/6$. Alors $x = \pm\sqrt{1/6} = \pm\sqrt{6}/6$ et $y = \pm\sqrt{6}/2$ car $y = 1/2x$. Donc f a deux points critiques: $(\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/2)$ et $(-\sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/2)$.

b) Si $f(x, y) = \exp(x^2 + y^2 - 2x)$, alors pour déterminer les points critiques de f , il suffit de résoudre simultanément les deux équations suivantes:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \exp(x^2 + y^2 - 2x)(2x - 2) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \exp(x^2 + y^2 - 2x)(2y) = 0.$$

Parce que $\exp(x^2 + y^2 - 2x) > 0$, nous obtenons en divisant les deux équations ci-dessus par $\exp(x^2 + y^2 - 2x)$ que

$$2x - 2 = 0 \quad \text{et} \quad 2y = 0.$$

Donc f a donc un seul point critique $(1, 0)$.

Etant donné un point critique P , il existe un test des dérivées partielles d'ordre deux pour déterminer si f possède un maximum ou un minimum relatif au point P . Il est énoncé dans la proposition suivante.

Proposition 6.2:

Soit $P = (a, b)$ un point critique de $f(x, y)$. Supposons que les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

sont continues sur un rectangle R dont l'intérieur contient P . Notons

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_P, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_P, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_P, \quad \text{et} \quad \Delta = B^2 - AC.$$

- a) Si $\Delta < 0$ et $A < 0$, alors f possède un maximum relatif au point P .
- b) Si $\Delta < 0$ et $A > 0$, alors f possède un minimum relatif au point P .
- c) Si $\Delta > 0$, alors f n'a ni minimum relatif, ni maximum relatif. Dans ce cas $(P, f(P))$ est un point de selle du graphe de f .
- d) Si $\Delta = 0$, le test n'est pas concluant.

Comme son nom l'indique, cette notion de point de selle est étymologiquement reliée à la selle du cheval, plus précisément à ce point entre les quartiers de la selle à mi-chemin entre le pommeau et le troussequin. Ce point est représenté ci-dessous à la figure 6.3. Il est clair que ce point n'est ni un maximum relatif, ni un minimum relatif.

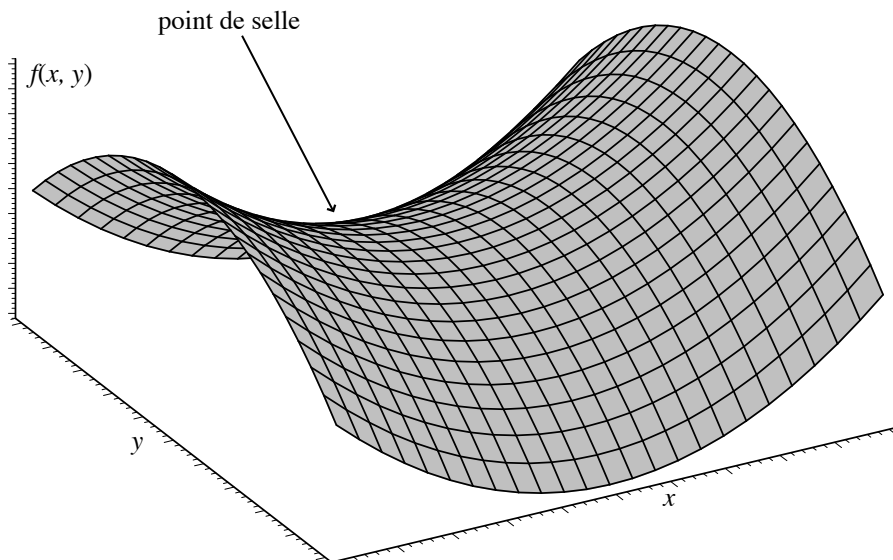


figure 6.3

Avant d'esquisser la démonstration de la proposition 6.2, nous allons présenter quelques exemples illustrant l'utilisation de ce test.

Exemples 6.2:

- a) Soit $f(x, y) = x^3 - xy^2 + x + y$. Alors nous avons vu ci-dessus que f a deux points critiques $(\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/2)$ et $(-\sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/2)$. Pour utiliser le test, il nous faut calculer les dérivées partielles d'ordre deux à ces points critiques. Nous avons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x.$$

Ces dérivées partielles sont continues et les conditions du test sont satisfaites. Au point $(\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/2)$, nous avons

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/2)} = \sqrt{6}, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/2)} = -\sqrt{6}, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/2)} = -\sqrt{6}/3 \quad \text{et}$$

$$\Delta = B^2 - AC = 8.$$

Parce que $\Delta > 0$, alors le point $(\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/2, f(\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/2)) = (\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/2, 4\sqrt{6}/9)$ est un point de selle du graphe de f à cause de 6.2 c). Au point $(-\sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/2)$, nous avons

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(-\sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/2)} = -\sqrt{6}, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(-\sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/2)} = \sqrt{6}, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(-\sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/2)} = \sqrt{6}/3 \quad \text{et}$$

$$\Delta = B^2 - AC = 8.$$

Parce que $\Delta > 0$, alors le point $(-\sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/2, f(-\sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/2)) = (-\sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/2, -4\sqrt{6}/9)$ est aussi un point de selle du graphe de f à cause de 6.2 c).

b) Soit $f(x, y) = \exp(x^2 + y^2 - x)$. Alors nous avons vu ci-dessus que f a un seul critique $(1, 0)$. Pour utiliser le test, il nous faut calculer les dérivées partielles d'ordre 2 et évaluer celles-ci à ce point critique. Nous avons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (4x^2 - 8x + 6) \exp(x^2 + y^2 - 2x), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y(2x - 2) \exp(x^2 + y^2 - 2x),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (4y^2 + 2) \exp(x^2 + y^2 - 2x).$$

Au point critique $(1, 0)$, nous avons

$$A = (4 - 8 + 6) \exp(1 - 2) = 2e^{-1}, \quad B = 2(0)(2 - 2) \exp(1 - 2) = 0,$$

$$C = (4(0)^2 + 2) \exp(1 - 2) = 2e^{-1} \quad \text{et} \quad \Delta = B^2 - AC = 0^2 - (2e^{-1})(2e^{-1}) = -4e^{-2}.$$

Parce que $\Delta < 0$ et $A > 0$, alors f possède un minimum relatif $f(1, 0) = \exp(1 - 2) = e^{-1}$ au point $(1, 0)$ à cause de 6.2 b).

Nous ne démontrerons pas complètement la proposition 6.2, mais nous allons seulement qu'esquisser cette preuve. Un des éléments importants de cette preuve est une extension de théorème d'approximation linéaire. Cette extension est la suivante: Soit $f(x, y)$ est une fonction réelle de deux variables réelles dont les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à 3 sont continues sur un rectangle R dont l'intérieur contient le point $P = (a, b)$. Soient h, k deux nombres réels tels que $(a + h, b + k) \in R$. Alors il existe un point (c, d) compris sur le segment de droite ayant pour extrémités: les points (a, b) et $(a + h, b + k)$ tel que

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) = & f(a, b) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_P h + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_P k \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_P h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_P hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_P k^2 \right) \\ & + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{(c,d)} h^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{(c,d)} h^2 k + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \Big|_{(c,d)} h k^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \Big|_{(c,d)} k^3 \right). \end{aligned}$$

Ce résultat est un cas particulier d'une formule plus générale appelée la formule de Taylor. Nous n'énoncerons pas cette dernière et nous ne démontrerons pas ce cas particulier. Nous nous limiterons qu'à l'utilisation de cette formule particulière pour valider notre test.

Si $P = (a, b)$ est un point critique de f et que nous utilisons les notations de la proposition 6.2, alors la formule ci-dessus devient après substitution

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + \epsilon$$

dans laquelle ϵ est le terme correspondant aux dérivées partielles d'ordre 3. Si les nombres réels h et k sont presque nuls, alors ϵ est négligeable et nous avons

$$f(a+h, b+k) \approx f(a, b) + \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2).$$

Plus précisément, si h et k sont presque nuls, alors le signe du nombre $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ est le même que celui du nombre $(1/2)(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2)$. C'est ce que nous voulons étudier pour comprendre le comportement de la fonction f dans un voisinage du point critique (a, b) .

Si $A \neq 0$, alors nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) &= \frac{A}{2}\left(h^2 + 2\frac{B}{A}hk + \frac{C}{A}k^2\right) \\ &= \frac{A}{2}\left(h^2 + 2\frac{B}{A}hk + \left(\frac{B}{A}\right)^2k^2 - \left(\frac{B}{A}\right)^2k^2 + \frac{C}{A}k^2\right) \\ &= \frac{A}{2}\left(\left(h + \frac{B}{A}k\right)^2 - \frac{B^2 - AC}{A^2}k^2\right) = \frac{A}{2}\left(\left(h + \frac{B}{A}k\right)^2 - \frac{\Delta}{A^2}k^2\right) = (*). \end{aligned}$$

Tout ce que nous avons fait ci-dessus, c'est de compléter le carré. Maintenant si $\Delta < 0$, alors

$$\left(h + \frac{B}{A}k\right)^2 - \frac{\Delta}{A^2}k^2 \geq 0$$

quelque soient h et k , car

$$\left(h + \frac{B}{A}k\right)^2 \text{ et } \frac{k^2}{A^2} \geq 0;$$

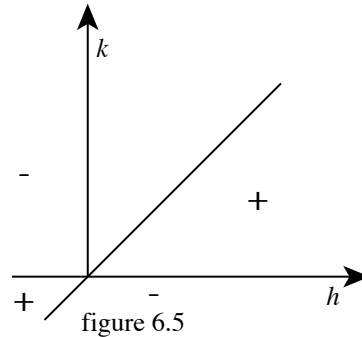
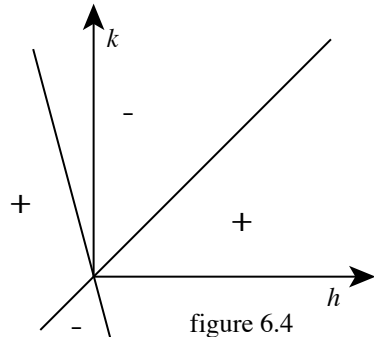
conséquent $(*) \geq 0$ si $A > 0$, alors que $(*) \leq 0$ si $A < 0$. En résumé, si $\Delta < 0$ et $A > 0$, alors $f(a+h, b+k) - f(a, b) \geq 0$ pour tout h et k presque nuls, c'est-à-dire que $f(a+h, b+k) \geq f(a, b)$ pour tout h et k presque nuls et ainsi f possède un minimum relatif au point (a, b) ; alors que si $\Delta < 0$ et $A < 0$, alors $f(a+h, b+k) - f(a, b) \leq 0$ pour tout h et k presque nuls, c'est-à-dire que $f(a+h, b+k) \leq f(a, b)$ pour tout h et k presque nuls et ainsi f possède un maximum relatif au point (a, b) . Si $\Delta > 0$, alors

$$\left(h + \frac{B}{A}k\right)^2 - \frac{\Delta}{A^2}k^2 = \left(h + \frac{B}{A}k - \frac{\sqrt{\Delta}}{A}k\right)\left(h + \frac{B}{A}k + \frac{\sqrt{\Delta}}{A}k\right)$$

peut être positif et négatif. Ceci est illustré dans la figure 6.4 ci-dessous qui représente le comportement de ce signe. Ainsi $(*)$ peut être positif et négatif et dans ce cas $(a, b, f(a, b))$ est un point de selle du graphe de f . Si $A = 0$, alors nous avons $\Delta = B^2 - AC = B^2 \geq 0$. Nous ne pouvons pas avoir simultanément $A = 0$ et $\Delta < 0$. Dans ce cas, si $A = 0$, alors

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) \approx \frac{1}{2}(2Bhk + Ck^2) = \frac{1}{2}k(2Bh + Ck).$$

Dans ce dernier cas, si $\Delta = B^2 - AC = B^2 \neq 0$, alors $\Delta > 0$ et $B \neq 0$. Conséquent le signe de $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ peut être positif et négatif. Ceci est illustré dans la figure 6.5 ci-dessous qui représente le comportement de ce signe.



De ceci, nous pouvons conclure que $(a, b, f(a, b))$ est un point de selle du graphe de f . Si nous résumons ce qui a été démontré ci-dessus. Nous avons les implications suivantes:

- 1) $A > 0$ et $\Delta < 0 \Rightarrow f$ possède un minimum relatif au point (a, b)
- 2) $A < 0$ et $\Delta < 0 \Rightarrow f$ possède un maximum relatif au point (a, b)
- 3) $A \neq 0$ et $\Delta > 0 \Rightarrow (a, b, f(a, b))$ est un point de selle du graphe de f
- 4) $A = 0$ et $\Delta > 0 \Rightarrow (a, b, f(a, b))$ est un point de selle du graphe de f

Donc la proposition 6.2 est vérifiée.

Tout ce qui a précédé concernait l'optimisation sans contrainte, i.e. une situation dans laquelle les variables x et y sont indépendantes l'une de l'autre. Nous allons maintenant considérer une situation différente: l'optimisation avec contrainte. Nous décrirons la méthode du multiplicateur de Lagrange pour attaquer ce type de problème. Illustrons donc cette méthode en situation.

Supposons que nous voulons déterminer les maximums ou minimums relatifs d'une "bonne" fonction $f(x, y, z)$ lorsque x, y, z satisfont une équation de la forme $g(x, y, z) = 0$, où $g(x, y, z)$ est aussi une "bonne" fonction. Cette dernière équation est la contrainte. Ici par "bonne", nous entendons par exemple que ces fonctions ont des dérivées partielles continues sur un ouvert de \mathbf{R}^3 . En d'autres mots, (x, y, z) est un point sur la surface de niveau 0 de g et $f(a, b, c)$ est un maximum (resp. minimum) relatif de f dans cette situation s'il existe un parallépipède rectangle R dont l'intérieur contient (a, b, c) tel que $f(x, y, z) \leq f(a, b, c)$ (resp. $f(a, b, c) \leq f(x, y, z)$) pour tout $(x, y, z) \in R$ satisfaisant la contrainte $g(x, y, z) = 0$.

Bien entendu si nous pouvions paramétriser la surface de niveau 0 de g de telle façon que z soit une fonction $h(x, y)$ de x et y , alors nous pourrions utiliser la méthode vue précédemment pour l'optimisation sans contrainte appliquée à la fonction $F(x, y) = f(x, y, h(x, y))$. Malheureusement il n'est pas toujours possible de déterminer une telle fonction $h(x, y)$. La méthode du multiplicateur de Lagrange nous donne une alternative.

La première étape de cette méthode consiste à considérer la nouvelle fonction sur \mathbf{R}^4 :

$$\phi(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z).$$

En d'autres mots, nous ajoutons une nouvelle variable λ appelée le multiplicateur de Lagrange et nous considérons $f(x, y, z)$ et $g(x, y, z)$ comme des fonctions sur un ouvert de \mathbf{R}^3 . Noter que nous ne nous limitons pas seulement qu'aux points (x, y, z) tels que $g(x, y, z) = 0$. Pour la deuxième étape, nous déterminons le système d'équations en x, y, z et λ suivant:

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, & \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, & \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = 0. \end{cases}$$

Si $f(a, b, c)$ est un maximum ou minimum relatif de $f(x, y, z)$ sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$, alors il existe un nombre réel λ' tel que

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{(a, b, c, \lambda')} = 0, & \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{(a, b, c, \lambda')} = 0, \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{(a, b, c, \lambda')} = 0, & \left. \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \right|_{(a, b, c, \lambda')} = 0. \end{cases}$$

Ceci nous fournit donc une condition nécessaire pour que $f(a, b, c)$ soit un tel maximum ou minimum relatif. Pour compléter la méthode, il nous faut déterminer toutes les solutions (x, y, z, λ) de $(*)$ et parmi celles-ci se trouveront les maximums et minimums relatifs. Il n'est pas toujours facile de résoudre le système $(*)$!

Dans un problème particulier, nous pouvons souvent distinguer s'il s'agit d'un maximum ou minimum relatif, par exemple en évaluant $f(a, b, c)$. Il existe des critères analytiques compliqués pour distinguer entre

ces deux cas. Nous ne les présenterons pas dans ces notes. Nous allons maintenant énoncer la proposition qui justifie la méthode de Lagrange avec toutes les conditions suffisantes pour les deux fonctions $f(x, y, z)$ et $g(x, y, z)$. Ensuite nous présenterons un exemple, ainsi que la méthode générale lorsqu'il y a plusieurs contraintes.

Proposition 6.3:

Soient $f(x, y, z)$ et $g(x, y, z)$ deux fonctions à valeurs réelles dont les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial z}$$

existent et sont continues à l'intérieur R d'un parallépipède rectangle de \mathbf{R}^3 et notons par S : la partie de la surface de niveau 0 de g à l'intérieur de R , i.e. $S = \{(x, y, z) \in R \mid g(x, y, z) = 0\}$. Supposons que $f(x, y, z)$ atteint un maximum ou minimum relatif sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$ au point $P = (a, b, c) \in S$ et qu'en plus $\nabla g|_P \neq (0, 0, 0)$, alors il existe un nombre réel λ' tel que

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{(a,b,c,\lambda')} = 0, & \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{(a,b,c,\lambda')} = 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{(a,b,c,\lambda')} = 0, & \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \Big|_{(a,b,c,\lambda')} = 0. \end{cases}$$

où $\phi(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$.

Preuve: Nous allons esquisser la démonstration. Comme $\nabla g|_P \neq (0, 0, 0)$, nous avons donc que soit $g_x(P) \neq 0$, soit $g_y(P) \neq 0$ ou encore soit $g_z(P) \neq 0$. Nous supposons par la suite que $g_z(P) \neq 0$. Les deux autres cas peuvent être traités de façon similaire. Considérons maintenant l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial z} \Big|_P + \lambda \frac{\partial g}{\partial z} \Big|_P = 0 \quad \text{pour } \lambda \in \mathbf{R}.$$

Il existe une solution $\lambda' \in \mathbf{R}$ pour celle-ci parce que $g_z(P) \neq 0$. En effet,

$$\lambda' = - \left(\frac{\partial f}{\partial z} \Big|_P \right) / \left(\frac{\partial g}{\partial z} \Big|_P \right).$$

Pour ce λ' , nous avons donc

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{(a,b,c,\lambda')} = \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(a,b,c)} + \lambda' \frac{\partial g}{\partial z} \Big|_{(a,b,c)} = 0.$$

Nous allons maintenant vérifier que nous avons aussi

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{(a,b,c,\lambda')} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{(a,b,c,\lambda')} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \Big|_{(a,b,c,\lambda')} = 0.$$

Parce que $g_z(P) \neq 0$, alors l'équation du plan tangent T à la surface de niveau 0 de g au point P :

$$\frac{\partial g}{\partial x} \Big|_P (x - a) + \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_P (y - b) + \frac{\partial g}{\partial z} \Big|_P (z - c) = 0$$

fait en sorte que z pour un point $(x, y, z) \in T$ peut s'écrire en fonction de x et y . Les points de ce plan tangent sont presque ceux de la surface de niveau et nous pouvons soupçonner que ces derniers peuvent aussi être paramétrisés en fonction de x et y . Cette idée est rendue plus précise dans le théorème des fonctions implicites. Nous n'allons pas démontrer ce dernier. Mais une conséquence de ce théorème est qu'il existe

$\epsilon > 0$ et une fonction $h(x, y)$ définie sur $U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \max\{|x - a|, |y - b|\} < \epsilon\}$ tels que

(a) h_x et h_y existent et sont continues sur U ;

(b) $h(a, b) = c$

(c) $g(x, y, h(x, y)) = 0$ pour tout $(x, y) \in U$.

En d'autres mots, h donne une paramétrisation de la surface de niveau 0 de g près du point (a, b, c) . Posons $F(x, y) = f(x, y, h(x, y))$ et $G(x, y) = g(x, y, h(x, y))$. Par ce qui précède (propriété (c) ci-dessus), G est nul sur U . Donc

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad \text{sur } U.$$

Par hypothèse, F atteint un maximum ou minimum relatif au point (a, b) . Donc

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(a,b)} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(a,b)} = 0.$$

Nous pouvons maintenant utiliser la règle de chaînes pour calculer chacune de ces dérivées partielles. Ainsi

$$\frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{(a,b)} = \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(a,b,c)} + \frac{\partial g}{\partial z} \Big|_{(a,b,c)} \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{(a,b)} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(a,b)} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(a,b,c)} + \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(a,b,c)} \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{(a,b)} = 0.$$

En multipliant la première équation par λ' et en l'additionnant avec la deuxième, nous obtenons en regroupant les termes

$$\left(\lambda' \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(a,b,c)} + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(a,b,c)} \right) + \left(\lambda' \frac{\partial g}{\partial z} \Big|_{(a,b,c)} + \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(a,b,c)} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{(a,b)} = 0.$$

Par notre choix de λ' , nous avons

$$\left(\lambda' \frac{\partial g}{\partial z} \Big|_{(a,b,c)} + \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(a,b,c)} \right) = 0.$$

Nous obtenons ainsi que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{(a,b,c,\lambda')} = \left(\lambda' \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(a,b,c)} + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(a,b,c)} \right) = 0.$$

De façon similaire, nous pouvons vérifier que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{(a,b,c,\lambda')} = 0.$$

Finalement

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \Big|_{(a,b,c,\lambda')} = g(a, b, c) = 0.$$

ceci termine la preuve de la proposition.

Exemples 6.3:

Fixons un nombre réel $\rho > 0$. Déterminons le parallépipède rectangle de volume ρ^3 dont la somme des aires de ses six faces est maximale. Posons x, y et z pour les dimensions des côtés d'un parallépipède rectangle. Nous voulons donc maximiser la fonction $f(x, y, z) = 2(xy + xz + yz)$ avec la contrainte $g(x, y, z) = xyz - \rho^3 = 0$. f est la somme des aires des faces et $g = 0$ indique que le volume du parallépipède est ρ^3 . Ici $x, y, z > 0$. Nous pouvons noter que f et g satisfont aux conditions de la proposition 6.3 sur le domaine $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x, y, z > 0\}$. Nous formons donc la fonction

$$\phi(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) = 2(xy + xz + yz) + \lambda(xyz - \rho^3).$$

Il nous faut donc maintenant résoudre le système

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2(y+z) + \lambda yz = 0; \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2(x+z) + \lambda xz = 0; \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = 2(x+y) + \lambda xy = 0; \\ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = xyz - \rho^3 = 0. \end{cases}$$

En multipliant la première équation par x , la seconde par y et en soustrayant ces deux équations, nous obtenons $2x(y+z) - 2y(x+z) = 0 \Leftrightarrow 2(x-y)z = 0$. Comme $z > 0$, alors $x = y$. En multipliant la première équation par x , la troisième par z et en soustrayant ces deux équations, nous obtenons $2x(y+z) - 2z(x+y) = 0 \Leftrightarrow 2(x-z)y = 0$. Comme $y > 0$, alors $x = z$. Donc $x = y = z$ pour les solutions de (*). Si maintenant nous considérons la quatrième équation $xyz = \rho^3 \Rightarrow x^3 = \rho^3$ et nous obtenons une seule solution $(x, y, z) = (\rho, \rho, \rho)$. Il y a donc un seul point à considérer selon la méthode du multiplicateur de Lagrange. Dans cette situation, il est facile de se convaincre qu'il n'y a pas de maximum relatif dans cette situation et qu'un seul minimum relatif. Donc le parallépipède recherché est un cube de côté ρ .

Dans l'exemple précédent, nous aurions aussi pu isoler z en fonction de x et y , i.e. $z = \rho^3/(xy)$, ensuite considérer $F(x, y) = f(x, y, \rho^3/(xy)) = 2(xy + (\rho^3/y) + (\rho^3/x))$ et finalement utiliser les méthodes vues au début du chapitre.

La méthode générale du multiplicateur de Lagrange est la suivante. Supposons que nous voulons déterminer les maximums ou minimums relatifs d'une "bonne" fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ lorsque x_1, x_2, \dots, x_n satisfont m ($m < n$) équations de la forme $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, où $j = 1, 2, \dots, m$ et $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont aussi de "bonnes" fonctions pour $j = 1, 2, \dots, m$. Ces m équations sont les contraintes. Ici par "bonne", nous entendons par exemple que ces fonctions ont des dérivées partielles continues sur un ouvert de \mathbf{R}^n . La première étape de la méthode consiste à considérer la nouvelle fonction sur $\mathbf{R}^{(m+n)}$:

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

En d'autres mots, nous ajoutons une nouvelle variable λ_j ($j = 1, 2, \dots, m$) pour chacune des contraintes et nous considérons $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ comme des fonctions sur un ouvert de \mathbf{R}^n . Pour la deuxième étape, nous déterminons le système d'équations en $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ suivant:

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0, & i = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_j} = 0, & j = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

Si $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ est un maximum ou minimum relatif de la fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sous les m contraintes $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ pour $j = 1, 2, \dots, m$, alors il existe m nombres réels $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_m$ tels que

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right|_{(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_m)} = 0, & i = 1, 2, \dots, n \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_j} \right|_{(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_m)} = 0, & j = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

Ceci nous fournit donc une condition nécessaire pour que $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ soit un tel maximum ou minimum relatif. Pour compléter la méthode, il nous faut déterminer toutes les solutions $(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ de (*) et parmi celles-ci se trouveront les maximums et minimums relatifs.

Nous allons maintenant énoncer la proposition qui justifie la méthode. Sa preuve est similaire à celle de la proposition 6.3.

Proposition 6.3':

Soient $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (où $j = 1, 2, \dots, m$ et $m < n$) des fonctions à valeurs réelles dont les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \quad \text{où } i = 1, 2, \dots, n \text{ et } j = 1, 2, \dots, m$$

existent et sont continues pour un ouvert R de \mathbf{R}^n . Soit $S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R \mid g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \text{ où } j = 1, 2, \dots, m\}$. Supposons que $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ atteint un maximum ou minimum relatif sous les contraintes $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ au point $P = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in S$ et qu'en plus le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \right|_P & \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right|_P & \cdots & \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \right|_P \\ \left. \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right|_P & \left. \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \right|_P & \cdots & \left. \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \right|_P \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial g_m}{\partial x_1} \right|_P & \left. \frac{\partial g_m}{\partial x_2} \right|_P & \cdots & \left. \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \right|_P \end{pmatrix}$$

est m , alors il existe m nombres réels $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_m$ tels que

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right|_{(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_m)} = 0, & i = 1, 2, \dots, n \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_j} \right|_{(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_m)} = 0, & j = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

où

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

★ ★ ★

Exercice 6.1:

Déterminer les points critiques des fonctions suivantes et, en utilisant la proposition 6.2 pour chacun de ces points, indiquer si la fonction possède un maximum relatif, un minimum relatif à ce point ou encore que le graphe de cette fonction y a un point de selle ou finalement si le test n'est pas concluant.

- a) $f(x, y) = x^2 + 4xy + 3y^2 - 2x + 5y$;
- b) $f(x, y) = x^4 - xy^2 + 5y^2 + 2x$;
- c) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$;
- d) $f(x, y) = 4x^3 + 6x^2y + 3xy^2 - 12x + 18y$;
- e) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Exercice 6.2:

Soient n points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ de \mathbf{R}^2 . Déterminer la droite $y = mx + b$ qui minimise la somme

des carrés des écarts entre ces points et cette dernière, c'est-à-dire déterminer les nombres m et b tels que la somme

$$S(m, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2$$

soit minimale. Cette droite est appelée la droite des moindres carrés.

Exercice 6.3:

Déterminer les points critiques des fonctions suivantes et pour chacun de ces points, indiquer si la fonction possède un maximum relatif, un minimum relatif à ce point ou ni l'un, ni l'autre.

- a) $f(x, y) = (x - y)^2 + x^3 + y^3$;
- b) $f(x, y) = \sin(x) \sin(y) \sin(x + y)$;
- c) $f(x, y) = (2x^2 - y^2) \exp(x + y)$.

Exercice 6.4:

Soient P_1, P_2, P_3 trois points distincts non colinéaires du plan (c'est-à-dire que P_1, P_2 et P_3 ne sont pas sur une même droite et qu'ils forment un triangle). Déterminer le point M du plan tel que la somme des carrés des distances de M avec chacun des points P_1, P_2 et P_3 est minimale.

Exercice 6.5:

Déterminer la plus courte distance d'un point $(0, b)$ sur l'axe des y à la parabole d'équation $y = x^2$ en utilisant

- (a) la méthode du multiplicateur de Lagrange;
- (b) une autre méthode.

Exercice 6.6:

Déterminer le maximum de $(x_1 x_2 \cdots x_n)^2$ sous la restriction $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$.

Exercice 6.7:

Déterminer le maximum de $|\sum_{i=1}^n a_i x_i|$ si $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ en utilisant

- (a) la méthode du multiplicateur de Lagrange;
- (b) un argument géométrique.

Exercice 6.8:

(a) Montrer que $|(x_{1,1}x_{2,2} - x_{1,2}x_{2,1})| \leq \sqrt{x_{1,1}^2 + x_{1,2}^2} \sqrt{x_{2,1}^2 + x_{2,2}^2}$.

(b) (†) Soit $M = (x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice d'ordre $(n \times n)$. Montrer que

$$|\det(M)| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n x_{1,j}^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n x_{2,j}^2} \cdots \sqrt{\sum_{j=1}^n x_{n,j}^2}.$$

Cette inégalité est due à Hadamard (1865 - 1963).

Exercice 6.9:

Déterminer la plus courte distance d'un point (a_1, a_2, \dots, a_n) à la sphère dans \mathbf{R}^n de rayon r et de centre (b_1, b_2, \dots, b_n) en utilisant

- (a) la méthode du multiplicateur de Lagrange;
- (b) un argument géométrique.

CHAPITRE 7

Rappel sur l'intégrale simple.

Les prochains chapitres traiteront de l'intégration. Dans un premier temps, nous rappellerons ce qu'est l'intégrale simple (l'intégration pour les fonctions d'une seule variable réelle), ainsi que le théorème fondamental du calcul. Ensuite nous définirons les intégrales multiples, surtout les intégrales doubles et triples; nous verrons comment les calculer au moyen d'intégrales itérées, le théorème de changement de variables pour les intégrales multiples, en particulier pour les coordonnées cylindriques et sphériques.

Dans ce chapitre, nous traiterons de l'intégrale simple. Soient deux nombres réels a, b avec $a < b$ et une fonction $f(x)$ réelle définie et bornée sur l'intervalle fermé $[a, b]$, alors l'intégrale définie de f sur $[a, b]$, que l'on note

$$\int_a^b f(x) dx,$$

est la limite

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max\{\delta_i | 1 \leq i \leq n\} \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i) \delta_i,$$

pour laquelle nous considérons toutes les subdivisions de l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $[a_{i-1}, a_i]$, dont la longueur de chacun de ceux-ci est notée $\delta_i = (a_i - a_{i-1})$, en y laissant n , le nombre de ces sous-intervalles, devenir de plus en plus grand et le maximum $\max\{\delta_i | 1 \leq i \leq n\}$ des longueurs de ces sous-intervalles devenir de plus en plus près de zéro; de plus, dans cette définition pour chaque i , x_i peut être n'importe quel point de l'intervalle $[a_{i-1}, a_i]$.

Il faut noter que l'intégrale d'une fonction n'existe pas toujours. En d'autres mots, la limite définissant l'intégrale n'existe pas toujours. Cependant il est possible de démontrer que si la fonction à intégrer $f(x)$ est continue sur l'intervalle $[a, b]$, alors l'intégrale définie $\int_a^b f(x) dx$ existe. Ce que nous avons défini est l'intégrale de Riemann et la somme $\sum_{i=1}^n f(x_i) \delta_i$ est une somme de Riemann. Il existe d'autres types d'intégrales, notamment l'intégrale de Lebesgue. Elles ne sont pas traitées dans ces notes. Nous nous concentrerons que sur les intégrales définies de Riemann et, au dernier chapitre, sur les intégrales impropres de Riemann.

Dans la partie grise de la figure 7.1, nous avons illustré la somme $\sum_{i=1}^n f(x_i) \delta_i$ pour une subdivision de $[a, b]$. Si $f(x)$ est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, alors il est possible d'interpréter l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ comme l'aire signée de la partie du plan comprise entre le graphe de $f(x)$ et l'axe des x , la partie au-dessus de l'axe des x correspondant à une aire positive, la partie au-dessous de l'axe des x correspondant à une aire négative. Nous avons illustré ceci à la figure 7.2. Noter que l'intégrale d'une fonction peut être positive, négative ou nulle.

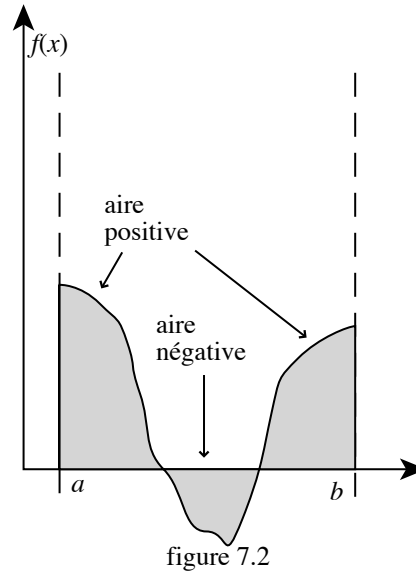
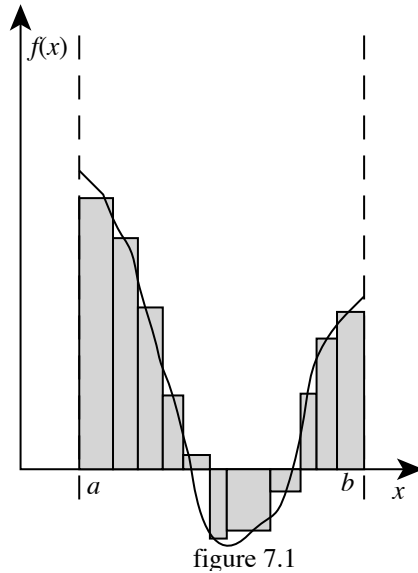
Le théorème fondamental du calcul dit que s'il existe une fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = (F(x))_a^b.$$

Une fonction $F(x)$ comme ci-dessus est une intégrale indéfinie ou une anti-dérivée ou encore une primitive pour $f(x)$. Il y a aussi une seconde forme du théorème fondamental du calcul. Cette seconde forme est la suivante:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x).$$

La première forme du théorème fondamental du calcul nous fournit un outil très précieux pour calculer des intégrales définies. Nous illustrerons ceci dans les exemples suivants.



Exemples 7.1:

a) Si $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, alors

$$\int_1^2 f(x) dx = (x^3 - x^2 + x)_1^2 = (2^3 - 2^2 + 2) - (1^3 - 1^2 + 1) = 5,$$

car $F(x) = x^3 - x^2 + x$ est une primitive pour $f(x)$. En effet, $(x^3 - x^2 + x)' = 3x^2 - 2x + 1$.

b) Si $f(x) = \cos(x)$, alors

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = (\sin(x))_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin(0) = 1,$$

car $F(x) = \sin(x)$ est bien une primitive pour $f(x)$. En effet, $(\sin(x))' = \cos(x)$.

Pour déterminer une primitive d'une fonction $f(x)$ donnée, il existe des règles de calcul. Dans ce qui suivra, nous noterons une telle primitive par $\int f(x) dx$ au lieu de $F(x)$ comme précédemment. Avec ces notations, nous avons donc

$$\frac{d}{dx} \left(\int f(x) dx \right) = f(x).$$

Il faut noter que si $F(x)$ est une primitive de la fonction $f(x)$, alors $F(x) + c$ est aussi une telle primitive peu importe la valeur de la constante c . Ainsi donc si $f(x)$ a une primitive, elle a alors une infinité de primitives. Malgré ceci l'intégrale définie de $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ a une valeur unique (si elle existe). Nous énumérons ci-dessous ces règles de calcul.

Proposition 7.1:

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions et a et b deux nombres réels. Alors:

a) (règle linéaire) $\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx$

b) (règle des puissances)

$$\int x^n dx = \begin{cases} x^{n+1}/(n+1) + c, & \text{si } n \neq -1; \\ \ln(|x|) + c & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

c) (règle du produit) $\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx$

d) (règle de substitution) $\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x))$ où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$.

e) (primitives de fonctions usuelles)

$$\begin{aligned} \int e^x dx &= e^x + c, & \int \ln(x) dx &= x \ln(x) - x + c, \\ \int \sin(x) dx &= -\cos(x) + c, & \int \cos(x) dx &= \sin(x) + c. \end{aligned}$$

Dans le cas de la règle du produit, on parle plutôt d'intégration par parties. C'est ainsi que nous désignerons cette règle par la suite. Nous allons maintenant illustrer ces règles de calcul dans quelques exemples.

Exemples 7.2:

a)

$$\begin{aligned}\int x^4 - 2x^{-1} + 5x^{-3} dx &= \int x^4 dx - 2 \int x^{-1} dx + 5 \int x^{-3} dx \\ &= x^5/5 - 2 \ln(|x|) + 5x^{-2}/(-2) + c\end{aligned}$$

par la règle linéaire et les formules pour les fonctions usuelles;

b)

$$\int x \exp(x^2) dx = (1/2) \int 2x \exp(x^2) dx = (1/2) \exp(x^2) + c$$

par la règle de substitution;

c)

$$\begin{aligned}\int x \cos(x) dx &= \int x(\sin(x))' dx = x \sin(x) - \int \sin(x)(x)' dx \\ &= x \sin(x) - \int \sin(x) dx = x \sin(x) - (-\cos(x)) + c \\ &= x \sin(x) + \cos(x) + c\end{aligned}$$

par intégration par parties;

d)

$$\int \tan(x) dx = \int \sin(x)/\cos(x) dx = - \int (\cos(x))'/\cos(x) dx = -\ln(|\cos(x)|) + c$$

par la règle de substitution;

En ce qui concerne la règle de substitution, nous pouvons procéder de la façon suivante:

$$\begin{aligned}\int f(g(x))g'(x) dx &= \int f(u) du, \quad \text{où } u = g(x) \text{ et } du = g'(x) dx; \\ &= F(u) = F(g(x)), \quad \text{où } F \text{ est une primitive de } f.\end{aligned}$$

Cette façon de procéder justifie le fait que l'on nomme celle-ci de règle de substitution. Nous allons illustrer ceci par les exemples ci-dessous.

Exemples 7.3:

a)

$$\begin{aligned}\int \frac{(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} dx &= \int \frac{du}{u^2} \quad \text{où } u = x^2+x+1 \text{ et } du = (2x+1) dx \\ &= \int u^{-2} du = \frac{u^{-1}}{(-1)} + c \\ &= \frac{-1}{(x^2+x+1)} + c \quad \text{en substituant de nouveau } u = x^2+x+1;\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int \frac{(\ln(x))^2}{x} dx &= \int u^2 du \quad \text{où } u = \ln(x) \text{ et } du = x^{-1} dx \\ &= \frac{u^3}{3} + c \\ &= \frac{(\ln(x))^3}{3} + c \quad \text{en substituant de nouveau } u = \ln(x).\end{aligned}$$

Pour ce qui est de l'intégration par parties, nous pouvons procéder de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \int f(x)g'(x) dx &= \int u dv \quad \text{où} \begin{cases} u = f(x), & du = f'(x) dx, \\ dv = g'(x) dx, & v = g(x), \end{cases} \\ &= uv - \int v du, \\ &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx. \end{aligned}$$

Nous allons illustrer ceci par les exemples ci-dessous.

Exemples 7.4:

a)

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= xe^x - \int e^x dx \quad \text{où} \begin{cases} u = x, & du = dx, \\ dv = e^x dx & v = e^x, \end{cases} \\ &= xe^x - e^x + c. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int (\ln(x))^2 dx &= x(\ln(x))^2 - \int x(2 \ln(x) x^{-1}) dx \quad \text{où} \begin{cases} u = (\ln(x))^2, & du = 2 \ln(x) x^{-1} dx, \\ dv = dx, & v = x, \end{cases} \\ &= x(\ln(x))^2 - 2 \int \ln(x) dx, \\ &= x(\ln(x))^2 - 2x \ln(x) + 2x + c. \end{aligned}$$

Il faut noter que la primitive $\int \ln(x) dx$ est obtenue aussi par intégration par parties. Plus précisément,

$$\begin{aligned} \int \ln(x) dx &= x \ln(x) - \int xx^{-1} dx \quad \text{où} \begin{cases} u = \ln(x), & du = x^{-1} dx, \\ dv = dx, & v = x, \end{cases} \\ &= x \ln(x) - \int dx, \\ &= x \ln(x) - x + c \end{aligned}$$

Dans ce cas, nous avons donc utilisé deux fois la méthode d'intégration par parties.

Nous terminerons ce chapitre en discutant de l'utilisation des fractions partielles pour calculer une intégrale indéfinie de la forme $\int P(x)/Q(x) dx$ pour laquelle $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes. Après division de $P(x)$ par $Q(x)$, nous aurons à évaluer une intégrale de la même forme, mais cette fois avec la condition supplémentaire que le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur. Dans ce qui suivra, nous allons donc supposer que l'intégrale indéfinie à calculer est de la forme $\int P(x)/Q(x)$ avec $\text{degré}(P(x)) < \text{degré}(Q(x))$. Nous allons exprimer $P(x)/Q(x)$ sous la forme d'une somme dont les termes sont d'une des formes suivantes:

$$\frac{A}{(ax+b)^k}, \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}.$$

Nous serons plus précis à ce sujet ci-dessous.

Notons premièrement que le dénominateur $Q(x)$ sera un produit de facteurs d'une des formes suivantes:

$$\begin{aligned} (ax+b)^m &\quad \text{où } a, b \in \mathbf{R} \text{ tels que } a \neq 0 \text{ et } m \text{ est un entier positif;} \\ (ax^2+bx+c)^m &\quad \text{où } a, b, c \in \mathbf{R} \text{ tels que } a \neq 0, b^2 - 4ac < 0 \text{ et } m \text{ est un entier positif.} \end{aligned}$$

Si $(ax+b)^m$ est un des facteurs comme ci-dessus, alors dans l'expression de $P(x)/Q(x)$ comme une somme, nous aurons parmi les termes de cette dernière, la somme

$$\sum_{k=0}^m \frac{A_k}{(ax+b)^k} \quad \text{où } A_1, A_2, \dots, A_m \text{ sont des nombres réels (à déterminer);}$$

si $(ax^2 + bx + c)^m$ est un des facteurs comme ci-dessus, c'est-à-dire avec entre autres $b^2 - 4ac < 0$, alors dans l'expression de $P(x)/Q(x)$ comme une somme, nous aurons parmi les termes de cette dernière, la somme

$$\sum_{k=0}^m \frac{(A_k x + B_k)}{(ax^2 + bx + c)^k} \quad \text{où } A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_m \text{ sont des nombres réels (à déterminer).}$$

Après avoir exprimé $P(x)/Q(x)$ sous cette forme de somme, il nous faut intégrer alors des fonctions d'une des deux formes suivantes:

$$\int \frac{A}{(ax + b)^k} dx, \quad \int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^k} dx.$$

Pour évaluer l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{A}{(ax + b)^k} dx,$$

il suffit d'utiliser la substitution $u = ax + b$. Pour évaluer l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{(Ax + B)}{(ax^2 + bx + c)^k} dx,$$

il faut noter que

$$\frac{(Ax + B)}{(ax^2 + bx + c)^k} = \frac{\left(\frac{A}{2a}\right)(2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{(ax^2 + bx + c)^k}.$$

Nous devons donc considérer deux types d'intégrales indéfinies:

$$\int \left(\frac{A}{2a}\right) \frac{(2ax + b)}{(ax^2 + bx + c)^k} dx \quad \text{et} \quad \int \frac{\left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{(ax^2 + bx + c)^k} dx.$$

Dans le premier cas, il suffit d'utiliser la substitution $u = ax^2 + bx + c$; alors que dans le second cas, il faut premièrement compléter le carré et ensuite utiliser une substitution trigonométrique. Ce second cas est le plus difficile de tous et les intégrales de ce type que nous considérerons dans ce cours seront parmi les plus simples, c'est-à-dire $m = 1$. Nous allons illustrer tout ce processus par un exemple.

Exemple 7.5:

$$\begin{aligned} \int \frac{(4x^5 + 12x^4 + 23x^3 + 34x^2 + 23x + 4)}{(4x^4 + 12x^3 + 17x^2 + 10x + 2)} dx &= \int x + \frac{(6x^3 + 24x^2 + 21x + 4)}{(4x^4 + 12x^3 + 17x^2 + 10x + 2)} dx \quad \text{après division} \\ &= (x^2/2) + \int \frac{(6x^3 + 24x^2 + 21x + 4)}{(4x^4 + 12x^3 + 17x^2 + 10x + 2)} dx. \end{aligned}$$

Il suffit donc d'évaluer l'intégrale

$$\int \frac{(6x^3 + 24x^2 + 21x + 4)}{(4x^4 + 12x^3 + 17x^2 + 10x + 2)} dx.$$

En sachant que $4x^4 + 12x^3 + 17x^2 + 10x + 2 = (2x + 1)^2(x^2 + 2x + 2)$, nous aurons alors par la théorie des fractions partielles que

$$\frac{(6x^3 + 24x^2 + 21x + 4)}{(4x^4 + 12x^3 + 17x^2 + 10x + 2)} = \frac{(6x^3 + 24x^2 + 21x + 4)}{(2x + 1)^2(x^2 + 2x + 2)} = (*)$$

est tel que

$$\begin{aligned}
 (*) &= \frac{A}{(2x+1)} + \frac{B}{(2x+1)^2} + \frac{(Cx+D)}{(x^2+2x+2)} \\
 &= \frac{A(2x+1)(x^2+2x+2) + B(x^2+2x+2) + (Cx+D)(2x+1)^2}{(2x+1)^2(x^2+2x+2)} \\
 &= \frac{A(2x^3+5x^2+6x+2) + B(x^2+2x+2) + C(4x^3+4x^2+x) + D(4x^2+4x+1)}{(2x+1)^2(x^2+2x+2)} \\
 &= \frac{(2A+4C)x^3 + (5A+B+4C+4D)x^2 + (6A+2B+C+4D)x + (2A+2B+D)}{(2x+1)^2(x^2+2x+2)}.
 \end{aligned}$$

En comparant les numérateurs et parce que les dénominateurs sont les mêmes, nous obtenons un système de quatre équations linéaires à quatre inconnues A, B, C, D :

$$\begin{aligned}
 2A + 0B + 4C + 0D &= 6, \\
 5A + 1B + 4C + 4D &= 24, \\
 6A + 2B + 1C + 4D &= 21, \\
 2A + 2B + 0C + 1D &= 4.
 \end{aligned}$$

Par élimination, nous obtenons que ce système a une seule solution: $A = 1, B = -1, C = 1$ et $D = 4$. En d'autres mots,

$$\frac{(6x^3 + 24x^2 + 21x + 4)}{(2x+1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{1}{(2x+1)} - \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{(x+4)}{(x^2+2x+2)}.$$

Ainsi pour évaluer l'intégrale $\int (6x^3 + 24x^2 + 21x + 4)/(4x^4 + 12x^3 + 17x^2 + 10x + 2) dx$, il nous faut donc considérer les trois intégrales suivantes:

$$\int \frac{dx}{(2x+1)}, \quad \int \frac{dx}{(2x+1)^2} \quad \text{et} \quad \int \frac{(x+4)}{(x^2+2x+2)} dx.$$

Pour la première de ces intégrales, nous avons

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{(2x+1)} &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} \quad \text{où } u = 2x+1, \\
 &= \frac{1}{2} \ln(|u|) + c' = \frac{1}{2} \ln(|2x+1|) + c';
 \end{aligned}$$

alors que pour la seconde de celles-ci, nous avons en utilisant la même substitution

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{(2x+1)^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2} \quad \text{où } u = 2x+1, \\
 &= \frac{1}{(2)(-1)} u^{-1} + c'' = \frac{-1}{2(2x+1)} + c''.
 \end{aligned}$$

Finalement pour la troisième de celles-ci, nous notons premièrement

$$\int \frac{(x+4)}{(x^2+2x+2)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+2)}{(x^2+2x+2)} dx + \int \frac{3}{(x^2+2x+2)} dx.$$

Il est bon d'observer que pour la première intégrale du terme de droite de l'équation, le numérateur est la dérivée du dénominateur. De cette observation, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
 \int \frac{(2x+2)}{(x^2+2x+2)} dx &= \int \frac{du}{u} \quad \text{où } u = x^2+2x+2 \\
 &= \ln(|u|) + c''' = \ln(|x^2+2x+2|) + c'''.
 \end{aligned}$$

Alors que pour la seconde intégrale du terme de droite de l'égalité, nous pouvons l'intégrer en complétant le carré. Plus précisément,

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{(x^2 + 2x + 2)} dx &= \int \frac{3}{(x^2 + 2x + 1 + 1)} dx = \int \frac{3}{((x + 1)^2 + 1)} dx \\ &= \int \frac{3 du}{(u^2 + 1)} \quad \text{où } u = x + 1 \\ &= 3 \arctan(u) + c'''' = 3 \arctan(x + 1) + c'''' . \end{aligned}$$

De tout ce qui précède, nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \int \frac{(4x^5 + 12x^4 + 23x^3 + 34x^2 + 23x + 4)}{(4x^4 + 12x^3 + 17x^2 + 10x + 2)} dx &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \ln(|2x + 1|) + \frac{1}{2(2x + 1)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \ln(|x^2 + 2x + 2|) + 3 \arctan(x + 1) + c . \end{aligned}$$

Cet exemple illustre bien ce qu'il faut faire pour évaluer ce type d'intégrale. Trouver l'intégrale indéfinie d'une fonction est un problème plus difficile que celui de calculer la dérivée d'une fonction. Dans certains cas, il est impossible d'exprimer la primitive en termes de fonctions usuelles; par exemple $\int \exp(-x^2) dx$ est une telle primitive. Mais dans ce derniers cas, il existe tout de même des tables pour calculer l'intégrale définie $\int_a^b \exp(-x^2) dx$ quelque soient $a, b \in \mathbf{R}$.

★ ★ ★

Exercice 7.1:

Calculer les intégrales définies suivantes:

- a) $\int_1^2 (x^3 - 4x^{-1} + 5x^{-2}) dx$;
- b) $\int_0^1 x^3 \sqrt{1 + x^2} dx$;
- c) $\int_0^2 5x / (2x^2 + 1)^2 dx$;
- d) $\int_0^3 x^2 e^x dx$;
- e) $\int_2^4 1 / (x - 1)(x + 1) dx$;
- f) $\int_{-1/2}^1 1 / (4x^2 + 4x + 10) dx$.

Exercice 7.2:

Calculer les intégrales indéfinies suivantes:

- a) $\int \cos(x) \sin(x) dx$;
- b) $\int \sin^2(x) dx$;
- c) $\int \arctan(x) dx$;
- d) $\int (x - 4) / (x^2 - 5x + 6) dx$;
- e) $\int x^5 / \sqrt{1 + x^2} dx$;
- f) $\int \cos(3x) \sin(x) dx$.

Exercice 7.3:

En utilisant la subdivision de l'intervalle $[0, 1]$ en n sous-intervalles égaux et en prenant pour x_i le point le plus à droite du i -ième sous-intervalle, calculer la somme de Riemann $\sum_{i=1}^n f(x_i) \delta_i$, ainsi que la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \delta_i$ pour les deux fonctions suivantes en sachant que

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} :$$

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = x^2$

CHAPITRE 8

Intégrales doubles.

Dans ce chapitre, nous définirons l'intégrale double d'une fonction $f(x, y)$ sur une région bornée du plan et nous présenterons quelques-unes de ces propriétés. Ensuite nous verrons comment calculer ces intégrales au moyen d'intégrales itérées. Nous conclurons ce chapitre en discutant des coordonnées polaires et du théorème de changement de variables pour l'intégrale double dans ce cas particulier.

Soient R , une région bornée de \mathbf{R}^2 , c'est-à-dire que R est contenue dans un rectangle suffisamment grand, et $f(x, y)$, une fonction définie et bornée sur R . On définit l'intégrale de $f(x, y)$ sur R , que l'on note

$$\iint_R f(x, y) dx dy$$

comme étant la limite

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max\{\delta_i | 1 \leq i \leq n\} \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i,$$

pour laquelle nous considérons toutes les subdivisions de la région R en n sous-régions: R_1, R_2, \dots, R_n , dont le diamètre de R_i , c'est-à-dire la distance maximale entre deux points quelconques de R_i , est noté δ_i , en y laissant n , le nombre de ces sous-régions devenir de plus en plus grand et le maximum $\max\{\delta_i | 1 \leq i \leq n\}$ des diamètres de ces sous-régions devenir de plus en plus près de zéro; de plus dans cette définition, (x_i, y_i) peut être n'importe quel point de R_i et ΔA_i est l'aire de la sous-région R_i .

Cette limite n'existe pas toujours. Cependant si R est une région bornée, $f(x, y)$ est continue sur R et que le bord de R consiste en une réunion finie de courbes continûment dérivables, alors l'intégrale double $\iint_R f(x, y) dx dy$ existe. Dans ce dernier cas, il est possible d'interpréter l'intégrale double comme le volume signé de la région de \mathbf{R}^3 comprise entre le graphe de $f(x, y)$ et R , la partie au-dessus du plan des x, y correspondant à un volume positif, la partie au-dessous du plan des x, y correspondant à un volume négatif. Nous avons illustré ceci dans la figure 8.1 ci-dessous.

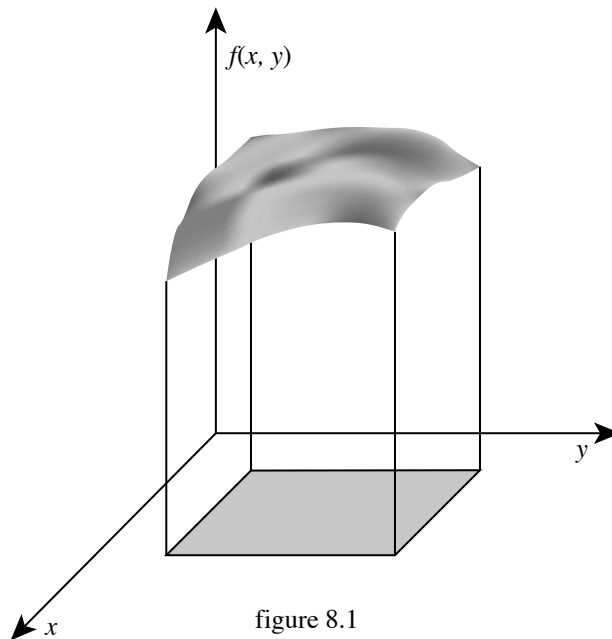


figure 8.1

Nous allons maintenant énumérer quelques-unes des propriétés des intégrales doubles dans la proposition ci-dessous. Elle est démontrée en utilisant la définition de l'intégrale double.

Proposition 8.1:

Soient R, R' , deux régions de \mathbf{R}^2 telles que l'intersection $R \cap R'$ de celles-ci est contenue dans les bords de R et de R' . Soient $f(x, y), g(x, y)$ deux fonctions réelles et a, b deux nombres réels. Alors:

a) (règle linéaire) $\iint_R (a f(x, y) + b g(x, y)) dx dy = a \iint_R f(x, y) dx dy + b \iint_R g(x, y) dx dy$

b) $\iint_{R \cup R'} f(x, y) dx dy = \iint_R f(x, y) dx dy + \iint_{R'} f(x, y) dx dy$

si ces intégrales existent.

Exemple 8.1:

Soient a, b, c trois nombres positifs, la région rectangulaire $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ et la fonction constante $f(x, y) = c$. Alors

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_R c = abc$$

car abc est le volume du parallépipède rectangle tracé dans la figure 8.2.

Exemple 8.2:

Soient la région triangulaire $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x, y \leq 1 \text{ et } 0 \leq (1 - x - y)\}$ et la fonction continue $f(x, y) = 1 - x - y$. La région R est illustrée dans la figure 8.3. Alors

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dx dy &= \iint_R (1 - x - y) dx dy, \\ &= \text{volume du tétraèdre } T \text{ dont les sommets sont } (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) \text{ et } (0, 0, 1), \\ &= (1/6); \end{aligned}$$

car si nous notons par V le volume du tétraèdre T , alors nous pouvons observer que le cube dont les arêtes mesurent 1 se décompose en quatre tétraèdres: ABDE, BCDG, DEGH et BEFG (avec les notations de la figure 8.5) congrus à T et d'un tétraèdre régulier BDEG dont les arêtes mesurent $\sqrt{2}$. Le volume d'un tétraèdre régulier est connu et dans le cas présent ce volume est $(1/3)$. Donc nous avons l'égalité $4V + (1/3) = 1$, le volume du cube et conséquemment le volume V du tétraèdre T est $V = 1/6$. Nous avons aussi représenté le tétraèdre T à la figure 8.4.

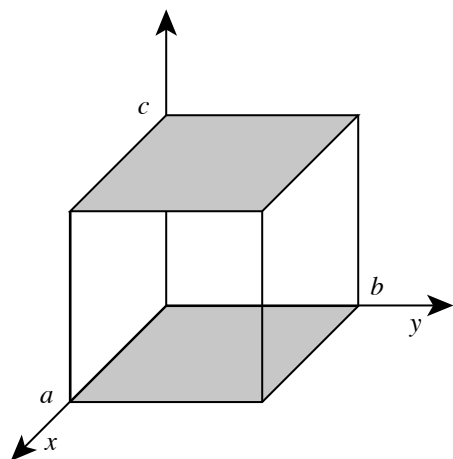


figure 8.2

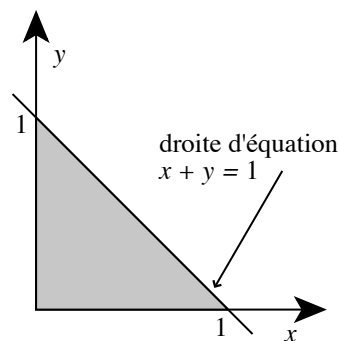


figure 8.3

Exemple 8.3:

Soient la région R correspondant à l'intérieur du cercle de rayon 1 centré à l'origine dans \mathbf{R}^2 , c'est-à-dire

$R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$ et la fonction continue $f(x, y) = x$. Alors

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_R x dx dy = 0,$$

car

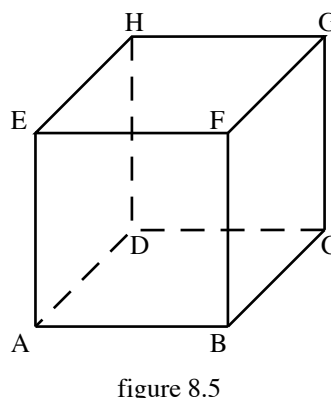
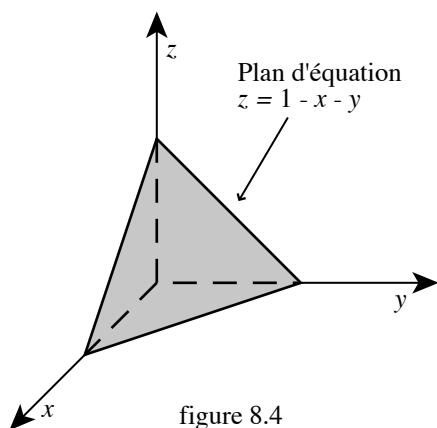
$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max\{\delta_i \mid 1 \leq i \leq n\} \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i$$

et on peut considérer des subdivisions de R en sous-régions telles que la réflexion par rapport à l'axe des y de la i -ième région est aussi une sous-région de notre subdivision et de choisir les points (x_i, y_i) de telle façon que si (x_i, y_i) est le point de la i -ième région et $(x_{i'}, y_{i'})$ celui de la sous-région obtenue à la suite de la réflexion par rapport à l'axe des y , alors $(x_{i'}, y_{i'})$ est le résultat de cette réflexion sur le point (x_i, y_i) . Plus précisément $(x_{i'}, y_{i'}) = (-x_i, y_i)$. En utilisant une décomposition du demi-disque $R_+ = \{(x, y) \in R \mid x \geq 0\}$ et la décomposition du demi-disque $R_- = \{(x, y) \in R \mid x \leq 0\}$ obtenue à la suite de la réflexion par rapport à l'axe des y de la décomposition précédente de R_+ . Nous avons

$$\sum_{\substack{i \\ \text{décomposition de } R_+}} f(x_i, y_i) \Delta A_i = - \sum_{\substack{i' \\ \text{décomposition de } R_-}} f(x_{i'}, y_{i'}) \Delta A_{i'}.$$

Donc

$$\sum_{\substack{i \\ \text{décomposition de } R_+}} f(x_i, y_i) \Delta A_i + \sum_{\substack{i' \\ \text{décomposition de } R_-}} f(x_{i'}, y_{i'}) \Delta A_{i'} = 0 \quad \text{et} \quad \iint_R x dx dy = 0.$$



Exemple 8.4:

Si R est une région bornée de \mathbf{R}^2 dont le bord consiste en une réunion finie de courbes continûment différentiables, alors

$$\iint_R dx dy = \text{aire de } R.$$

Ceci est vrai à cause de la définition même de l'intégrale double. En effet,

$$\begin{aligned} \iint_R dx dy &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max\{\delta_i \mid 1 \leq i \leq n\} \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta A_i \\ &= \text{somme des aires des sous-régions} \\ &= \text{aire de } R. \end{aligned}$$

La fonction que nous intégrons dans cet exemple est la fonction constante $f(x, y) = 1$.

Pour évaluer toutes les intégrales doubles dans les exemples précédents, nous n'avons utilisé que des méthodes adaptées à chaque cas, mais qui ne sont pas générales. Nous allons maintenant décrire comment évaluer une intégrale double pour des régions de certains types au moyen d'intégrales itérées. Pour une région quelconque, il suffit alors de la découper en régions sur lesquelles nous pouvons effectuer des intégrales itérées et d'utiliser la proposition 8.1 b).

Proposition 8.2:

a) Si la région R est la région bornée à gauche par la droite verticale d'équation $x = a$, à droite par celle d'équation $x = b$, supérieurement par le graphe de la fonction $y = g_2(x)$ et inférieurement par celui de la fonction $y = g_1(x)$, c'est-à-dire $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$. Alors

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx$$

si ces intégrales existent et où il faut considérer x comme une constante dans l'intégrale

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy$$

et que l'on intègre par rapport à y . Le résultat de cette dernière intégrale est une fonction de x que l'on intègre par rapport à x sur l'intervalle $[a, b]$.

b) Si la région R est la région bornée supérieurement par la droite horizontale d'équation $y = d$, inférieurement par celle d'équation $y = c$, bornée à gauche par le graphe de la fonction (de y) $x = h_1(y)$ et à droite par celui de la fonction (de y) $x = h_2(y)$, c'est-à-dire $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$. Alors

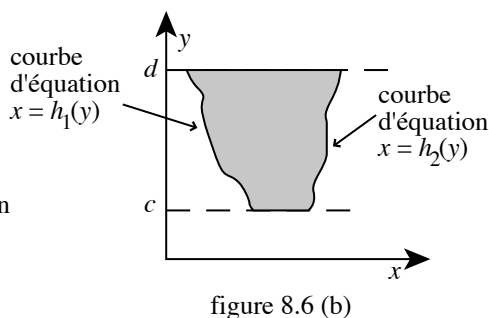
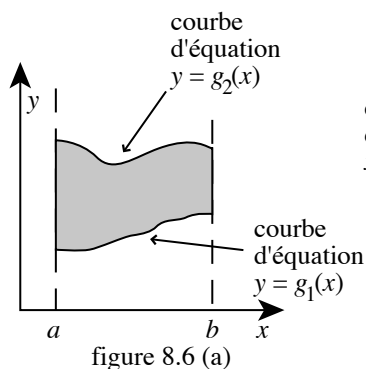
$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy$$

si ces intégrales existent et où il faut considérer y comme une constante dans l'intégrale

$$\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx$$

et que l'on intègre par rapport à x . Le résultat de cette dernière intégrale est une fonction de y que l'on intègre par rapport à y sur l'intervalle $[c, d]$.

Nous avons illustré dans la figure 8.6 chacun de ces cas: a) et b).



Esquisse de la preuve: Nous n'allons démontrer que l'énoncé a) de la proposition. b) peut être démontré de façon analogue. Notons par $h(x)$ l'intégrale

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy.$$

Pour calculer l'intégrale $\int_a^b h(x) dx$, il faut évaluer la limite

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max\{a_i - a_{i-1} \mid 1 \leq i \leq n\} \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n h(x_i) (a_i - a_{i-1}) \quad (*)$$

pour laquelle nous considérons toutes les subdivisions de l'intervalle $[a, b] : a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$. Pour calculer

$$h(x_i) = \int_{g_1(x_i)}^{g_2(x_i)} f(x_i, y) dy,$$

il faut évaluer la limite

$$\lim_{\substack{m_i \rightarrow \infty \\ \max\{c_j - c_{j-1} \mid 1 \leq j \leq m_i\} \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^{m_i} f(x_i, y_j) (c_j - c_{j-1})$$

pour laquelle nous considérons toutes les subdivisions de l'intervalle $[g_1(x_i), g_2(x_i)]$. En remplaçant dans (*), nous obtenons

$$(*) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max\{a_i - a_{i-1} \mid 1 \leq i \leq n\} \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \left(\lim_{\substack{m_i \rightarrow \infty \\ \max\{c_j - c_{j-1} \mid 1 \leq j \leq m_i\} \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^{m_i} f(x_i, y_j) (c_j - c_{j-1}) \right) (a_i - a_{i-1}).$$

Mais le "produit cartésien" des subdivisions de $[a, b]$ et $[g_1(x_i), g_2(x_i)]$ nous permet de construire une subdivision de R et il est alors possible de vérifier que

$$(*) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \max\{\delta_i \mid 1 \leq i \leq N\} \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i) \Delta A_i,$$

pour laquelle nous considérons toutes les subdivisions de la région R en N sous-régions: R_1, R_2, \dots, R_N , en y laissant N , le nombre de ces sous-régions devenir de plus en plus grand et le maximum $\max\{\delta_i \mid 1 \leq i \leq N\}$ des diamètres de ces sous-régions devenir de plus en plus près de zéro. On a bien

$$\int_a^b h(x) dx = \iint_R f(x, y) dx dy.$$

Ainsi a) est démontré.

Exemple 8.5:

Nous allons reprendre l'intégrale de l'exemple 8.2. Dans ce cas, nous avons que $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$, c'est-à-dire l'intérieur du triangle de sommets: $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$. En d'autres mots, nous sommes dans la situation de la proposition 8. 2 a) avec $a = 0, b = 1, g_1(x) = 0$ et $g_2(x) = 1 - x$. Nous avons représenté R à la figure 8.7. Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} \iint_R (1 - x - y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1 - x - y) dy \right) dx = \int_0^1 \left((1-x)y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left((1-x)(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) - \left((1-x)0 - \frac{0^2}{2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{(1-2x+x^2)}{2} dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{2x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(1 - 1 + \frac{1}{3}\right) - \left(0 - 2 \frac{0^2}{2} + \frac{0^3}{3}\right) \right) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

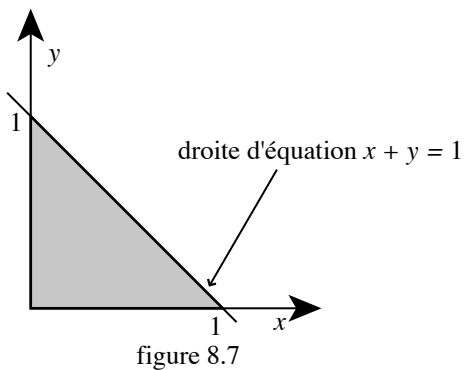


figure 8.7

Exemple 8.6:

Soit R , la région dans le premier quadrant comprise entre les deux paraboles respectivement d'équation $y = 2x^2$ et $y = x^2$ et sous la droite horizontale d'équation $y = 1$. Ainsi $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, \sqrt{y/2} \leq x \leq \sqrt{y}\}$. Nous sommes dans la situation de la proposition 8.2 b) avec $c = 0, d = 1, h_1(y) = \sqrt{y/2}$ et $h_2(y) = \sqrt{y}$. Nous avons représenté R comme la figure hachurée à la figure 8.8.

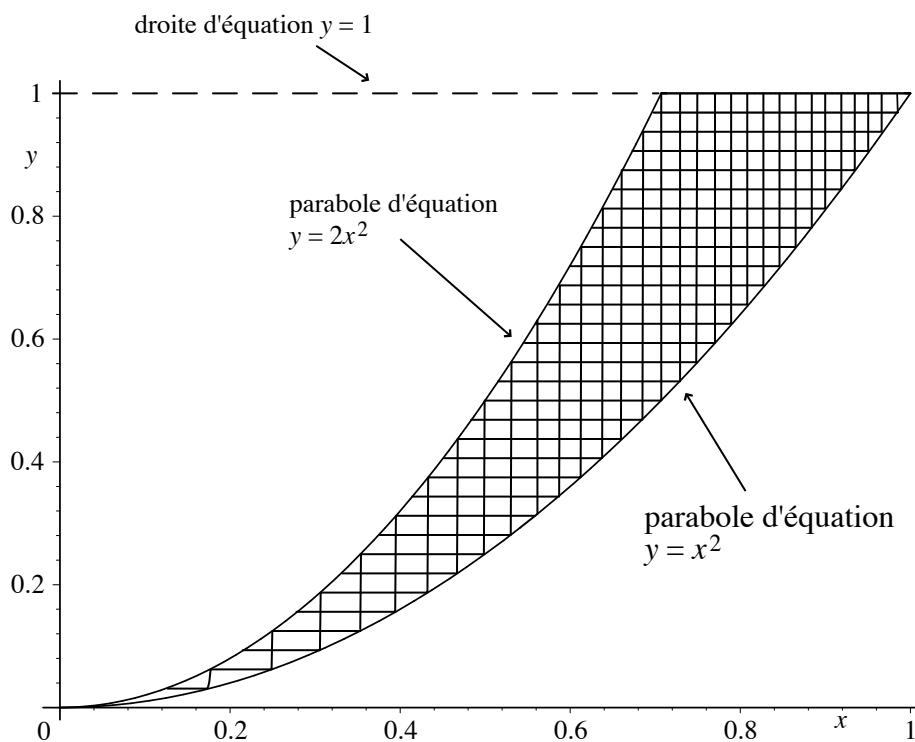


figure 8.8

Pour obtenir ces deux dernières bornes, nous notons pour celle de gauche que

$$y = 2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{y}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{y}{2}};$$

alors que, pour celle de droite, nous avons

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y},$$

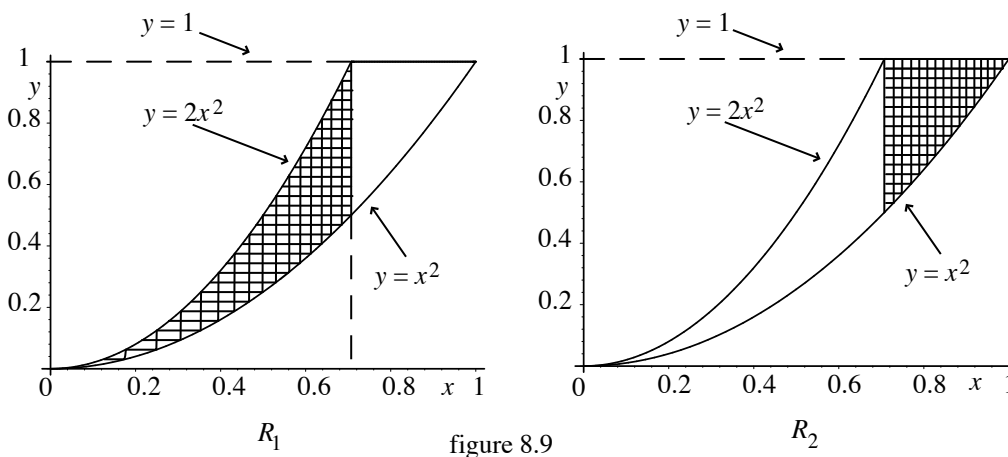
car $x \geq 0$ dans ces deux cas. De tout ceci, nous obtenons

$$\begin{aligned} \iint_R (x+y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y/2}}^{\sqrt{y}} (x+y) dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_{x=\sqrt{y/2}}^{x=\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{(\sqrt{y})^2}{2} + \sqrt{y} y \right) - \left(\frac{(\sqrt{y/2})^2}{2} + \sqrt{y/2} y \right) dy \\ &= \int_0^1 \frac{y}{4} + \frac{(2-\sqrt{2})}{2} y^{3/2} dy = \left[\frac{y^2}{8} + \frac{(2-\sqrt{2})}{2} \left(\frac{2}{5} \right) y^{5/2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{(21-8\sqrt{2})}{40}. \end{aligned}$$

Noter que nous aurions pu évaluer l'intégrale ci-dessus comme la somme de deux intégrales itérées, chacune correspondant à la situation de la proposition 8.2 a). Plus exactement,

$$\iint_R (x+y) dx dy = \iint_{R_1} (x+y) dx dy + \iint_{R_2} (x+y) dx dy$$

dans lesquelles $R_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2}/2, x^2 \leq y \leq 2x^2\}$ et $R_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \sqrt{2}/2 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$. Nous avons représenté ces régions dans la figure 8.9.



Conséquemment

$$\begin{aligned} \iint_R (x+y) dx dy &= \iint_{R_1} (x+y) dx dy + \iint_{R_2} (x+y) dx dy \\ &= \int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\int_{x^2}^{2x^2} (x+y) dy \right) dx + \int_{\sqrt{2}/2}^1 \left(\int_{x^2}^1 (x+y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Nous laissons au lecteur le soin de calculer ces deux intégrales itérées.

Exemple 8.7:

Soit R , la région de \mathbf{R}^2 dans le premier quadrant à l'extérieur du cercle centré à l'origine de rayon 1 et à l'intérieur de celui centré à l'origine de rayon 2. Ainsi $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y \text{ et } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Nous avons représenté R à la figure 8.10.

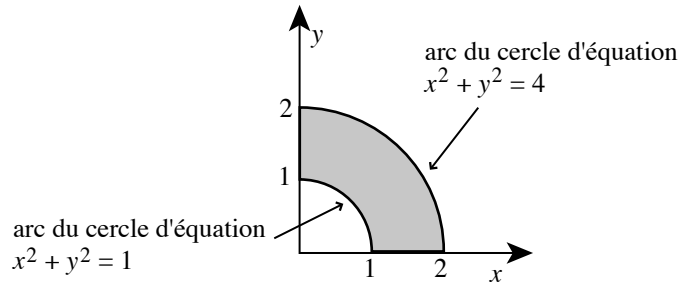


figure 8.10

Pour évaluer l'intégrale $\iint_R x \, dx \, dy$, il est nécessaire de décomposer la région R en deux régions pour lesquels nous pouvons utiliser la proposition 8.2. Nous pouvons considérer la décomposition suivante: $R = R_1 \cup R_2$ avec

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, \sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\} \quad \text{et}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\}.$$

Nous avons représenté R_1 et R_2 à la figure 8.11.

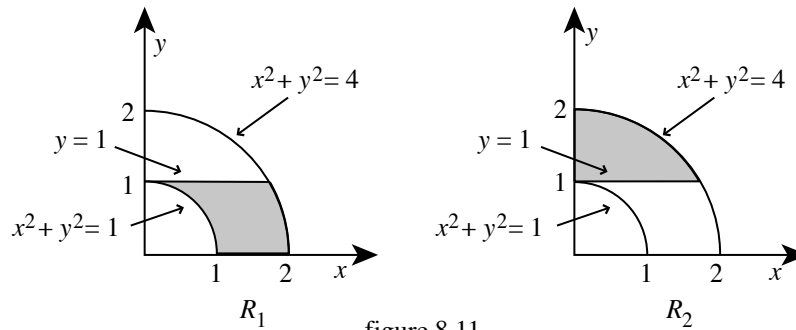


figure 8.11

De tout ceci, nous obtenons

$$\begin{aligned} \iint_R x \, dx \, dy &= \iint_{R_1} x \, dx \, dy + \iint_{R_2} x \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} x \, dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-y^2}} x \, dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} \right)_{x=\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{4-y^2}} dy + \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} \right)_{x=0}^{x=\sqrt{4-y^2}} dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{(\sqrt{4-y^2})^2}{2} - \frac{(\sqrt{1-y^2})^2}{2} \right) dy + \int_1^2 \left(\frac{(\sqrt{4-y^2})^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{4-y^2}{2} - \frac{1-y^2}{2} \right) dy + \int_1^2 \frac{4-y^2}{2} dy = \int_0^1 \frac{3}{2} dy + \int_1^2 2 - \frac{y^2}{2} dy \\ &= \left(\frac{3}{2} y \right)_{y=0}^{y=1} + \left(2y - \frac{y^3}{6} \right)_{y=1}^{y=2} \\ &= \left(\frac{3}{2} (1) - \frac{3}{2} (0) \right) + \left(\left(2(2) - \frac{2^3}{6} \right) - \left(2(1) - \frac{1^3}{6} \right) \right) = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Nous aurions pu considérer une autre décomposition: $R = R'_1 \cup R'_2$ avec

$$R'_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\} \quad \text{et}$$

$$R'_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}.$$

et nous aurions alors

$$\iint_R x \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x \, dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} x \, dy \right) dx.$$

Nous avons représenté R'_1 et R'_2 à la figure 8.12.

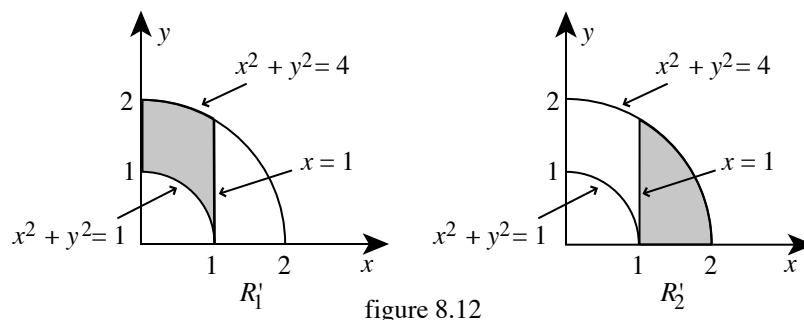


figure 8.12

L'exemple précédent illustre bien comment procéder en général. Il suffit seulement décomposer la région d'intégration R en régions sur lesquelles nous pouvons utiliser la proposition 8.2.

Il y a plusieurs façons de décrire les points du plan. Parmi tous ces systèmes de coordonnées, c'est une litote que de dire que les coordonnées polaires sont non négligeables. Nous discuterons donc de ces coordonnées polaires, ainsi que du théorème de changement de coordonnées pour les intégrales doubles dans le cas du changement des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires.

Au point (x, y) du plan \mathbf{R}^2 , nous pouvons lui associer ses coordonnées polaires (r, θ) pour lesquelles r est la distance entre le point (x, y) et l'origine $(0, 0)$ alors que θ est la mesure (dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) de l'angle formé par la demi-droite des x positifs et la demi-droite commençant à l'origine et passant par le point (x, y) . Ainsi nous avons $0 \leq r$ et $0 \leq \theta < 2\pi$. Les changements de coordonnées sont les suivants:

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(y/x). \end{cases}$$

Ceci est une conséquence simple de la définition de r et θ . Nous avons représenté ceci à la figure 8.13.

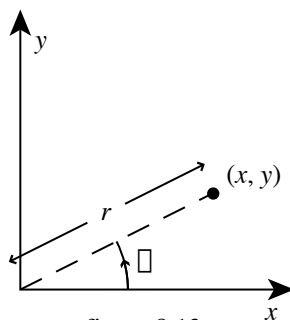


figure 8.13

Nous décrivons dans un chapitre ultérieur le théorème général pour un changement quelconque de systèmes de coordonnées. Présentement nous nous limiterons au changement de coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires.

Proposition 8.3:

Soient R , une région du plan des x, y , $R' = \{(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \mid (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \in R\}$, la région

correspondante dans les coordonnées r, θ et $f : R \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction réelle telle que l'intégrale double $\iint_R f(x, y) dx dy$ existe. Alors l'intégrale double $\iint_{R'} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta$ existe et nous avons

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R'} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta.$$

Preuve: Pour déterminer si $\iint_{R'} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta$ existe, il nous faut considérer la limite

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max\{\delta_i | 1 \leq i \leq n\} \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(r_i \cos(\theta_i), r_i \sin(\theta_i)) r_i (\Delta r_i) (\Delta \theta_i),$$

pour laquelle nous considérons toutes les subdivisions de R' en n sous-régions. Voir la figure 8.14.

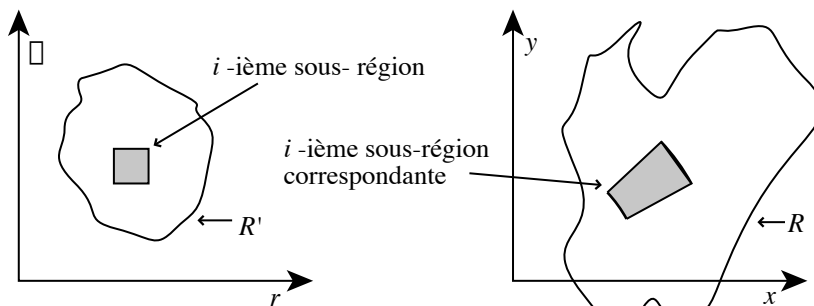


figure 8.14

A chacune de ces subdivisions de R' , nous obtenons une subdivision de R en utilisant le changement de variables: $x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta)$. A la i -ième sous-région de la subdivision de R' , la région correspondante dans R est comme dans la figure 8.15. L'aire de cette petite région hachurée sera $\approx r_i (\Delta \theta_i) (\Delta r_i)$. Parce que $\iint_R f(x, y) dx dy$ existe et par la définition de l'intégrale, nous avons

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max\{\delta_i | 1 \leq i \leq n\} \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(r_i \cos(\theta_i), r_i \sin(\theta_i)) r_i (\Delta r_i) (\Delta \theta_i) = \iint_R f(x, y) dx dy.$$

Conséquent

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R'} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta.$$

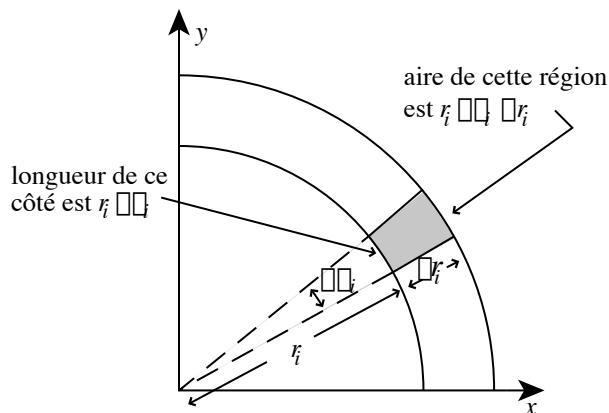


figure 8.15

Nous allons maintenant illustrer comment cette proposition peut être utilisée. Le premier exemple est très simple et les suivants sont un peu plus difficiles.

Exemple 8.8:

Soit R , l'intérieur du cercle de rayon 1 centré à l'origine. Alors nous savons à cause de l'exemple 8.4 que

$$\iint_R dx dy = \text{aire de } R = \pi.$$

Vérifions que c'est bien ce que nous obtenons au moyen de la proposition 8.3. La région R' correspondant à R est $R' = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Donc

$$\iint_R dx dy = \iint_{R'} r dr d\theta = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r d\theta \right) dr = \int_0^1 (r\theta) \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = \int_0^1 2\pi r dr = \left(\frac{2\pi r^2}{2} \right) \Big|_{r=0}^{r=1} = \pi.$$

Exemple 8.9:

Calculons l'intégrale de l'exemple 8.7 en utilisant les coordonnées polaires. Rappelons que $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. La région R' correspondant à R dans le plan des coordonnées polaires sera $R' = \{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \pi/2, 1 \leq r \leq 2\}$. Donc de la proposition 8.3, nous obtenons

$$\begin{aligned} \iint_R x dx dy &= \iint_{R'} (r \cos(\theta)) r dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\int_1^2 r^2 \cos(\theta) dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{r^3}{3} \cos(\theta) \right) \Big|_{r=1}^{r=2} d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2^3}{3} \cos(\theta) - \frac{1^3}{3} \cos(\theta) \right) d\theta \\ &= \frac{7}{3} \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta = \frac{7}{3} \left(\sin(\theta) \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \frac{7}{3} (1 - 0) = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Exemple 8.10:

Soit D la région du premier quadrant à l'intérieur du cercle centré à l'origine de rayon $R > 0$ et dans le demi-plan ne contenant pas l'origine et dont le bord est la droite passant par les points $(0, R)$ et $(R, 0)$. En d'autres mots, $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, R \leq (x + y)\}$. Nous allons maintenant évaluer l'intégrale $\iint_D (x + y)/(x^2 + y^2) dx dy$ en utilisant les coordonnées polaires. Déterminons premièrement la région D' correspondant à D dans les coordonnées polaires. Nous avons représenté la région D dans la figure 8.16.

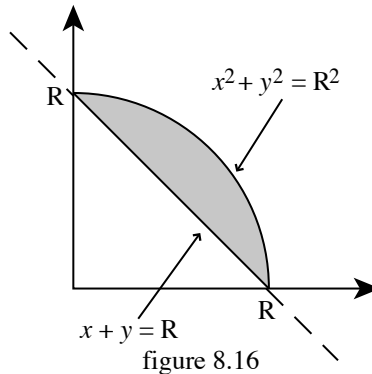


figure 8.16

De cette figure, nous avons clairement $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Pour un θ fixé entre 0 et $\pi/2$, alors la borne inférieure r_{\min} pour les valeurs de r est déterminée par la droite d'équation $x + y = R$. Nous obtenons alors pour cette borne

$$r \cos(\theta) + r \sin(\theta) = R \quad \Rightarrow \quad r_{\min} = \frac{R}{(\cos(\theta) + \sin(\theta))}.$$

Donc

$$D' = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \pi/2, \frac{R}{(\cos(\theta) + \sin(\theta))} \leq r \leq R \right\}.$$

De la proposition 8.3, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \iint_D \frac{(x+y)}{(x^2+y^2)} dx dy &= \iint_{D'} \frac{(r \cos(\theta) + r \sin(\theta))}{((r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2)} r dr d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_{R/(\cos(\theta)+\sin(\theta))}^R (\cos(\theta) + \sin(\theta)) dr \right) d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \left((\cos(\theta) + \sin(\theta)) r \right) \Big|_{r=\frac{R}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}}^{r=R} d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \left((\cos(\theta) + \sin(\theta))R - (\cos(\theta) + \sin(\theta)) \frac{R}{(\cos(\theta) + \sin(\theta))} \right) d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} R(\cos(\theta) + \sin(\theta) - 1) d\theta = \left(R \sin(\theta) - R \cos(\theta) - R\theta \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \\
 &= (R(1) - R(0) - R(\pi/2)) - (R(0) - R(1) - R(0)) = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)R.
 \end{aligned}$$

Pour terminer ce chapitre, nous indiquons des notations utilisées pour certaines intégrales doubles. $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$ signifie $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dx \right) dy$, alors que $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$ signifie $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$. Ces deux intégrales sont en général différentes. Certains auteurs écrivent l'intégrale $\int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$ sous la forme $\int_a^b dx \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right)$ ou encore $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$ dans laquelle l'ordre $dy dx$ indique l'ordre d'intégration. De même, ils écrivent $\int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$ sous la forme $\int_c^d dy \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right)$ ou encore $\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$.

* * *

Exercice 8.1:

Evaluer chacune des intégrales doubles suivantes:

- a) $\iint_R (x+y) dx dy$ où R est l'intérieur du triangle dont les sommets sont $(0, 1)$, $(2, 5)$ et $(2, 7)$,
- b) $\iint_R (xy) dx dy$ où R est la région du plan comprise à l'intérieur des deux paraboles respectivement d'équation $y = x^2$ et $y = -x^2 + 4x$,
- c) $\iint_R x dx dy$ où R est l'intérieur du quadrilatère dont les sommets sont $(0, -1)$, $(5, -1)$, $(3, 1)$ et $(2, 1)$,
- d) $\iint_R x^2 y dx dy$ où R est la région du plan à l'intérieur du cercle centré à l'origine de rayon 1 et au-dessus de la droite horizontale d'équation $y = 1/2$,
- e) $\iint_R y dx dy$ où R est l'intérieur du triangle ayant pour sommets $(0, 0)$, $(2, 4)$ et $(3, 2)$,
- f) $\int_1^3 \int_2^5 e^x xy^2 dx dy$,
- g) $\int_1^4 \int_2^6 (x^2 + xy) dy dx$,
- h) $\iint_R (x+2y) dx dy$ où $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq (4 - 2x - x^2)\}$,
- i) $\iint_R x^2 y dx dy$ où $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq ((3/2) - x + (x^2/2))\}$,
- j) $\iint_R 1/(x+y)^3 dx dy$ où $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x, y \geq 1, x+y \leq 3\}$,

Exercice 8.2:

Ci-dessous a dénotera un nombre réel positif ($a > 0$). Evaluer chacune des intégrales doubles suivantes:

- $\iint_R xy \, dx \, dy$ où R est la région du plan à l'intérieur du cercle de rayon 2 centré à l'origine et dans le premier quadrant,
- $\iint_R (x^2 + y^2) \, dx \, dy$ où $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq y\}$,
- $\iint_R y^2 \, dx \, dy$ où R est la région du plan à l'intérieur du cercle de rayon 1 centré au point $(0, 1)$,
- $\iint_R y \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$ où $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4 \leq x^2 + y^2, x^2 + 4y^2 \leq 16, 0 \leq y\}$,
- $\iint_R xy \, dx \, dy$ où $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$,
- $\iint_R (xy - y^2) \, dx \, dy$, où $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq y, x^2 + y^2 \leq a^2\}$,
- $\iint_R x \, dx \, dy$, où $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x + 1)^2 + y^2 \leq 1\}$,
- $\iint_R y/(a^2 + x^2) \, dx \, dy$, où $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2, x, y \geq 0\}$,
- $\iint_R 1/(1 + x^2 + y^2)^2 \, dx \, dy$, où $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Exercice 8.3:

Evaluer chacune des intégrales doubles suivantes:

- $\iint_R |x + y| \, dx \, dy$, où $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| < 1, |y| < 1\}$,
- $\iint_R xy/(1 + x^2 + y^2) \, dx \, dy$, où $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1\}$.

Exercice 8.4:

Pour tout nombre réel $r > 0$, posons

$$D(r) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq r^2\} \quad \text{et} \quad C(r) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq r, 0 \leq y \leq r\}.$$

- Calculer $I(r) = \iint_{D(r)} \cos(x^2 + y^2) \, dx \, dy$.
- (†) Montrer que $\lim_{r \rightarrow \infty} J(r)$ existe où $J(r) = \iint_{C(r)} \cos(x^2 + y^2) \, dx \, dy$.
- Est-ce que $\lim_{r \rightarrow \infty} I(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} J(r)$?

Exercice 8.5(†):

Evaluer l'intégrale $\iint_R (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, où $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2ax, x^2 + y^2 \leq 2ay\}$ et a est un nombre réel.

CHAPITRE 9

Intégrales triples.

Dans ce chapitre, nous définirons l'intégrale triple d'une fonction $f(x, y, z)$ sur une région bornée de \mathbf{R}^3 et nous présenterons quelques-unes de ces propriétés. Ensuite nous verrons comment calculer ces intégrales au moyen d'intégrales itérées. Nous conclurons ce chapitre en discutant des coordonnées cylindriques et sphériques et du théorème de changement de variables pour l'intégrale triple dans ces cas particuliers.

Soient R , une région bornée de \mathbf{R}^3 , c'est-à-dire que R est contenue dans un parallépipède rectangle suffisamment grand, et $f(x, y, z)$ une fonction définie et bornée sur R . On définit l'intégrale de $f(x, y, z)$ sur R , que l'on note

$$\iiint_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

comme étant la limite

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max\{\delta_i \mid 1 \leq i \leq n\} \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i,$$

pour laquelle nous considérons toutes les subdivisions de la région R en n sous-régions: R_1, R_2, \dots, R_n , dont le diamètre de R_i , c'est-à-dire la distance maximale entre deux points quelconques de R_i , est noté δ_i , en y laissant n , le nombre de ces sous-régions devenir de plus en plus grand et le maximum $\max\{\delta_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ des diamètres de ces sous-régions devenir de plus en plus près de zéro; de plus dans cette définition, (x_i, y_i, z_i) peut être n'importe quel point de R_i et ΔV_i est le volume de la sous-région R_i .

Cette limite n'existe pas toujours. Cependant si R est une région bornée, $f(x, y, z)$ est continue sur R et que le bord de R consiste en une réunion finie de surfaces lisses, alors l'intégrale triple $\iiint_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ existe. Dans ce dernier cas, il est possible d'interpréter l'intégrale triple dans le cas où $f(x, y, z) \geq 0$ pour tout point (x, y, z) de R et que l'on considère comme une fonction de densité comme étant la masse de R . Il est aussi possible de vérifier à partir de la définition de l'intégrale que $\iiint_R dx \, dy \, dz$ est égale au volume de R . Dans ce dernier cas, la fonction à intégrer est la fonction constante $f(x, y, z) = 1$ et nous supposons que la région R est bornée et que son bord est une réunion finie de surfaces lisses.

Nous allons maintenant énumérer quelques-unes des propriétés des intégrales triples dans la proposition ci-dessous. Elle est démontrée en utilisant la définition de l'intégrale triple.

Proposition 9.1:

Soient R, R' , deux régions de \mathbf{R}^3 telles que l'intersection $R \cap R'$ de celles-ci est contenue dans les bords de R et R' . Soient $f(x, y, z), g(x, y, z)$ deux fonctions réelles et a, b deux nombres réels. Alors:

a) (règle linéaire) $\iiint_R (a f(x, y, z) + b g(x, y, z)) \, dx \, dy \, dz = a \iiint_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz + b \iiint_R g(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$

b) $\iiint_{R \cup R'} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz + \iiint_{R'} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$

si ces intégrales existent.

Tout comme pour l'intégrale double, il est possible d'évaluer une intégrale triple au moyen d'intégrales itérées. Dans la prochaine proposition, nous allons considérer une première situation et ultérieurement faire l'énumération d'autres situations.

Proposition 9.2:

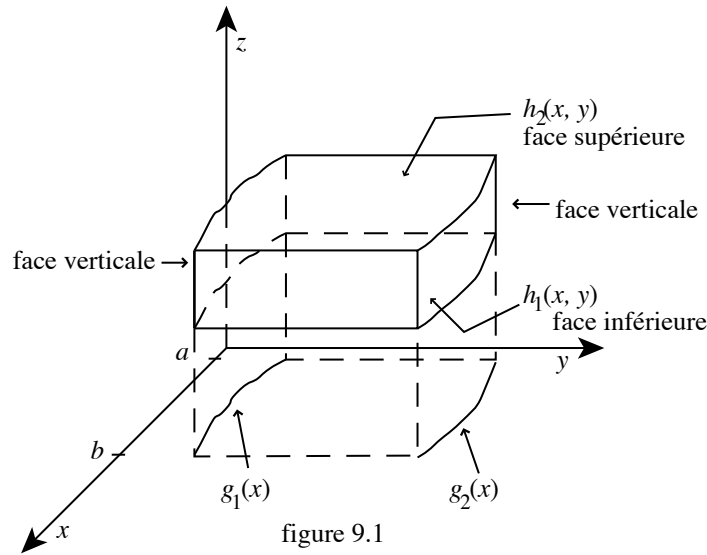
Si la région R est du type suivant:

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$$

pour laquelle $g_1(x), g_2(x)$ sont des fonctions de x telles que $g_1(x) \leq g_2(x)$ pour tout x avec $a \leq x \leq b$ et $h_1(x, y), h_2(x, y)$ sont des fonctions de x et y telles que $h_1(x, y) \leq h_2(x, y)$ pour tout (x, y) avec $a \leq x \leq b$ et $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$. Alors

$$\iiint_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx$$

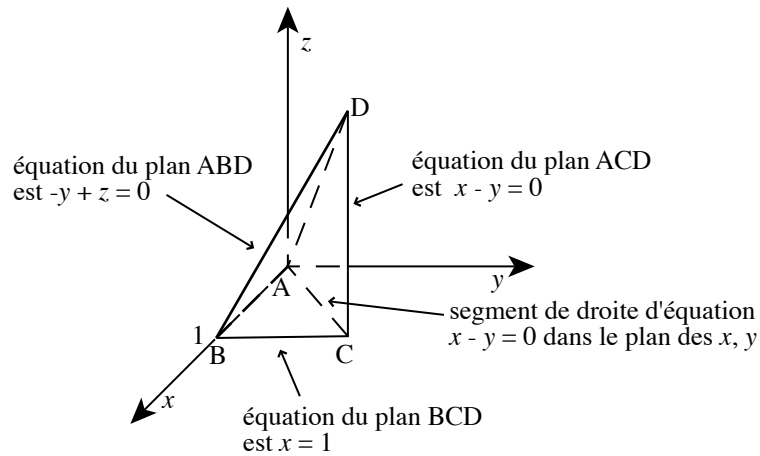
si ces intégrales existent. Nous avons représenté la région R à la figure 9.1.



La preuve de cette proposition est similaire à celle de la proposition 8.2. Elle ne sera pas présentée dans ces notes. Avant de discuter des variantes de cette proposition 9.2, nous allons considérer deux exemples.

Exemple 9.1:

Soit R , la région de \mathbf{R}^3 à l'intérieur du tétraèdre dont les sommets sont $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (1, 1, 0)$ et $D = (1, 1, 1)$. Nous avons représenté la région R à la figure 9.2.



L'équation du plan passant par les trois points A, B et D est $-y + z = 0$. Nous obtenons cette équation en sachant qu'elle sera de la forme $ax + by + cz = d$ et dont a, b, c, d sont à déterminer. Mais par ce que A, B et D appartiennent au plan, leurs coordonnées doivent vérifier cette équation. Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} a(1) + b(0) + c(0) &= d \\ a(0) + b(0) + c(0) &= d \\ a(1) + b(1) + c(1) &= d. \end{aligned}$$

Nous obtenons $a = 0, d = 0$ et $b + c = 0$. Il y a une infinité de solutions. Il nous en faut qu'une seule. Prenons par exemple $c = 1$. Conséquentment $b = -1$ et c'est ainsi que nous obtenons l'équation $-y + z = 0$

pour ce plan. L'équation du plan passant par B, C et D est $x = 1$. L'équation du plan passant par A, C et D est $x - y = 0$. L'équation de la droite dans le plan des x, y passant par A et C est $x - y = 0$. De tout ceci, nous pouvons affirmer que R est une région du type de la proposition 9.2. En effet,

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq y\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \iiint_R z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_0^y z \, dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^x \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=y} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{y^2}{2} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{y^3}{6} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{6} dx = \left[\frac{x^4}{24} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Exemple 9.2:

Evaluons l'intégrale triple $\iiint_R y \, dx \, dy \, dz$ sur la région $R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, (x^2 + y^2) \leq z \leq 1\}$. Cette région est celle contenue dans le premier octant à l'intérieur du parabolôide d'équation $z = x^2 + y^2$ et sous le plan horizontal d'équation $z = 1$. Elle est du type de la proposition 9.2. Nous avons représenté la région R à la figure 9.3.

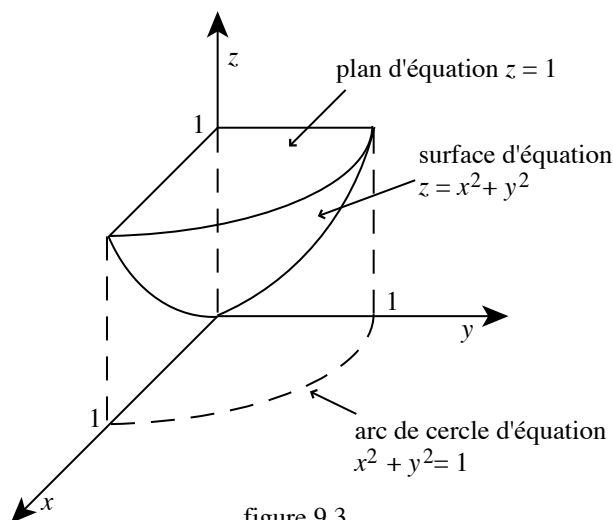


figure 9.3

En effet, $R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, (x^2 + y^2) \leq z \leq 1\}$. Donc

$$\begin{aligned} \iiint_R y \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{x^2+y^2}^1 y \, dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left[yz \right]_{z=x^2+y^2}^{z=1} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (y - y(x^2 + y^2)) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ((1-x^2)y - y^3) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left((1-x^2) \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right)_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{(1-x^2)^2}{2} - \frac{(1-x^2)^2}{4} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 (1-x^2)^2 dx = \frac{1}{4} \int_0^1 (1 - 2x^2 + x^4) dx \\ &= \frac{1}{4} \left(x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

Nous allons énumérer des variantes de la proposition précédente. Essentiellement tout ce qui est différent d'un cas à l'autre, c'est le type de la région d'intégration. Il est préférable non pas de mémoriser ces formules, mais plutôt de les comprendre et de bien les visualiser.

Proposition 9.2':

a) Si la région R est du type suivant:

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq z \leq g_2(x), h_1(x, z) \leq y \leq h_2(x, z)\}$$

pour laquelle $g_1(x), g_2(x)$ sont des fonctions de x telles que $g_1(x) \leq g_2(x)$ pour tout x avec $a \leq x \leq b$ et $h_1(x, z), h_2(x, z)$ sont des fonctions de x et z telles que $h_1(x, z) \leq h_2(x, z)$ pour tout (x, z) avec $a \leq x \leq b$ et $g_1(x) \leq z \leq g_2(x)$. Alors

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x, z)}^{h_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right) dz \right) dx$$

si ces intégrales existent.

b) Si la région R est du type suivant:

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid a \leq y \leq b, g_1(y) \leq x \leq g_2(y), h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$$

pour laquelle $g_1(y), g_2(y)$ sont des fonctions de y telles que $g_1(y) \leq g_2(y)$ pour tout y avec $a \leq y \leq b$ et $h_1(x, y), h_2(x, y)$ sont des fonctions de x et y telles que $h_1(x, y) \leq h_2(x, y)$ pour tout (x, y) avec $a \leq y \leq b$ et $g_1(y) \leq x \leq g_2(y)$. Alors

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \left(\int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy$$

si ces intégrales existent.

c) Si la région R est du type suivant:

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid a \leq y \leq b, g_1(y) \leq z \leq g_2(y), h_1(y, z) \leq x \leq h_2(y, z)\}$$

pour laquelle $g_1(y), g_2(y)$ sont des fonctions de y telles que $g_1(y) \leq g_2(y)$ pour tout y avec $a \leq y \leq b$ et $h_1(y, z), h_2(y, z)$ sont des fonctions de y et z telles que $h_1(y, z) \leq h_2(y, z)$ pour tout (y, z) avec $a \leq y \leq b$ et $g_1(y) \leq z \leq g_2(y)$. Alors

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \left(\int_{h_1(y, z)}^{h_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right) dz \right) dy$$

si ces intégrales existent.

d) Si la région R est du type suivant:

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid a \leq z \leq b, g_1(z) \leq x \leq g_2(z), h_1(x, z) \leq y \leq h_2(x, z)\}$$

pour laquelle $g_1(z), g_2(z)$ sont des fonctions de z telles que $g_1(z) \leq g_2(z)$ pour tout z avec $a \leq z \leq b$ et $h_1(x, z), h_2(x, z)$ sont des fonctions de x et z telles que $h_1(x, z) \leq h_2(x, z)$ pour tout (x, z) avec $a \leq z \leq b$ et $g_1(z) \leq x \leq g_2(z)$. Alors

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{g_1(z)}^{g_2(z)} \left(\int_{h_1(x, z)}^{h_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right) dx \right) dz$$

si ces intégrales existent.

e) Si la région R est du type suivant:

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid a \leq z \leq b, g_1(z) \leq y \leq g_2(z), h_1(y, z) \leq x \leq h_2(y, z)\}$$

pour laquelle $g_1(z), g_2(z)$ sont des fonctions de z telles que $g_1(z) \leq g_2(z)$ pour tout z avec $a \leq z \leq b$ et $h_1(y, z), h_2(y, z)$ sont des fonctions de y et z telles que $h_1(y, z) \leq h_2(y, z)$ pour tout (y, z) avec $a \leq z \leq b$ et $g_1(z) \leq y \leq g_2(z)$. Alors

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{g_1(z)}^{g_2(z)} \left(\int_{h_1(y, z)}^{h_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz$$

si ces intégrales existent.

La preuve de cette proposition est similaire à celle de la proposition 8.2. Elle ne sera pas présentée dans ces notes. Nous allons poursuivre notre présentation d'exemples de l'utilisation d'intégrales itérées pour le calcul d'intégrales triples.

Exemple 9.3:

Soit $R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, (x^2 + y^2) \leq z^2, 1 \leq z \leq 2\}$. R est la région de \mathbf{R}^3 contenue dans le premier octant au-dessus du plan horizontal d'équation $z = 1$, en-dessous du plan d'équation $z = 2$ et à l'intérieur du cône d'équation $x^2 + y^2 = z^2$. Nous avons représenté R dans la figure 9.4.

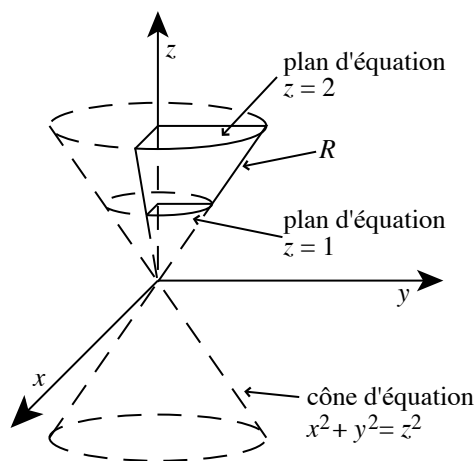


figure 9.4

Considérons l'intégrale triple $\iiint_R 4y^3 dx dy dz$. La région R est d'un des types présentés à la proposition 9.2'. En effet $R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 1 \leq z \leq 2, 0 \leq x \leq z, 0 \leq y \leq \sqrt{z^2 - x^2}\}$. Donc

$$\begin{aligned} \iiint_R 4y^3 dx dy dz &= \int_1^2 \left(\int_0^z \left(\int_0^{\sqrt{z^2 - x^2}} 4y^3 dy \right) dx \right) dz = \int_1^2 \left(\int_0^z \left[y^4 \right]_{y=0}^{y=\sqrt{z^2 - x^2}} dx \right) dz \\ &= \int_1^2 \left(\int_0^z (z^2 - x^2)^2 dx \right) dz = \int_1^2 \left(\int_0^z (z^4 - 2z^2 x^2 + x^4) dx \right) dz \\ &= \int_1^2 \left(z^4 x - \frac{2z^2 x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right)_{x=0}^{x=z} dz = \int_1^2 \left(z^4 z - \frac{2z^2 z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \right) dz \\ &= \frac{8}{15} \int_1^2 z^5 dz = \frac{8}{15} \left[\frac{z^6}{6} \right]_{z=1}^{z=2} = \frac{4}{45} (2^6 - 1^6) = \frac{28}{5} \end{aligned}$$

Exemple 9.4:

Soit R , la région de \mathbf{R}^3 à l'intérieur de l'hexaèdre dont les sommets sont $A = (2, 2, -4), B = (1, 2, -3), C = (2, 4, -6), D = (4, 4, -8), E = (2, 2, -8), F = (1, 2, -6), G = (2, 4, -12)$ et $H = (4, 4, -16)$. Nous avons représenté R à la figure 9.5.

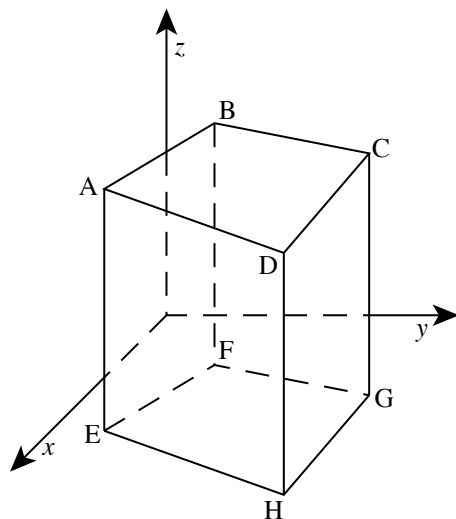


figure 9.5

En procédant comme nous l'avons fait à l'exemple 9.1, nous pouvons déterminer les équations des plans bordant R . L'équation du plan contenant les points A, B, E et F est $y = 2$, celle du plan contenant les points C, D, H et G est $y = 4$, celle du plan contenant les points A, D, E et H est $y - x = 0$, celle du plan contenant les points B, C, F et G est $y - 2x = 0$, celle du plan contenant les points A, B, C et D est $x + y + z = 0$ et finalement celle du plan contenant les points E, F, G et H est $2x + 2y + z = 0$. Déterminons le volume de R . Nous savons que le volume de la région R est $\iiint_R dx dy dz$. La proposition 9.2' est applicable dans ce cas-ci, car

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2 \leq y \leq 4, (y/2) \leq x \leq y, -(2x + 2y) \leq z \leq -(x + y)\}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{Volume de } R &= \int_2^4 \left(\int_{y/2}^y \left(\int_{-(2x+2y)}^{-(x+y)} dz \right) dx \right) dy = \int_2^4 \left(\int_{y/2}^y \left[z \right]_{z=-(2x+2y)}^{z=-(x+y)} dx \right) dy \\ &= \int_2^4 \left(\int_{y/2}^y (x + y) dx \right) dy = \int_2^4 \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_{x=y/2}^{x=y} dy \\ &= \int_2^4 \left(\frac{y^2}{2} + y^2 \right) - \left(\frac{(y/2)^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) dy \\ &= \frac{7}{8} \int_2^4 y^2 dy = \frac{7}{8} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=2}^{y=4} = \frac{7}{8} \left(\frac{4^3 - 2^3}{3} \right) = \frac{49}{3}. \end{aligned}$$

Il y a plusieurs façons de décrire les points de \mathbf{R}^3 . Parmi tous ces systèmes de coordonnées, deux apparaissent souvent; il s'agit des coordonnées cylindriques et des coordonnées sphériques. Nous allons maintenant considérer ces systèmes de coordonnées, ainsi que le théorème de changement de coordonnées pour les intégrales triples dans le cas des changements des coordonnées cartésiennes à ces coordonnées.

Au point (x, y, z) du plan \mathbf{R}^3 , nous pouvons lui associer ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) pour lesquelles r est la distance entre le point (x, y) et l'origine $(0, 0)$ dans le plan des x, y , alors que θ est la mesure (dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) de l'angle formé par la demi-droite des x positifs et la demi-droite commençant à l'origine et passant par le point (x, y) dans le plan des x, y . Finalement z dans les coordonnées cylindriques (r, θ, z) du point (x, y, z) est la composante par rapport à l'axe des z . Nous avons représenté ceci à la figure 9.6.

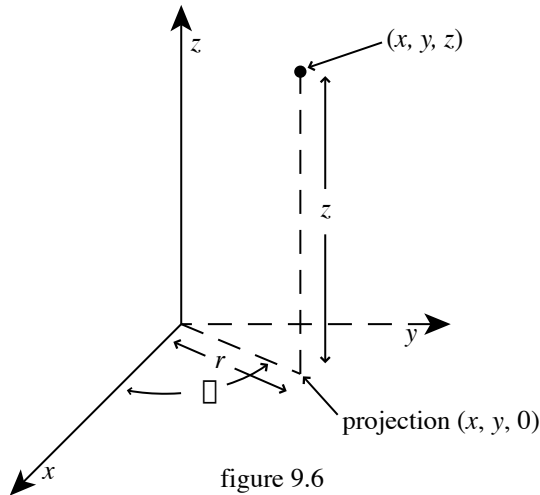


figure 9.6

Ainsi nous avons $0 \leq r$, $0 \leq \theta < 2\pi$ et $z \in \mathbf{R}$. Les changements de coordonnées sont les suivants:

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(y/x), \\ z = z. \end{cases}$$

Ceci est une conséquence simple de la définition de r, θ et z .

Nous pouvons maintenant énoncer une proposition similaire à la proposition 8.3 avec dans ce cas-ci le changement de coordonnées cartésiennes à coordonnées cylindriques.

Proposition 9.3:

Soient R , une région de l'espace des x, y, z , $R' = \{(r, \theta, z) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbf{R} \mid (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \in R\}$, la région correspondante dans l'espace des r, θ, z et une fonction réelle $f : R \rightarrow \mathbf{R}$ telle que l'intégrale triple $\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz$ existe. Alors l'intégrale $\iiint_{R'} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) r dr d\theta dz$ existe et nous avons

$$\iiint_{R'} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) r dr d\theta dz = \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz.$$

Preuve: Celle-ci est similaire à celle de la proposition 8.3 au chapitre précédent. Il s'agit de calculer un petit élément de volume. Ceci est obtenu dans la figure 9.7.

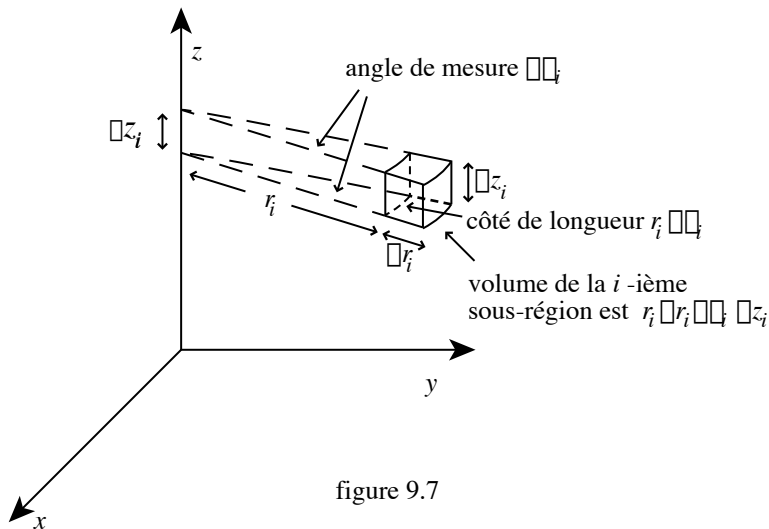


figure 9.7

Cette région représente la i -ième sous-région dans la définition de l'intégrale triple. Son volume est $r_i (\Delta\theta_i) (\Delta r_i) (\Delta z_i)$. Ceci explique la présence du facteur $r dr d\theta dz$ dans l'intégrale du côté gauche de l'égalité.

Exemple 9.5:

Soit $R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$. Cette région R est celle à l'intérieur du cylindre dont l'axe est l'axe des z et de rayon 2, à l'extérieur du cylindre dont l'axe est aussi l'axe des z et de rayon 1, au-dessus du plan d'équation $z = 0$ et en-dessous du plan d'équation $z = 1$. Nous avons représenté cette région à la figure 9.8.

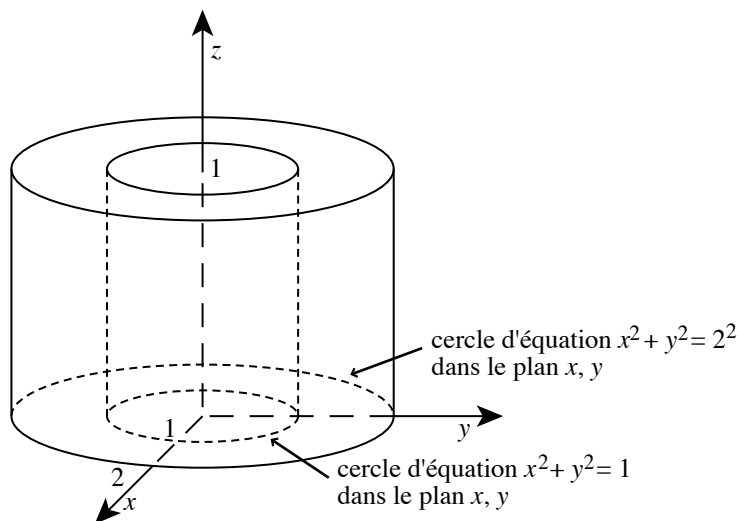


figure 9.8

Evaluons l'intégrale triple $\iiint_R z \exp(x^2 + y^2) dx dy dz$. Nous pouvons utiliser la proposition 9.3 pour évaluer celle-ci. La région R' correspondant à R dans les coordonnées cylindriques sera $R' = \{(r, \theta, z) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1\}$. Noter que $x^2 + y^2 = (r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2 = r^2$. De la proposition 9.3, nous avons

$$\begin{aligned} \iiint_R z \exp(x^2 + y^2) dx dy dz &= \iiint_{R'} z \exp(r^2) r dr d\theta dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 z r \exp(r^2) dr \right) d\theta \right) dz \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{z \exp(r^2)}{2} \right]_{r=1}^{r=2} d\theta \right) dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \frac{z(e^4 - e^1)}{2} d\theta \right) dz \\ &= \frac{(e^4 - e^1)}{2} \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} z d\theta \right) dz = \frac{(e^4 - e)}{2} \int_0^1 \left[z\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dz \\ &= (e^4 - e) \pi \int_0^1 z dz = (e^4 - e) \pi \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1} = \frac{(e^4 - e) \pi}{2}. \end{aligned}$$

Exemple 9.6:

Soit $R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z^2 \leq 4(x^2 + y^2), -2 \leq z \leq 2\}$. R est la région de \mathbf{R}^3 à l'intérieur du cylindre dont l'axe de symétrie est l'axe des z et de rayon 1, entre les deux plans horizontaux d'équation respectivement $z = 2$ et $z = -2$ et à l'extérieur du cône d'équation $z^2 = 4(x^2 + y^2)$. Nous avons représenté cette région à la figure 9.9.

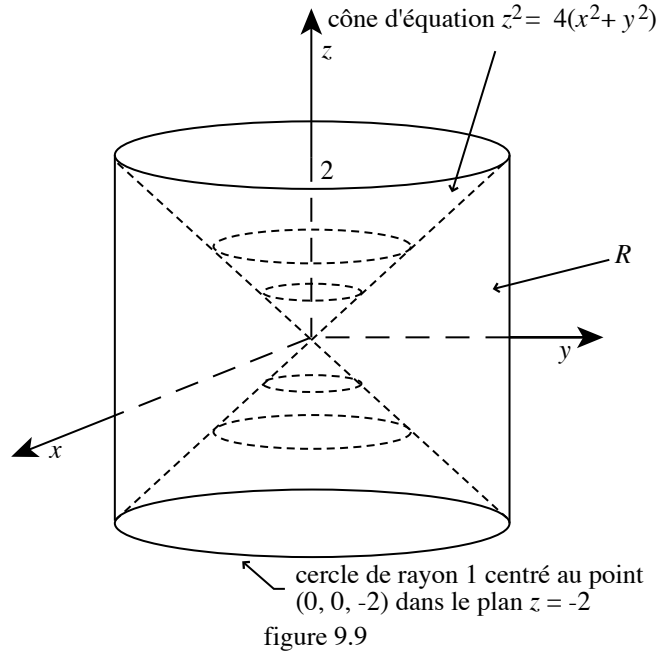


figure 9.9

Evaluons l'intégrale triple $\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ en utilisant les coordonnées cylindriques plutôt que les coordonnées cartésiennes. La région R' correspondant à R en coordonnées cylindriques sera $R' = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, -2r \leq z \leq 2r\}$. Notons aussi que $x^2 + y^2 + z^2 = (r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2 + z^2 = r^2 + z^2$. En utilisant la proposition 9.3 et de ce qui précède, nous obtenons

$$\begin{aligned} \iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz &= \iiint_{R'} (r^2 + z^2) r dr d\theta dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{-2r}^{2r} (r^2 + z^2) r dz \right) dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(r^3 z + \frac{r z^3}{3} \right) \Big|_{z=-2r}^{z=2r} dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{28r^4}{3} dr \right) d\theta \\ &= \frac{28}{3} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^5}{5} \right) \Big|_{r=0}^{r=1} d\theta = \frac{28}{15} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{28}{15} \left(\theta \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{56\pi}{15}. \end{aligned}$$

Au point (x, y, z) du plan \mathbf{R}^3 , nous pouvons aussi lui associer ses coordonnées sphériques (ρ, θ, φ) pour lesquelles ρ est la distance entre le point (x, y, z) et l'origine $(0, 0, 0)$ dans \mathbf{R}^3 , alors que θ est la mesure (dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) de l'angle formé par la demi-droite des x positifs et la demi-droite commençant à l'origine et passant par le point (x, y) dans le plan des x, y et φ est la mesure de l'angle formé par la demi-droite des z positifs et la demi-droite commençant à l'origine et passant par le point (x, y, z) dans \mathbf{R}^3 . Ainsi nous avons $0 \leq \rho, 0 \leq \theta < 2\pi$ et $0 \leq \varphi \leq \pi$. Nous avons représenté ceci dans la figure 9.10.

Les changements de coordonnées sont les suivants:

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = \rho \cos(\varphi) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan(y/x), \\ \varphi = \arctan(\sqrt{x^2 + y^2}/z). \end{cases}$$

Ceci est une conséquence simple de la définition de ρ, θ et φ .

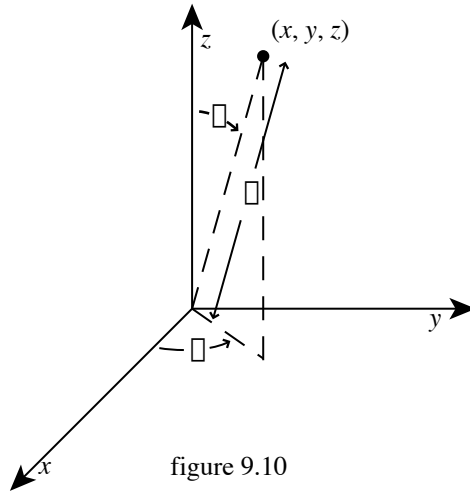


figure 9.10

Nous pouvons aussi énoncer une proposition similaire à la proposition 8.3 avec dans ce cas-ci le changement de coordonnées cartésiennes à coordonnées sphériques.

Proposition 9.4:

Soient R , une région de l'espace des x, y, z , R' l'ensemble des $(\rho, \theta, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi]$ tels que $(\rho \sin(\varphi) \cos(\theta), \rho \sin(\varphi) \sin(\theta), \rho \cos(\varphi)) \in R$, la région correspondante dans l'espace des ρ, θ, φ et une fonction réelle $f : R \rightarrow \mathbf{R}$ telle que l'intégrale triple $\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz$ existe. Alors

$$\iiint_{R'} f(\rho \sin(\varphi) \cos(\theta), \rho \sin(\varphi) \sin(\theta), \rho \cos(\varphi)) \rho^2 \sin(\varphi) d\rho d\theta d\varphi$$

existe et nous avons

$$\iiint_{R'} f(\rho \sin(\varphi) \cos(\theta), \rho \sin(\varphi) \sin(\theta), \rho \cos(\varphi)) \rho^2 \sin(\varphi) d\rho d\theta d\varphi = \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz.$$

Preuve: Celle-ci est similaire à celle de la proposition 8.3 au chapitre précédent. Il s'agit de calculer un petit élément de volume. Ceci est obtenu dans la figure 9.11. Cette région représente la i -ième sous-région dans la définition de l'intégrale triple. Son volume est $\rho_i^2 \sin(\varphi_i) (\Delta\varphi_i) (\Delta\theta_i) (\Delta\rho_i)$. Ceci explique la présence du facteur $\rho^2 \sin(\varphi) d\rho d\theta d\varphi$ dans l'intégrale du côté gauche de l'égalité.

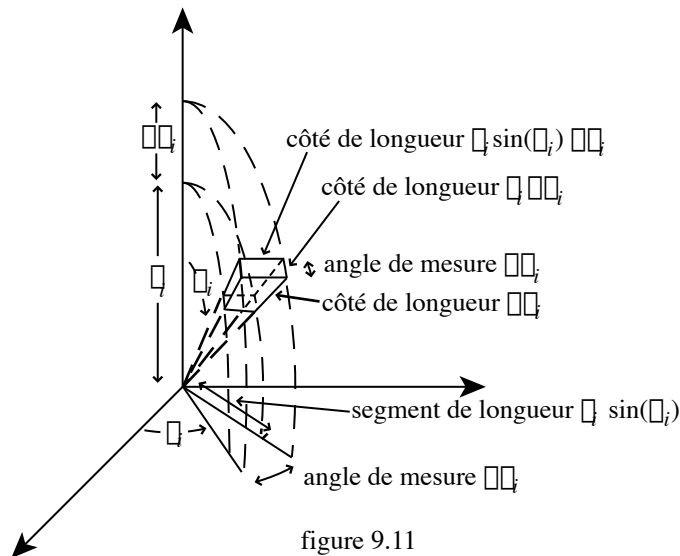


figure 9.11

Exemple 9.7:

Soit $R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Ainsi R est la région de \mathbf{R}^3 contenu à l'intérieur de la sphère centrée à l'origine et de rayon 1, à l'intérieur du cône d'équation $x^2 + y^2 = z^2$ et au-dessus du plan horizontal d'équation $z = 0$. Nous avons représenté R dans la figure 9.12.

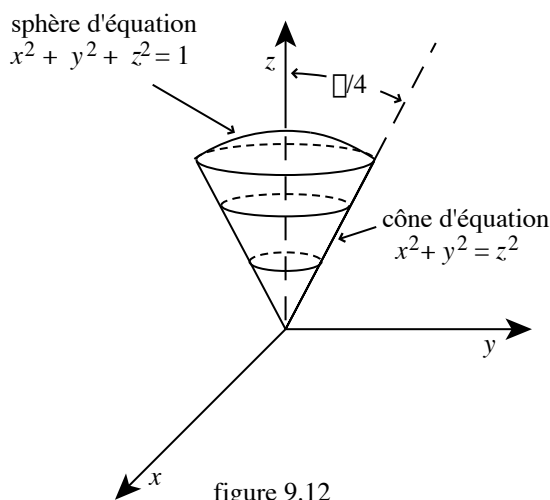


figure 9.12

Evaluons l'intégrale triple $\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} dx dy dz$ en utilisant les coordonnées sphériques. La région R' correspondant à R en coordonnées sphériques sera $R' = \{(\rho, \theta, \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi/4\}$. Notons aussi que $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$. En utilisant la proposition 9.4 et de ce qui précède, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \iiint_R (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} dx dy dz &= \iiint_{R'} (\rho^2)^{3/2} \rho^2 \sin(\varphi) d\rho d\theta d\varphi \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/4} \rho^5 \sin(\varphi) d\varphi \right) d\theta \right) d\rho \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^5 \left[-\cos(\varphi) \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/4} d\theta \right) d\rho \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^5 \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - (-1) \right) d\theta \right) d\rho \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \frac{(2 - \sqrt{2})}{2} \rho^5 d\theta \right) d\rho = \frac{(2 - \sqrt{2})}{2} \int_0^1 \rho^5 \left(\theta \right)_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\rho \\
 &= \frac{2\pi(2 - \sqrt{2})}{2} \int_0^1 \rho^5 d\rho = (2 - \sqrt{2})\pi \left(\frac{\rho^6}{6} \right)_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{(2 - \sqrt{2})\pi}{6}.
 \end{aligned}$$

Exemple 9.8:

Soit $R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq z, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$. Nous avons représenté la région R à la figure 9.13.

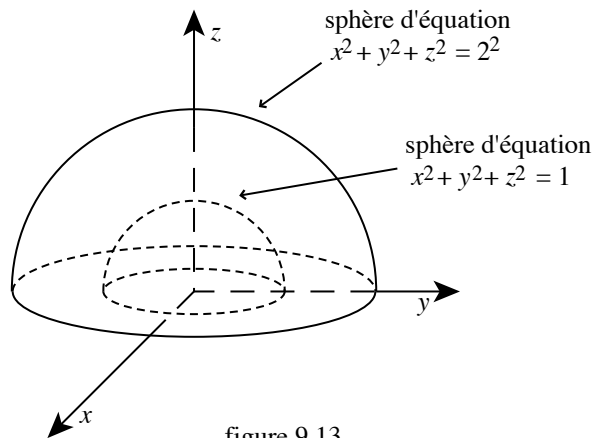


figure 9.13

Evaluons l'intégrale triple $\iiint_R z \, dx \, dy \, dz$. La région R' correspondant à R en coordonnées sphériques sera $R' = \{(\rho, \theta, \varphi) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\}$. En utilisant la proposition 9.4 et de ce qui précède, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \iiint_R z \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{R'} \rho \cos(\varphi) \rho^2 \sin(\varphi) \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 \left(\int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \, d\varphi \right) d\rho \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 \left(\rho^3 \frac{\sin^2(\varphi)}{2} \right) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} d\rho \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 \frac{\rho^3}{2} d\rho \right) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi^4}{4} \right) \Big|_{\rho=1}^{\rho=2} d\theta \\
 &= \frac{15}{8} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{15\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

Exemple 9.9:

Evaluons l'intégrale de l'exemple 9.6 en utilisant les coordonnées sphériques plutôt que les coordonnées cylindriques. Rappelons que nous avons représenté R à la figure 9.9. La région R' correspondant à R en coordonnées sphériques est $R' = \{(\rho, \theta, \varphi) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, \varphi_{\min} \leq \varphi \leq \pi - \varphi_{\min}, 0 \leq \rho \leq 1/\sin(\varphi)\}$. Il est facile de vérifier que φ_{\min} est tel que $\tan(\varphi_{\min}) = 1/2$, $\sin(\varphi_{\min}) = 1/\sqrt{5}$, $\cos(\varphi_{\min}) = 2/\sqrt{5}$, $\sin(\pi - \varphi_{\min}) = 1/\sqrt{5}$ et $\cos(\pi - \varphi_{\min}) = -2/\sqrt{5}$. Pour obtenir ceci, nous utilisons le fait que $\rho \sin(\varphi) = 1$ pour les points sur le

bord cylindrique vertical de notre région. En utilisant la proposition 9.4 et de ce qui précède, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz &= \iiint_{R'} \rho^2 \rho^2 \sin(\varphi) d\rho d\theta d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{\varphi_{\min}}^{\pi - \varphi_{\min}} \left(\int_0^{1/\sin(\varphi)} \rho^4 \sin(\varphi) d\rho \right) d\varphi \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{\varphi_{\min}}^{\pi - \varphi_{\min}} \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_{\rho=0}^{\rho=1/\sin(\varphi)} \sin(\varphi) d\varphi \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{\varphi_{\min}}^{\pi - \varphi_{\min}} \frac{1}{5 \sin^4(\varphi)} d\varphi \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\cos(\varphi)}{3 \sin^3(\varphi)} - \frac{2 \cos(\varphi)}{3 \sin(\varphi)} \right)_{\varphi=\varphi_{\min}}^{\varphi=\pi - \varphi_{\min}} d\theta \\
 &= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \left(\frac{-1(-2/\sqrt{5})}{3(1/\sqrt{5})^3} - \frac{2(-2/\sqrt{5})}{3(1/\sqrt{5})} \right) - \left(\frac{-1(2/\sqrt{5})}{3(1/\sqrt{5})^3} - \frac{2(2/\sqrt{5})}{3(1/\sqrt{5})} \right) d\theta \\
 &= \frac{28}{15} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{28}{15} \left(\theta \right)_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{56\pi}{15}.
 \end{aligned}$$

Dans le calcul précédent, il a fallu utiliser l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{1}{\sin^4(x)} dx = \frac{-\cos(x)}{3 \sin^3(x)} - \frac{2 \cos(x)}{3 \sin(x)} + c.$$

Il est possible d'obtenir ce dernier résultat en intégrant par parties. Noter premièrement que

$$\frac{d}{dx} \left(\cot(x) \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right) = \frac{-1}{\sin^2(x)}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sin^4(x)} dx &= \int \frac{1}{\sin^2(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{-\cos(x)}{\sin(x)} \right) dx \\
 &= \frac{1}{\sin^2(x)} \frac{-\cos(x)}{\sin(x)} - \int \frac{-\cos(x)}{\sin(x)} \frac{(-2) \cos(x)}{\sin^3(x)} dx \\
 &= \frac{-\cos(x)}{\sin^3(x)} - 2 \int \frac{\cos^2(x)}{\sin^4(x)} dx = \frac{-\cos(x)}{\sin^3(x)} - 2 \int \frac{(1 - \sin^2(x))}{\sin^4(x)} dx
 \end{aligned}$$

et conséquemment

$$3 \int \frac{1}{\sin^4(x)} dx = \frac{-\cos(x)}{\sin^3(x)} + 2 \int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = \frac{-\cos(x)}{\sin^3(x)} - 2 \frac{\cos(x)}{\sin(x)} + c.$$

* * *

Exercices 9.1:

Evaluer chacune des intégrales triples suivantes:

a) $\iiint_R (x + y + z) dx dy dz$ où R est l'intérieur du tétraèdre de \mathbf{R}^3 dont les sommets sont $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(0, 2, 0)$ et $(0, 2, 3)$;

- b) $\iiint_R y \, dx \, dy \, dz$ où R est la région de \mathbf{R}^3 telle que $0 \leq x, 0 \leq y$ et $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$;
- c) $\iiint_R z \, dx \, dy \, dz$ où R est l'intérieur du parallépipède de \mathbf{R}^3 dont les sommets sont $(0, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 3, 1), (0, 2, 1), (0, 1, 3), (1, 2, 3), (1, 4, 3)$ et $(0, 3, 3)$;
- d) $\iiint_R (x + y + z) \, dx \, dy \, dz$ où R est l'intérieur du prisme de \mathbf{R}^3 dont les sommets sont $(0, -1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, -1, 0), (1, 0, 1)$ et $(1, 1, 0)$;
- e) $\iiint_R dx \, dy \, dz$ où R est l'intérieur de la pyramide de \mathbf{R}^3 dont les sommets sont $(1, 1, 0), (1, -1, 0), (-1, 1, 0), (-1, -1, 0)$ et $(0, 0, 1)$;
- f) $\iiint_R xy \, dx \, dy \, dz$ où R est la région de \mathbf{R}^3 telle que $0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z \leq 4$ et $x^2 + y^2 \leq z^2$;
- g) $\iiint_R \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$ où R est la région de \mathbf{R}^3 telle que $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 1 \leq z \leq 2$ et $y \geq 0$;
- h) $\iiint_R z \, dx \, dy \, dz$ où R est la région de \mathbf{R}^3 telle que $0 \leq z \leq 1$ et est comprise entre le parabolôide d'équation $z = x^2 + y^2$ et le cône d'équation $z^2 = x^2 + y^2$;
- i) $\iiint_R \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$ où R est la région de \mathbf{R}^3 telle que $0 \leq z \leq 2$ et est comprise entre le parabolôide d'équation $z = x^2 + y^2$ et le cône d'équation $z^2 = x^2 + y^2$;
- j) $\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$ où R est la région de \mathbf{R}^3 telle que $0 \leq z, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ et $z^2 \geq x^2 + y^2$;
- k) $\iiint_R z \, dx \, dy \, dz$ où R est la région de \mathbf{R}^3 telle que $0 \leq z \leq 2$ et $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4$.
- l) $\iiint_R xyz \, dx \, dy \, dz$ où $R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$,
- m) $\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$ où $R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x, y, z \geq 0, (x/a) + (y/b) + (z/c) \leq 1\}$ avec a, b, c des nombres réels > 0 .
- n) $\iiint_R z^3/(y + z)(x + y + z) \, dx \, dy \, dz$ où $R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$.

CHAPITRE 10

Jacobien, changement de coordonnées.

Dans ce chapitre, nous allons premièrement rappeler la définition du déterminant d'une matrice. Nous nous limiterons au cas des matrices d'ordre 2×2 et 3×3 , bien que les résultats énoncés sont vrais dans un cadre plus général. Ensuite nous décrirons le changement de coordonnées pour l'intégrale double, triple et le cas général au moyen du jacobien lui-même défini comme un déterminant.

Étant donnée une matrice A carrée d'ordre $(n \times n)$, c'est-à-dire un tableau de n rangées et n colonnes dont les entrées sont des nombres réels:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

il est possible de lui associer un nombre réel appelé son déterminant et noté $|A|$ ou encore $\det(A)$. Dans ce qui suivra, nous définirons le déterminant de A pour les cas $n = 2, 3$. La définition générale est présentée dans un cours d'algèbre linéaire.

Si A est une matrice carrée d'ordre 2×2 , c'est-à-dire que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

alors son déterminant est $|A| = ad - bc$.

Exemple 10.1:

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right| = (1)(4) - (2)(3) = -2 \quad \text{et} \quad \left| \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right| = (2)(2) - (-1)(1) = 5.$$

Si A est une matrice carrée d'ordre 3×3 , c'est-à-dire que

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

alors son déterminant est $|A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$. Noter qu'il existe un moyen mnémotechnique pour se rappeler cette formule. Il suffit de rajouter à la droite de A ses deux premières colonnes pour obtenir

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}$$

On additionne les produits des éléments sur chacune des diagonales suivantes:

$$\begin{array}{cccccc} a & & b & & c & & a & & b \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ d & & e & & f & & d & & e \\ & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ g & & h & & i & & g & & h \end{array} \quad \text{on a} \quad (aei + bfg + cdh)$$

et on soustrait les produits des éléments sur chacune des diagonales suivantes:

$$\begin{array}{cccccc} a & & b & & c & & a & & b \\ & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ d & & e & & f & & d & & e \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ g & & h & & i & & g & & h \end{array} \quad \text{on a} \quad -(ceg + afh + bdi).$$

Exemple 10.2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = ((1)(5)(9) + (2)(6)(7) + (3)(4)(8)) - ((3)(5)(7) + (1)(6)(8) + (2)(4)(9)) = 0 \quad \text{et}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = ((2)(0)(0) + (3)(2)(3) + (1)(1)(1)) - ((1)(0)(3) + (2)(2)(1) + (3)(1)(0)) = 15.$$

Le déterminant d'une matrice a une relation avec les notions d'aire et de volume. Cette relation suggère un lien possible avec les intégrales multiples. Illustrons cette relation dans le cas des matrices d'ordre 2×2 et 3×3 .

Proposition 10.1:

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

une matrice d'ordre 2×2 . Alors la valeur absolue $|\det(A)|$ du déterminant de A est égale à l'aire du parallélogramme ayant (a, c) et (b, d) comme côtés dans \mathbf{R}^2 . Voir la figure 10.1.

Preuve: Il est facile de démontrer ceci si nous nous rappelons que

$$\cos(\theta) = \frac{(a, c) \cdot (b, d)}{\|(a, c)\| \|(b, d)\|} = \frac{ab + cd}{\sqrt{a^2 + c^2} \sqrt{b^2 + d^2}}.$$

Car alors

$$\begin{aligned} \text{aire du parallélogramme} &= \sqrt{a^2 + c^2} \sqrt{b^2 + d^2} |\sin(\theta)| = \sqrt{a^2 + c^2} \sqrt{b^2 + d^2} \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} \\ &= \sqrt{a^2 + c^2} \sqrt{b^2 + d^2} \sqrt{1 - \frac{(ab + cd)^2}{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)}} \\ &= \sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) - (ab + cd)^2} \\ &= \sqrt{(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + c^2d^2) - (a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2)} \\ &= \sqrt{b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2} = \sqrt{(ad - bc)^2} = |(ad - bc)| = |\det(A)|. \end{aligned}$$

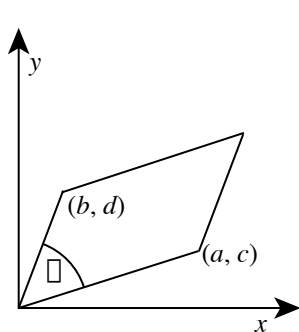


figure 10.1

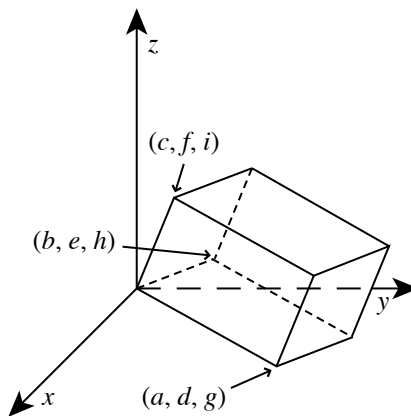


figure 10.2

Proposition 10.1':

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

une matrice d'ordre 3×3 . Alors la valeur absolue $|\det(A)|$ du déterminant de A est égale au volume du parallélépipède ayant (a, d, g) , (b, e, h) et (c, f, i) comme côtés dans \mathbf{R}^3 . Voir la figure 10.2.

La preuve de ceci est tout à fait similaire à celle du cas des matrices d'ordre 2×2 .

Exemple 10.3:

L'aire du parallélogramme dont les côtés sont $(2, 1)$ et $(1, 3)$ sera

$$\left| \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right| = |(2)(3) - (1)(1)| = 5;$$

alors que le volume du parallélépipède dont les côtés sont $(2, -1, 0)$, $(1, 3, 2)$ et $(1, 2, 4)$ sera

$$\left| \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right| = |((2)(3)(4) + (1)(2)(0) + (1)(-1)(2)) - ((0)(3)(1) + (2)(2)(2) + (4)(-1)(1))| = 18.$$

Soit D , un domaine de \mathbf{R}^n . Une transformation de coordonnées (on dit aussi un changement de coordonnées) est une fonction

$$G: D \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

satisfaisant les trois conditions suivantes:

- 1) la dérivée partielle $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ existe et est continue en tout point de D pour tout entier $i, j, 1 \leq i, j \leq n$;
- 2) G est injective sur D , c'est-à-dire si $G(P) = G(P')$ pour $P, P' \in D$, alors $P = P'$;
- 3) le déterminant

$$\det \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \right|_P & \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right|_P & \cdots & \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \right|_P \\ \left. \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right|_P & \left. \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \right|_P & \cdots & \left. \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \right|_P \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial g_n}{\partial x_1} \right|_P & \left. \frac{\partial g_n}{\partial x_2} \right|_P & \cdots & \left. \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \right|_P \end{pmatrix} \neq 0$$

pour tout point $P \in D$.

Ce dernier déterminant sera noté dans la suite de ces notes

$$\left. \frac{\partial(g_1, g_2, \dots, g_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right|_P$$

et est appelé le jacobien du changement de coordonnées au point P .

Exemple 10.4:

Considérons le domaine $D = \{(r, \theta) \in \mathbf{R}^2 \mid r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ et la fonction

$$G: D \longrightarrow \mathbf{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x(r, \theta) \\ y(r, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Alors G est un changement de coordonnées.

Notons premièrement que les dérivées partielles

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta), \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin(\theta),$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta), \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos(\theta).$$

existent et sont continues sur D .

Si $r \cos(\theta) = r' \cos(\theta')$ et $r \sin(\theta) = r' \sin(\theta')$, alors

$$r = \sqrt{(r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2} = \sqrt{(r' \cos(\theta'))^2 + (r' \sin(\theta'))^2} = r'$$

car $r, r' > 0$. De ceci nous obtenons $\cos(\theta) = \cos(\theta')$ et $\sin(\theta) = \sin(\theta')$. Nous pouvons maintenant conclure que $\theta = \theta'$ car $0 \leq \theta, \theta' < 2\pi$. Ainsi G est une fonction injective sur D .

Finalement le jacobien est

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \left| \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} \right| = r \cos^2(\theta) - (-r) \sin^2(\theta) = r \neq 0$$

car $r > 0$ sur D . De ce qui précède, nous pouvons donc affirmer que G est bien un changement de coordonnées. Ce changement est celui des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes.

Exemple 10.5:

Considérons le domaine $D = \{(r, \theta, z) \in \mathbf{R}^3 \mid r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi, z \in \mathbf{R}\}$ et la fonction

$$G: D \longrightarrow \mathbf{R}^3.$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x(r, \theta, z) \\ y(r, \theta, z) \\ z(r, \theta, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{pmatrix}$$

Alors G est un changement de coordonnées dont le jacobien est aussi r . La vérification de ceci est similaire à celle de l'exemple précédent. Ce changement est celui des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes.

Exemple 10.6:

Considérons le domaine $D = \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbf{R}^3 \mid \rho > 0, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 < \varphi < \pi\}$ et la fonction

$$G: D \longrightarrow \mathbf{R}^3.$$

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x(\rho, \theta, \varphi) \\ y(\rho, \theta, \varphi) \\ z(\rho, \theta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ \rho \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \rho \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Alors G est un changement de coordonnées. On note premièrement que les dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \rho} &= \cos(\theta) \sin(\varphi), & \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi), & \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= \rho \cos(\theta) \cos(\varphi), \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} &= \sin(\theta) \sin(\varphi), & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= \rho \cos(\theta) \sin(\varphi), & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= \rho \sin(\theta) \cos(\varphi), \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} &= \cos(\varphi), & \frac{\partial z}{\partial \theta} &= 0, & \text{et } \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= -\rho \sin(\varphi) \end{aligned}$$

existent et sont continues.

Si $\rho \sin(\varphi) \cos(\theta) = \rho' \sin(\varphi') \cos(\theta')$, $\rho \sin(\varphi) \sin(\theta) = \rho' \sin(\varphi') \sin(\theta')$, et $\rho \cos(\varphi) = \rho' \cos(\varphi')$, alors

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{(\rho \sin(\varphi) \cos(\theta))^2 + (\rho \sin(\varphi) \sin(\theta))^2 + (\rho \cos(\varphi))^2} \\ &= \sqrt{(\rho' \sin(\varphi') \cos(\theta'))^2 + (\rho' \sin(\varphi') \sin(\theta'))^2 + (\rho' \cos(\varphi'))^2} = \rho' \end{aligned}$$

car $\rho, \rho' > 0$. De ceci, nous obtenons $\sin(\varphi) \cos(\theta) = \sin(\varphi') \cos(\theta')$, $\sin(\varphi) \sin(\theta) = \sin(\varphi') \sin(\theta')$ et $\cos(\varphi) = \cos(\varphi')$ après simplification par ρ . La dernière équation nous permet d'affirmer que $\varphi = \varphi'$ car $0 < \varphi, \varphi' < \pi$. Finalement de $\sin(\varphi) \cos(\theta) = \sin(\varphi) \cos(\theta')$, $\sin(\varphi) \sin(\theta) = \sin(\varphi) \sin(\theta')$, nous obtenons que $\cos(\theta) = \cos(\theta')$, $\sin(\theta) = \sin(\theta')$ après simplification par $\sin(\varphi) > 0$ car $0 < \varphi < \pi$. De cette dernière observation, nous obtenons que $\theta = \theta'$ car $0 \leq \theta, \theta' < 2\pi$. Ainsi G est une fonction injective sur D .

Finalement le jacobien est

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} &= \left| \begin{pmatrix} \cos(\theta) \sin(\varphi) & -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) & \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & 0 & -\rho \sin(\varphi) \end{pmatrix} \right| \\ &= (-\rho^2 \cos^2(\theta) \sin^3(\varphi) - \rho^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi) \sin(\varphi) + 0) \\ &\quad - (\rho^2 \cos^2(\theta) \cos^2(\varphi) \sin(\varphi) + 0 + \rho^2 \sin^2(\theta) \sin^3(\varphi)) \\ &= -\rho^2 \sin^3(\varphi) - \rho^2 \cos^2(\varphi) \sin(\varphi) = -\rho^2 \sin(\varphi). \end{aligned}$$

Ce changement est celui des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes.

Si nous résumons les résultats obtenus dans les trois exemples précédents, nous avons le tableau suivant:

changement de coordonnées	valeur absolue du jacobien
polaires \rightarrow cartésiennes	r
cylindriques \rightarrow cartésiennes	r
sphériques \rightarrow cartésiennes	$\rho^2 \sin(\varphi)$

Les expressions dans la colonne de droite sont celles que nous avons rencontré lors des changements de variables pour les intégrales doubles et triples. Ceci ne surprendra personne après l'énoncé du théorème du changement de variables pour les intégrales multiples.

Théorème 10.1:

Soient D' , un domaine de \mathbf{R}^n , un changement de coordonnées:

$$\begin{aligned} G: D' &\longrightarrow \mathbf{R}^n, \\ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ x_2(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ \vdots \\ x_n(u_1, u_2, \dots, u_n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$D = G(D')$, l'image du domaine D' , et une fonction réelle

$$\begin{aligned} f: D &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

tels que l'intégrale n -ième

$$\iint \dots \iint_D f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} dx_n$$

existe. Alors l'intégrale n -ième

$$\iint \dots \iint_{D'} f(x_1(u_1, \dots, u_n), x_2(u_1, \dots, u_n), \dots, x_n(u_1, \dots, u_n)) \left| \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} \right| du_1 du_2 \dots du_{n-1} du_n$$

existe et est égale à

$$\iint \dots \iint_D f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} dx_n.$$

Esquisse de la preuve dans le cas où $n = 3$: Nous voulons montrer que

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

où u, v, w est un système de coordonnées, x, y, z un autre système tel que x, y, z sont des fonctions de u, v, w et que nous avons un changement de coordonnées. Nous avons que

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \max\{\delta_i \mid 1 \leq i \leq m\} \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^m f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i, \quad (*)$$

où D est divisé en m sous-régions R_1, R_2, \dots, R_m . Nous choisissons la sous-région R_i de la façon suivante:

$$R_i = \{(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \mid u_i \leq u \leq u_i + \Delta u_i, v_i \leq v \leq v_i + \Delta v_i, w_i \leq w \leq w_i + \Delta w_i\}$$

où $P_i = (u_i, v_i, w_i) \in D'$, $\Delta u_i, \Delta v_i, \Delta w_i > 0$. Posons $x_i = x(P_i), y_i = y(P_i), z_i = z(P_i)$. Nous avons représenté la région R_i à la figure 10.3.

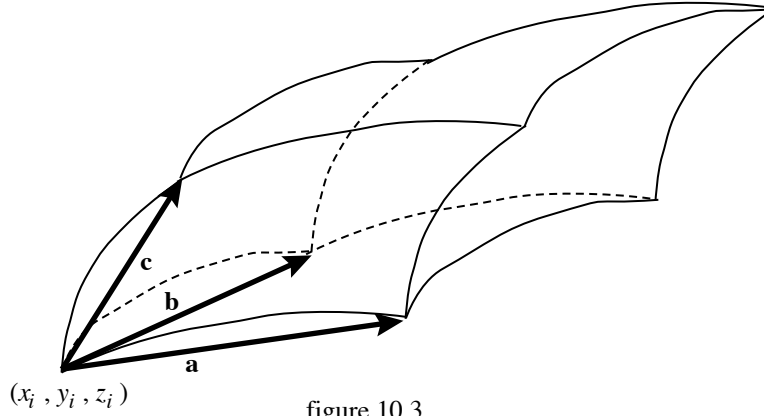


figure 10.3

Donc le volume de R_i est approximativement le volume du parallélépipède ayant comme côtés: **a**, **b**, et **c**. En utilisant le théorème 4.2' d'approximation linéaire, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &\approx \left(\frac{\partial x}{\partial u} \Big|_{P_i}, \frac{\partial y}{\partial u} \Big|_{P_i}, \frac{\partial z}{\partial u} \Big|_{P_i} \right) (\Delta u_i), \\ \mathbf{b} &\approx \left(\frac{\partial x}{\partial v} \Big|_{P_i}, \frac{\partial y}{\partial v} \Big|_{P_i}, \frac{\partial z}{\partial v} \Big|_{P_i} \right) (\Delta v_i) \\ \text{et } \mathbf{c} &\approx \left(\frac{\partial x}{\partial w} \Big|_{P_i}, \frac{\partial y}{\partial w} \Big|_{P_i}, \frac{\partial z}{\partial w} \Big|_{P_i} \right) (\Delta w_i). \end{aligned}$$

Mais le volume du parallélépipède est égal à la valeur absolue du déterminant dont les colonnes sont **a**, **b** et **c**. En substituant ces valeurs approximatives ci-dessus, nous obtenons

$$\Delta V_i \approx \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \Big|_{P_i} \right| (\Delta u_i)(\Delta v_i)(\Delta w_i).$$

En remplaçant dans (*) ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz &= \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \max\{\delta_i \mid 1 \leq i \leq m\} \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^m f(x(P_i), y(P_i), z(P_i)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \Big|_{P_i} \right| (\Delta u_i)(\Delta v_i)(\Delta w_i) \\ &= \iiint_{D'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw \end{aligned}$$

Exemple 10.7:

Evaluons l'intégrale triple $\iiint_D xyz \, dx \, dy \, dz$ où D est le parallélépipède ayant pour sommets les points suivants: $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 2, 1)$, $C = (2, 3, 2)$, $D = (1, 1, 1)$, $A' = (1, 1, 2)$, $B' = (2, 3, 3)$, $C' = (3, 4, 4)$ et $D' = (2, 2, 3)$. Nous avons représenté le domaine D dans la figure 10.4.

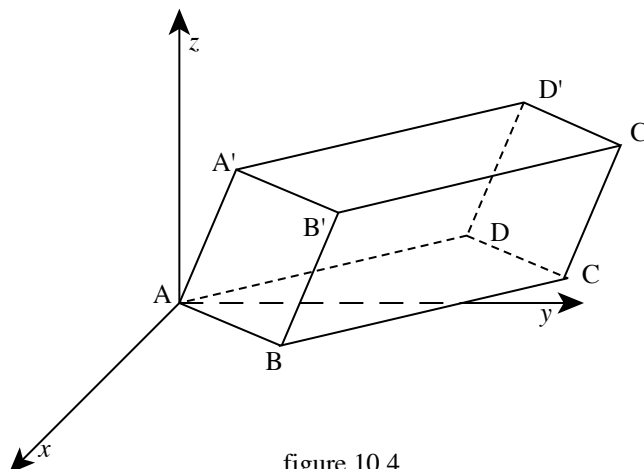


figure 10.4

Le plan contenant les points A, B, C, D a comme équation $z - x = 0$, celle du plan contenant les points A', B', C', D' est $z - x = 1$. Le plan contenant les points A, D, A', D' a comme équation $y - x = 0$, celle du plan contenant B, C, B', C' est $y - x = 1$. Le plan contenant les points A, B, A', B' a comme équation $3x - y - z = 0$, celle du plan contenant C, D, C', D' est $3x - y - z = 1$. Nous pouvons considérer les nouvelles coordonnées:

$$\begin{aligned} u &= -x + y, \\ v &= 3x - y - z, \\ w &= -x + z. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que ceci est un changement de coordonnées. Il faut simplement noter que la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible ou encore que son déterminant n'est pas nul. Dans ces nouvelles coordonnées, D correspond au domaine $D' = \{(u, v, w) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1\}$ et

$$\left\{ \begin{array}{l} x = u + v + w \\ y = 2u + v + w \\ z = u + v + 2w \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right| = -1.$$

Donc de tout ceci et du théorème 10.1, nous avons

$$\begin{aligned} \iiint_D xyz \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{D'} (u + v + w)(2u + v + w)(u + v + 2w) \, | -1 | \, du \, dv \, dw \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 (u + v + w)(2u + v + w)(u + v + 2w) \, dw \right) dv \right) du \\ &= \frac{197}{24}. \end{aligned}$$

Exemple 10.8:

Soit la région R de \mathbf{R}^2 dans le premier quadrant consistant des points (x, y) tels que $1 \leq xy \leq 4$ et $x \leq y \leq 3x$,

c'est-à-dire que $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x, y, 1 \leq xy \leq 4 \text{ et } 1 \leq (y/x) \leq 3\}$. Nous avons représenté R dans la figure 10.5.

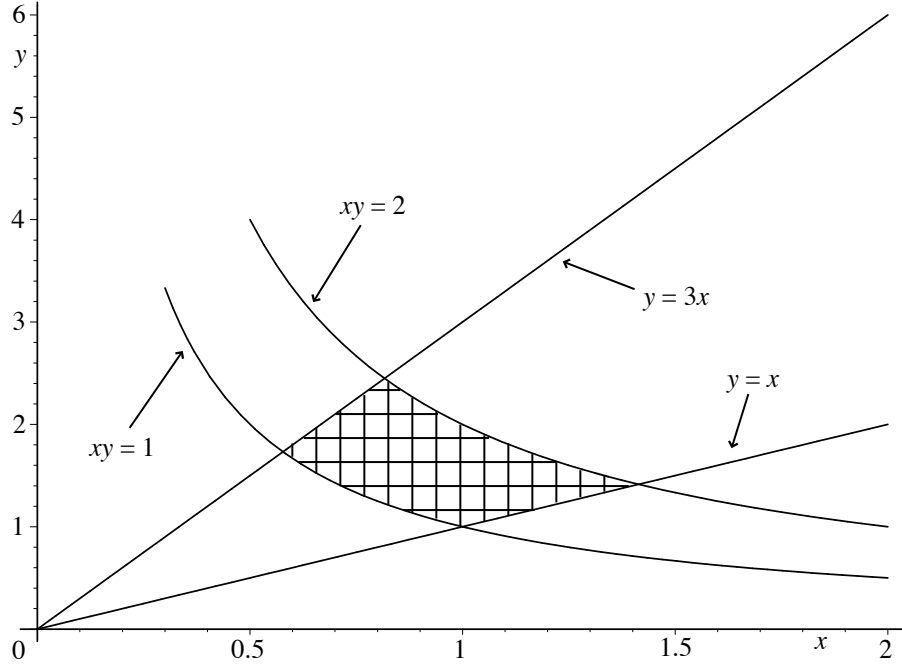


figure 10.5

Evaluons l'intégrale double $\iint_R (x^2 + y^2) dx dy$. Considérons les nouvelles coordonnées:

$$\begin{cases} u = xy \\ v = y/x. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que ceci est un changement de coordonnées pour les points (x, y) dans le premier quadrant. Noter que nous avons aussi

$$\begin{cases} x = u^{1/2}v^{-1/2} \\ y = u^{1/2}v^{1/2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left| \begin{pmatrix} (1/2)u^{-1/2}v^{-1/2} & (-1/2)u^{1/2}v^{-3/2} \\ (1/2)u^{-1/2}v^{1/2} & (1/2)u^{1/2}v^{-1/2} \end{pmatrix} \right| = (1/2)v^{-1}.$$

La région R' correspondant à R dans les coordonnées u, v sera $R' = \{(u, v) \mid 1 \leq u \leq 4, 1 \leq v \leq 3\}$. De ce qui précède et du théorème 10.1, nous avons

$$\begin{aligned} \iint_R (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_{R'} ((u^{1/2}v^{-1/2})^2 + (u^{1/2}v^{1/2})^2)(1/2)v^{-1} du dv \\ &= \iint_{R'} \frac{(uv^{-2} + u)}{2} du dv = \frac{1}{2} \int_1^4 \left(\int_1^3 (uv^{-2} + u) dv \right) du \\ &= \frac{1}{2} \int_1^4 \left(-uv^{-1} + uv \right) \Big|_{v=1}^{v=3} du = \frac{4}{3} \int_1^4 u du = \frac{4}{3} \left(\frac{u^2}{2} \right) \Big|_{u=1}^{u=4} = 10. \end{aligned}$$

Les deux exemples précédents illustrent un des emplois du théorème 10.1. Il s'agit de déterminer un système de coordonnées tel que le domaine D' correspondant à la région d'intégration de départ est plus simple. Dans les deux exemples précédents, ces nouvelles coordonnées correspondent aux bords de notre région d'intégration initial et la nouvelle région d'intégration est alors un cube dans le premier cas et un rectangle dans le second cas.

Exercice 10.1:

Evaluer chacune des intégrales suivantes:

- a) $\iint_R (x+y)^2 dx dy$ où R est l'ensemble des points (x, y) de \mathbf{R}^2 tels que $y > 0$, $1 \leq y-x \leq 2$ et $1 \leq y^2-x^2 \leq 9$,
- b) $\iiint_R (x+y) dx dy dz$ où R est l'intérieur du tétraèdre dans \mathbf{R}^3 dont les sommets sont $(1, 1, 1)$, $(2, 3, 3)$, $(-1, 2, 4)$ et $(0, 2, 5)$,
- c) $\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ où R est la région de \mathbf{R}^3 contenue dans le premier octant et consistant des points (x, y, z) tels que $1 \leq xy \leq 2$, $1 \leq xz \leq 2$ et $1 \leq yz \leq 2$,
- d) $\iiint_R (x + y + z) dx dy dz$ où R est l'intérieur du parallélépipède dont les sommets sont $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(-1, 3, 1)$, $(0, 1, 3)$, $(1, 2, 3)$, $(-1, 4, 4)$, $(0, 4, 1)$ et $(0, 5, 4)$,
- e) $\iint_R xy dx dy$ où R est l'ensemble des points (x, y) dans le premier quadrant de \mathbf{R}^2 tels que $2x \leq y \leq 4x$, $1 \leq xy \leq 9$,
- f) $\iint_R (x^3 + y^3) dx dy$ où $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x, y \geq 0, (x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1\}$,
- g) $\iint_R (1 - (x/a)^2 - (y/b)^2) dx dy$ où $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1\}$.

Exercice 10.2:

Soit la région $R(\alpha)$ du plan à l'intérieur de la parabole d'équation $y = x^2$ et sous la droite d'équation $y = \tan(\alpha)x$ où α est un nombre réel de l'intervalle ouvert $(0, \pi/2)$.

- a) Décrire la région $R'(\alpha)$ correspondant à la région $R(\alpha)$ dans les coordonnées polaires.
- b) Calculer l'intégrale $I(\alpha) = \iint_{R(\alpha)} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ en fonction de $\cos(\alpha)$.

CHAPITRE 11

Applications de l'intégrale multiple.

Ce chapitre sera très bref. Il existe un grand nombre d'applications de l'intégrale multiple. Il suffit de penser aux notions d'espérance et de variance en probabilités ou encore des équations intégrales. Beaucoup de ces applications seront discutées dans d'autres cours. Ici nous n'énumérerons que quelques-unes, surtout reliées à la physique. Plusieurs quantités physiques peuvent être exprimées comme des intégrales multiples. De tels expressions sont fondées sur la définition de l'intégrale comme la limite d'une somme.

Si une quantité de matière est contenue dans une région R de \mathbf{R}^3 et $\delta(x, y, z)$ est la densité par unité de volume au point (x, y, z) , alors le centre de masse $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de celle-ci est défini au moyen d'intégrales. En physique, pour un système de n particules, alors la composante \bar{x} de ce centre par rapport à l'axe des x est définie par l'équation

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

dans laquelle m_i est la masse et x_i est la coordonnée par rapport à l'axe des x de la position de la i -ième particule. On définit \bar{y} et \bar{z} de la même façon. Si la quantité de matière est distribuée continûment dans la région R et $\delta(x, y, z)$ est la densité au point (x, y, z) , alors nous sommes amenés à définir son centre de masse $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ par

$$\bar{x} = \frac{\iiint_R x \delta(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_R \delta(x, y, z) dx dy dz}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_R y \delta(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_R \delta(x, y, z) dx dy dz} \quad \text{et} \quad \bar{z} = \frac{\iiint_R z \delta(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_R \delta(x, y, z) dx dy dz}.$$

Il est aussi possible dans la situation précédente de décrire le moment d'inertie par rapport à un axe. Nous nous limiterons à décrire ce moment par rapport à l'axe des z . En physique, le moment d'inertie d'un système de n particules par rapport à un axe de rotation est défini par l'équation

$$m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2$$

dans laquelle m_i est la masse et r_i est la distance à l'axe donné de la i -ième particule. Si la quantité de matière est distribuée continûment dans la région R et $\delta(x, y, z)$ est la densité au point (x, y, z) , alors le moment d'inertie I par rapport à l'axe des z comme axe de rotation sera

$$I = \iiint_R (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) dx dy dz.$$

Ce moment d'inertie permet de décrire l'énergie cinétique d'un corps rigide qui tourne autour d'un axe avec une vitesse angulaire ω comme $I\omega^2/2$.

Il y a une version 2-dimensionnelle du moment d'inertie. Si R est une région de \mathbf{R}^2 et $\delta(x, y)$ est la densité par unité d'aire au point (x, y) . Alors son moment d'inertie par rapport à l'axe des x est $\iint_R y^2 \delta(x, y) dx dy$.

★ ★ ★

Exercice 11.1:

Soient la région R à l'intérieur du tétraèdre dans \mathbf{R}^3 dont les sommets sont $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ et $(0, 0, 1)$ et la fonction de densité $\delta(x, y, z) = x + y + z$. Déterminer le centre de masse de cette région.

Exercice 11.2:

Déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe des z de la région R constituée des points de \mathbf{R}^3 tels que $z \geq 0$, $(x^2 + y^2 + z^2) \leq 1$ et $3z^2 \geq (x^2 + y^2)$.

Exercice 11.3:

a) Déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe des z de la région R constituée des points de \mathbf{R}^3 tels que $0 \leq z \leq H$, $(x^2 + y^2) \leq R^2$.

b) Déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe des z de la région R constituée des points de \mathbf{R}^3 tels que $-H/2 \leq y \leq H/2$, $(x^2 + z^2) \leq R^2$.

Exercice 11.4:

Soient a et b , deux nombres réels tels que $0 < a < b$. Considérons le tore T engendré par la rotation du cercle d'équation $(y - b)^2 + z^2 = a^2$ autour de l'axe des z . Calculer la masse $\iiint_T \delta(x, y, z) dx dy dz$ de ce tore en sachant que la densité est constante sur les cercles contenus dans des plans parallèles au plan des x, y et dont les centres sont situés sur l'axe des z et qu'en un point A , elle est proportionnelle à la distance de A au centre du méridien qui porte A .

Intégrales impropres, fonctions gamma et bêta et transformée de Laplace.

Dans ce chapitre, nous revenons aux intégrales simples, mais cette fois soit l'intervalle d'intégration, soit la fonction à intégrer, soit les deux ne sont pas bornés. Toutes ces situations seront illustrées. Deux fonctions importantes, la fonction gamma et la fonction bêta, seront définies au moyen d'intégrales impropres. Nous étudierons ces fonctions et quelques-unes de leurs propriétés. La fonction gamma apparaît dans différents contextes en mathématiques, par exemple en théorie des nombres, en probabilité, etc. Nous conclurons ce chapitre en discutant d'une autre intégrale impropre: la transformée de Laplace. A une "bonne" fonction, cette transformée en associe une autre définie au moyen d'une intégrale impropre.

Il y a essentiellement deux types d'intégrales impropres. Dans le premier cas, le domaine d'intégration n'est pas borné. Voyons donc pour débiter ce premier type.

Supposons que $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto f(x)$ est une fonction telle que l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ existe pour tout nombre réel $b, b \geq a$. Si la limite $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ existe, on dit alors que la fonction f est intégrable sur l'intervalle $[a, \infty)$ et on pose

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Supposons que $f : (-\infty, b] \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto f(x)$ est une fonction telle que l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ existe pour tout nombre réel $a, a \leq b$. Si la limite $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$ existe, on dit alors que la fonction f est intégrable sur l'intervalle $(-\infty, b]$ et on pose

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Finalement supposons que la fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est intégrable sur les intervalles $[0, \infty)$ et $(-\infty, 0]$, alors on dit que f est intégrable sur \mathbf{R} et on pose

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^\infty f(x) dx.$$

Dans ce dernier cas, il faut noter que

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c f(x) dx.$$

Cependant que la réciproque est fautive, c'est-à-dire que la limite $\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c f(x) dx$ peut exister, alors que la fonction $f(x)$ n'est pas intégrable sur \mathbf{R} . Pour illustrer cette dernière remarque, il suffit de considérer $f(x) = x$, alors

$$\int_{-c}^c x dx = 0 \quad \text{pour tout } c \geq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c x dx = 0.$$

Mais il est clair que les intégrales $\int_0^\infty x dx$ et $\int_{-\infty}^0 x dx$ n'existent pas.

Considérons quelques exemples de ce premier type d'intégrales impropres.

Exemple 12.1:

Déterminons les nombres réels c pour lesquels l'intégrale $\int_1^\infty x^c dx$ existe et calculons cette dernière.

$$\int_1^b x^c dx = \begin{cases} \left(\frac{x^{c+1}}{(c+1)} \right) \Big|_{x=1}^{x=b} = \frac{b^{c+1}}{(c+1)} - \frac{1}{(c+1)} & \text{si } c \neq -1; \\ \left(\ln(x) \right) \Big|_{x=1}^{x=b} = \ln(b) & \text{si } c = 1. \end{cases}$$

Si $c > -1$, alors

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^c dx = \infty,$$

car $\lim_{b \rightarrow \infty} b^{c+1} = \infty$ étant donné que $c + 1$ est un nombre positif. Si $c = -1$, alors

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-1} dx = \infty,$$

car $\lim_{b \rightarrow \infty} \ln(b) = \infty$. Si $c < -1$, alors

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^c dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{b^{c+1}}{c+1} - \frac{1}{c+1} \right) = \frac{-1}{c+1} \quad \text{car } \lim_{b \rightarrow \infty} b^{c+1} = 0.$$

En résumé, nous avons

$$\int_1^\infty x^c dx = \begin{cases} -1/(c+1) & \text{si } c < -1; \\ \text{n'existe pas} & \text{si } c \geq -1. \end{cases}$$

Par exemple,

$$\int_1^\infty x^{-2} dx = \frac{-1}{(-2+1)} = 1.$$

Exemple 12.2:

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-e^{-x} \right)_{x=0}^{x=b} = \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-b}) = 1.$$

Exemple 12.3:

Montrons que

$$\int_0^\infty \exp(-x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Posons $I = \int_0^\infty \exp(-x^2) dx$. Alors

$$I^2 = \left(\int_0^\infty \exp(-x^2) dx \right) \left(\int_0^\infty \exp(-y^2) dy \right) = \iint_{\text{premier quadrant}} \exp(-(x^2 + y^2)) dx dy.$$

Nous pouvons maintenant utiliser les coordonnées polaires et nous obtenons après ce changement de coordonnées,

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \exp(-r^2) r d\theta dr = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \exp(-r^2) r dr = \frac{\pi}{2} \left(\frac{-\exp(-r^2)}{2} \right)_{r=0}^{r=\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

Donc $I = \sqrt{\pi}/2$, car $I > 0$ et ceci est vrai tout simplement parce que $\exp(-x^2) > 0$ pour tout x .

Exemple 12.4:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{(1+x^2)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\arctan(x) \right)_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctan(b) - \arctan(0)) = \pi/2.$$

Exemple 12.5:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x} dx \quad \text{n'existe pas,}$$

car on a que

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-e^{-x} \right)_{x=a}^{x=0} = \lim_{a \rightarrow -\infty} (-1 + e^{-a}) = \infty.$$

Noter que l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x} dx$ existe, mais pour que $\int_{-\infty}^\infty e^{-x} dx$ existe il faut que les deux intégrales $\int_{-\infty}^0 e^{-x} dx$ et $\int_0^\infty e^{-x} dx$ existent. Ce qui n'est pas le cas pour une de ces intégrales.

Il y a un deuxième type d'intégrales impropres. Dans ce cas, la fonction n'est pas bornée sur la région d'intégration. Considérons plus en détails cette situation.

Supposons que $f : (a, b] \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto f(x)$ est une fonction telle que $\int_c^b f(x) dx$ existe pour tout $c, a < c \leq b$. Si la limite à droite $\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$ existe, on dit alors que f est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$ et on pose

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx.$$

Dans ce cas, nous pourrions avoir $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ et malgré cela être en mesure de définir $\int_a^b f(x) dx$.

Supposons que $f : [a, b) \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto f(x)$ est une fonction telle que $\int_a^c f(x) dx$ existe pour tout $c, a \leq c < b$. Si la limite à gauche $\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$ existe, on dit alors que f est intégrable sur $[a, b]$ et on pose

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx.$$

Dans ce cas, nous pourrions avoir $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$ et malgré cela être en mesure de définir $\int_a^b f(x) dx$.

Supposons que f est une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$, sauf au point c , alors on dit que f est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$ si et seulement si f est intégrable sur les intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$ et dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Considérons quelques exemples de ce deuxième type d'intégrales impropres.

Exemple 12.6:

Déterminons les nombres réels d pour lesquels l'intégrale $\int_0^1 x^d dx$ existe et calculons cette dernière. Notons premièrement que si $d \geq 0$, alors la fonction $f(x) = x^d$ est définie pour tout $x \in [0, 1]$, c'est-à-dire que le cas où l'on a vraiment une intégrale impropre est celui où $d < 0$. Dans ce dernier cas, nous avons $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^d = \infty$ et $f(x) = x^d$ est définie sur $(0, 1]$. Si $d \neq -1$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^d dx &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 x^d dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{d+1}}{d+1} \right]_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{d+1} - \frac{c^{d+1}}{d+1} \right) \\ &= \begin{cases} 1/(d+1), & \text{si } d > -1; \\ \text{n'existe pas} & \text{si } d < -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Si $d = -1$, alors

$$\int_0^1 x^{-1} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 x^{-1} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[\ln(x) \right]_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} -\ln(c) = \infty.$$

En résumé, nous avons

$$\int_0^1 x^d dx = \begin{cases} 1/(d+1), & \text{si } d > -1; \\ \text{n'existe pas} & \text{si } d \leq -1. \end{cases}$$

Exemple 12.7:

Considérons l'intégrale $\int_0^1 \ln(x) dx$. La fonction $\ln(x)$ n'est pas définie à $x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$. Nous avons

$$\int_0^1 \ln(x) dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \ln(x) dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[x \ln(x) - x \right]_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} (c - 1 - c \ln(c)) = -1.$$

Notons que ci-dessus nous utilisons le fait que

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} c \ln(c) = \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{\ln(c)}{(1/c)} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{(1/c)}{(-1/c^2)} = \lim_{c \rightarrow 0^+} -c = 0$$

par la règle de l'Hopital.

Exemple 12.8:

Considérons l'intégrale $\int_{-1}^1 1/(1-x^2) dx$. La fonction $f(x) = 1/(1-x^2)$ n'est pas définie aux deux points: $x = 1$ et $x = -1$ de l'intervalle d'intégration. Notons que

$$\frac{1}{(1-x^2)} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}$$

et que

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(1-x^2)} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{(1-x^2)} dx + \int_0^1 \frac{1}{(1-x^2)} dx.$$

Il nous faut donc considérer ces deux intégrales impropres et pour chacune, il y a un seul point où la fonction à intégrer n'est pas définie. Nous avons

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{(1-x^2)} dx = \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} \right) dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{2(1-x)} dx + \int_{-1}^0 \frac{1}{2(1+x)} dx.$$

La première de ces deux dernières intégrales est une intégrale propre et la seconde est impropre. Nous avons

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{2(1-x)} dx = \left(\frac{-\ln(1-x)}{2} \right)_{-1}^0 = \frac{\ln(2)}{2} \quad \text{et}$$

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{2(1+x)} dx = \lim_{a \rightarrow -1^+} \int_a^0 \frac{1}{2(1+x)} dx = \lim_{a \rightarrow -1^+} \left(\frac{\ln(1+x)}{2} \right)_a^0 = \infty.$$

Donc l'intégrale impropre $\int_{-1}^0 1/(1-x^2) dx$ n'existe pas et conséquemment $\int_{-1}^1 1/(1-x^2) dx$ n'existe pas non plus. Il est aussi possible de vérifier que $\int_0^1 1/(1-x^2) dx$ n'existe pas.

Nous pourrions multiplier les exemples. Mais nous allons plutôt nous concentrer sur quelques fonctions classiques définies au moyen d'intégrales impropres. Pour vérifier que ces fonctions sont bien définies, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 12.1:

- a) Soient $f(x)$ et $g(x)$, deux fonctions définies sur l'intervalle $[a, \infty)$ telles que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \geq a$. Si $\int_a^\infty g(x) dx$ existe, alors $\int_a^\infty f(x) dx$ existe aussi.
- b) Soient $f(x)$ et $g(x)$, deux fonctions définies sur l'intervalle $(a, b]$ telles que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $a < x \leq b$. Si $\int_a^b g(x) dx$ existe, alors $\int_a^b f(x) dx$ existe aussi.

Nous ne démontrerons pas ce résultat. Pour ce faire, il faut faire appel aux définitions des différentes intégrales impropres. Mais nous allons seulement illustrer pourquoi ce lemme doit être valable. Pour a), $\int_a^\infty g(x) dx$ représente l'aire sous la courbe du graphe de $g(x)$ et comme le graphe de $f(x)$ est compris entre l'axe des x et le graphe de $g(x)$, nous avons que l'aire sous le graphe de $f(x)$ sera aussi finie et que $\int_a^\infty f(x) dx$ existe. L'argument est similaire pour b). Nous avons représenté ceci dans les figures 12.1 a) et b).

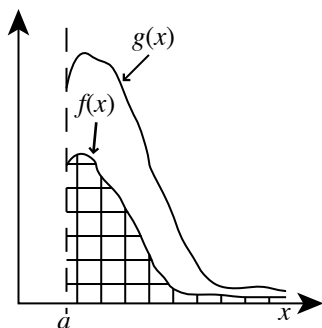


figure 12.1 (a)

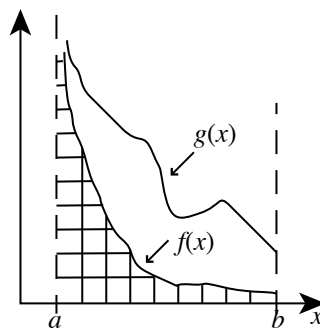


figure 12.1 (b)

Proposition 12.1:

L'intégrale impropre $\int_0^\infty e^{-x}x^{y-1} dx$ existe pour tout $y > 0$.

Preuve: Si $y \geq 1$, alors l'intégrale est une intégrale impropre du premier type, car la fonction $f(x) = e^{-x}x^{y-1}$ est bien définie sur l'intervalle $[0, \infty)$. Notons que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x/2}x^{y-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{y-1}}{e^{x/2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(y-1)x^{y-2}}{(1/2)e^{x/2}} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(y-1)(y-2)\dots(y-k+1)x^{y-k}}{(1/2)^{k-1}e^{x/2}} = 0$$

en utilisant la règle de l'Hopital, si nécessaire, jusqu'à ce que $y-k \leq 0$. Il existe donc une constante M telle que $0 \leq e^{-x/2}x^{y-1} \leq M$ pour tout $x \in [0, \infty)$. Après multiplication par $e^{-x/2}$, nous obtenons l'inégalité $0 \leq e^{-x}x^{y-1} \leq Me^{-x/2}$ pour tout $x \in [0, \infty)$. Nous pouvons noter que

$$\int_0^\infty Me^{-x/2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b Me^{-x/2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[(-2)Me^{-x/2} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (2M - 2Me^{-b/2}) = 2M.$$

De ce qui précède et du lemme 12.1 a), nous avons que $\int_0^\infty e^{-x}x^{y-1} dx$ existe si $y \geq 1$. Si $0 < y < 1$, alors l'intégrale est une intégrale impropre du premier et deuxième type, car la fonction $f(x) = e^{-x}x^{y-1}$ n'est pas définie à $x = 0$. En effet, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{y-1}e^{-x} = \infty$. Donc $\int_0^\infty e^{-x}x^{y-1} dx$ existe si et seulement si $\int_1^\infty e^{-x}x^{y-1} dx$ et $\int_0^1 e^{-x}x^{y-1} dx$ existent. La première de ces deux dernières intégrales est du premier type, alors que le second est du deuxième type. Pour ce qui est de l'intégrale $\int_1^\infty e^{-x}x^{y-1} dx$, il suffit de procéder comme dans le cas $y \geq 1$. En effet, il existe une constante M telle que $0 \leq e^{-x/2}x^{y-1} \leq M$ pour tout $x \geq 1$. Donc $0 \leq e^{-x}x^{y-1} \leq Me^{-x/2}$ pour tout $x \geq 1$ et $\int_1^\infty e^{-x}x^{y-1} dx$ existe, parce que $\int_1^\infty e^{-x/2} dx$ existe et à cause du lemme 12.1 a). Pour ce qui est de l'intégrale $\int_0^1 e^{-x}x^{y-1} dx$, il faut noter que

$$0 \leq e^{-x}x^{y-1} = \frac{x^{y-1}}{e^x} \leq x^{y-1} \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Parce que $y-1 > -1$ et à cause de l'exemple 12.6, nous avons que $\int_0^1 x^{y-1} dx$ existe. En utilisant le lemme 12.1 b) et ce qui précède, nous avons que l'intégrale $\int_0^1 e^{-x}x^{y-1} dx$ existe si $0 < y < 1$ et conséquemment $\int_0^\infty e^{-x}x^{y-1} dx$ existe pour tout $y > 0$.

Cette intégrale présentée dans la proposition 12.1 est la fonction gamma. Plus exactement la fonction gamma est

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-x}x^{y-1} dx$$

pour $y > 0$. Comme nous venons de le vérifier cette intégrale impropre existe. Nous verrons plus tard comment prolonger la fonction gamma $\Gamma(y)$ pour des nombres réels négatifs.

Dans les figures 12.2 et 12.3, nous avons tracé les graphes de $\Gamma(y)$ et de $1/\Gamma(y)$ pour $y, -4 < y < 4$.

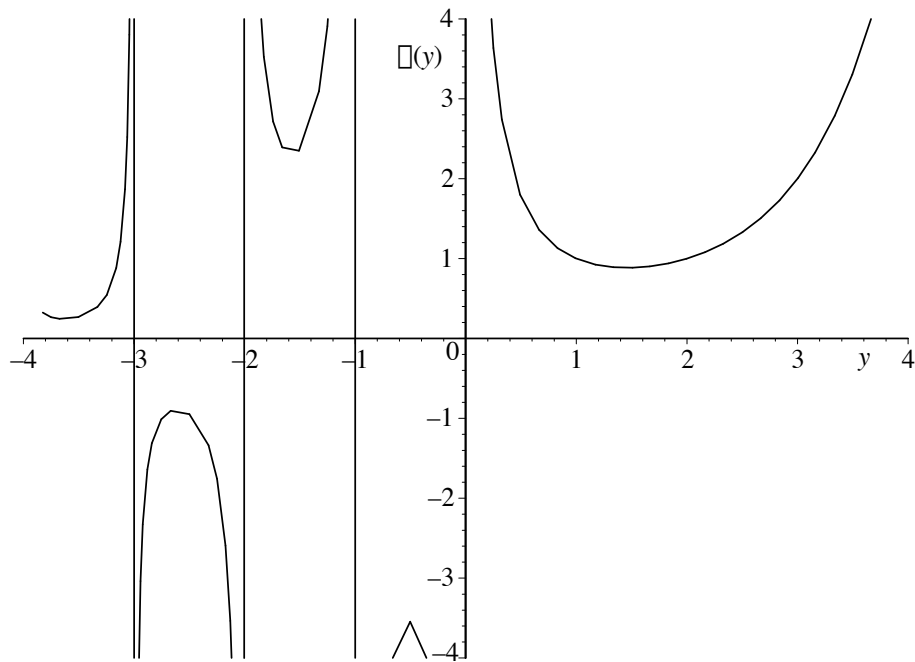


figure 12.2

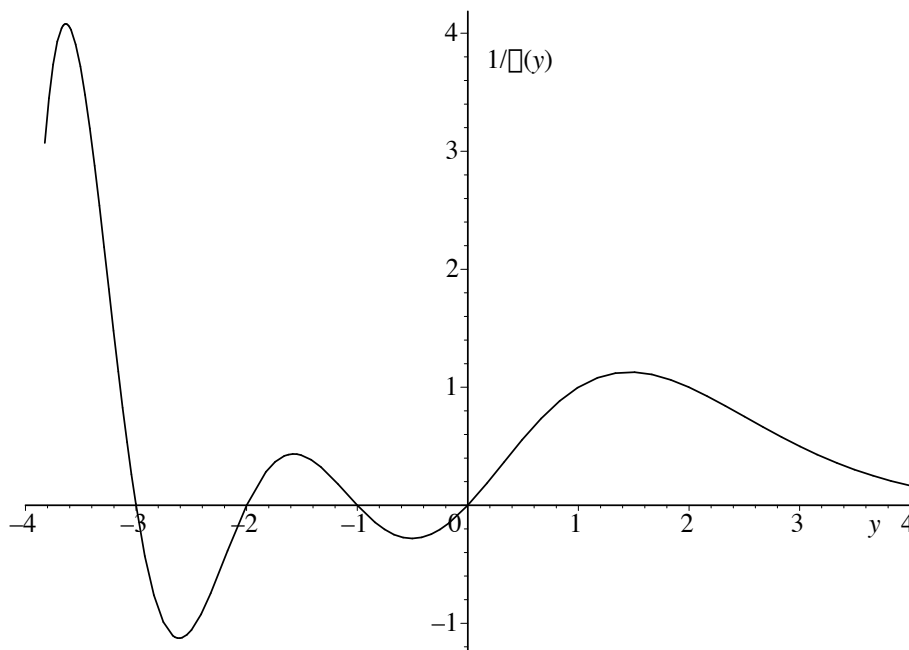


figure 12.3

Proposition 12.2 (Equation fonctionnelle de Γ):

Si $y > 0$, alors $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$

Preuve: Si $0 < a < b$, alors en intégrant par parties nous avons que

$$\int_a^b e^{-x} x^y dx = \left[x^y (-e^{-x}) \right]_a^b - \int_a^b (-e^{-x}) y x^{y-1} dx \quad \text{où} \quad \begin{cases} u = x^y & du = yx^{y-1} dx \\ dv = e^{-x} dx & v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$= \frac{a^y}{e^a} - \frac{b^y}{e^b} + y \int_a^b e^{-x} x^{y-1} dx. \quad (*)$$

Notons que

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{a^y}{e^a} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^y}{e^b} = 0.$$

Dans le cas de cette dernière limite, il suffit de procéder en utilisant la règle de l'Hopital comme dans la preuve de la proposition 12.1; alors que pour la première limite, il est nécessaire d'utiliser le fait que $y > 0$. En laissant $a \rightarrow 0^+$ et $b \rightarrow \infty$ dans (*) et en utilisant ce qui précède, nous obtenons

$$\int_0^\infty e^{-x} x^y dx = y \int_0^\infty e^{-x} x^{y-1} dx,$$

c'est-à-dire que $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$ pour $y > 0$.

Cette dernière propriété nous permet de prolonger la fonction gamma $\Gamma(y)$ pour tous les nombres réels y sauf les entiers non positifs. Il suffit de procéder de la façon suivante: si $-1 < y < 0$, alors on pose $\Gamma(y) = \Gamma(y+1)/y$ car alors $y+1 > 0$; ensuite si $-2 < y < -1$, alors on pose encore $\Gamma(y) = \Gamma(y+1)/y$ dans laquelle le numérateur n'est autre que le prolongement de Γ ; et on continue ce processus. Il faut noter que $\Gamma(y)$ n'est pas défini si y est un entier non positif. En effet, $\lim_{y \rightarrow n^+} \Gamma(y) = \infty$ et $\lim_{y \rightarrow n^-} \Gamma(y) = -\infty$ si n est un entier pair et $n \leq 0$; alors que $\lim_{y \rightarrow n^+} \Gamma(y) = -\infty$ et $\lim_{y \rightarrow n^-} \Gamma(y) = \infty$ si n est un entier impair et $n \leq -1$.

Proposition 12.3:

a) $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$;

b) Si $n \in \mathbf{N}$, alors $\Gamma(n+1) = n!$;

c) Si $n \in \mathbf{N}$, alors $\Gamma(n + (1/2)) = ((2n)! \sqrt{\pi}) / (4^n n!)$

Preuve: a) Pour la première équation, nous avons

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} x^{(1-1)} dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-e^{-x} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-b}) = 1.$$

Pour la seconde équation, nous avons

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-x} x^{(1/2)-1} dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{-1/2} dx.$$

Maintenant si $0 < a < b$, nous avons après un changement de variables

$$\int_a^b e^{-x} x^{-1/2} dx = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \exp(-u^2) 2 du \quad \text{où} \quad \begin{cases} u = x^{1/2} \\ du = (1/2)x^{-1/2} dx \end{cases}$$

Si $a \rightarrow 0^+$ et $b \rightarrow \infty$, alors nous obtenons

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{-1/2} dx = 2 \int_0^\infty \exp(-u^2) du = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

à cause de l'exemple 12.3. On a donc $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

b) Par l'équation fonctionnelle, nous avons $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$. Nous allons montrer la formule $\Gamma(n+1) = n!$ par récurrence sur n . Si $n = 0$, alors $\Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1 = 0!$ par a). Supposons la formule vérifiée pour $n-1$ et considérons le cas n , c'est-à-dire que nous supposons que $\Gamma((n-1)+1) = \Gamma(n) = (n-1)!$ est vérifié, alors $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$. Donc b) est démontré.

c) Nous allons aussi démontrer la formule $\Gamma(n+(1/2)) = ((2n)! \sqrt{\pi}) / (4^n n!)$ par récurrence sur n . Si $n = 0$, alors $\Gamma(0+(1/2)) = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} = ((2 \cdot 0)! \sqrt{\pi}) / (4^0 0!)$ par a). Supposons la formule vérifiée pour $(n-1)$ et considérons n , c'est-à-dire que nous supposons que $\Gamma((n-1)+(1/2)) = ((2(n-1))! \sqrt{\pi}) / (4^{n-1} (n-1)!)$ est vérifié, alors

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{(2(n-1))! \sqrt{\pi}}{4^{n-1} (n-1)!} \\ &= \frac{(2n-1)}{2} \frac{(2n-2)! \sqrt{\pi}}{4^{n-1} (n-1)!} = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)! \sqrt{\pi}}{(2n) 2 (4^{n-1}) (n-1)!} = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}. \end{aligned}$$

Donc c) est démontré.

De ce qui précède, nous avons donc la table suivante:

$y =$	$1/2$	1	$3/2$	2	$5/2$	3	$7/2$	4	$9/2$	5	\dots
$\Gamma(y) =$	$\sqrt{\pi}$	1	$\sqrt{\pi}/2$	1	$3\sqrt{\pi}/4$	2	$15\sqrt{\pi}/8$	6	$105\sqrt{\pi}/16$	14	\dots

Il existe un lien entre la fonction gamma et la fonction zêta de Riemann. Rappelons que la fonction zêta de Riemann est définie pour $s > 1$ par l'équation

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Nous n'avons pas discuté de convergence de séries dans ce cours. Mais il est possible de montrer que la somme infinie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ est bien définie si $s > 1$. Par exemple,

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

La fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$ est un outil essentiel pour étudier les nombres premiers et leur distribution. La relation entre $\zeta(s)$ et les nombres premiers est donnée par le produit infini

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{(1 - p^{-s})}$$

dans lequel p parcourt l'ensemble des nombres premiers. Il est possible de définir la fonction zêta pour d'autres nombres que des nombres réels supérieurs à 1, mais nous ne discuterons pas de ceci. Nous nous limiterons à décrire une représentation intégrale de la fonction zêta.

Proposition 12.4 (Représentation intégrale de $\zeta(s)$):

Si $s > 1$, alors

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{(e^x - 1)} dx.$$

Preuve: Dans ce qui suit, on suppose que $s > 1$. Dans l'intégrale impropre définissant la fonction gamma, nous allons effectuer un changement de variables.

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} (nu)^{s-1} e^{-nu} n du \quad \text{où} \begin{cases} x = nu \\ dx = n du \end{cases} \quad \text{et } n \in \mathbf{N}, n > 0 \\ &= n^s \int_0^{\infty} u^{s-1} e^{-nu} du. \end{aligned}$$

On a donc

$$n^{-s} \Gamma(s) = \int_0^\infty u^{s-1} e^{-nu} du.$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty n^{-s} \Gamma(s) &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty u^{s-1} e^{-nu} du = \int_0^\infty u^{s-1} \left(\sum_{n=1}^\infty e^{-nu} \right) du \\ &= \int_0^\infty \frac{u^{s-1} e^{-u}}{(1 - e^{-u})} du = \int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{(e^u - 1)} du. \end{aligned}$$

Noter que l'égalité entre le terme le plus à droite de la première ligne d'égalités ci-dessus avec son prédécesseur n'est pas si évidente et sa preuve nécessite l'étude de la convergence de la série et de l'intégrale et fait partie d'un cours d'analyse. Nous avons aussi utilisé le résultat suivant: $\sum_{n=1}^\infty v^n = v/(1 - v)$ si v est tel que $|v| < 1$.

Il est possible de vérifier que la fonction gamma $\Gamma(y)$ est continue sur l'intervalle $(0, \infty)$ et son prolongement est aussi continu sur $\mathbf{R} \setminus \{n \in \mathbf{Z} \mid n \leq 0\}$. Il est aussi possible de dériver la fonction gamma.

Proposition 12.5:

La dérivée de la fonction gamma est

$$\Gamma'(y) = \int_0^\infty e^{-x} x^{y-1} \ln(x) dx.$$

Preuve:

$$\Gamma'(y) = \frac{d}{dy} \int_0^\infty e^{-x} x^{y-1} dx = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{-x} x^{y-1} \right) dx = \int_0^\infty e^{-x} \frac{\partial(x^{y-1})}{\partial y} dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{y-1} \ln(x) dx.$$

Noter que l'égalité entre le troisième terme de ces égalités ci-dessus avec son prédécesseur n'est pas si évidente et sa preuve nécessite l'étude de la convergence des intégrales et fait partie d'un cours d'analyse.

Il est possible de montrer que la n -ième dérivée de Γ est

$$\Gamma^{(n)}(y) = \int_0^\infty e^{-x} x^{y-1} (\ln(x))^n dx.$$

Proposition 12.6:

L'intégrale $\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ existe pour tout $p, q > 0$.

Preuve: Notons premièrement que si $p, q \geq 1$, alors l'intégrale ci-dessus est une intégrale propre. Par contre si $0 < p < 1$ ou encore $0 < q < 1$, alors nous avons affaire à une intégrale impropre. Si $0 < p < 1$ et $q \geq 1$, alors $x^{p-1} (1-x)^{q-1} \leq x^{p-1}$ pour tout $x \in (0, 1]$, car $0 \leq (1-x)^{q-1} \leq 1$. En utilisant le lemme 12.1 b) et, comme nous l'avons vu à l'exemple 12.6, $\int_0^1 x^{p-1} dx$ existe, alors nous obtenons que $\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ existe. Si $p \geq 1$ et $0 < q < 1$, alors $x^{p-1} (1-x)^{q-1} \leq (1-x)^{q-1}$ pour tout $x \in [0, 1)$, car $0 \leq x^{p-1} < 1$. En utilisant une variante du lemme 12.1 b), et parce que $\int_0^1 (1-x)^{q-1} dx$ existe, alors nous obtenons que $\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ existe. Finalement si $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$, alors la fonction $x^{p-1} (1-x)^{q-1}$ n'est pas définie aux deux extrémités de l'intervalle $[0, 1]$. Il faut considérer séparément ces deux cas. Nous avons donc

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \int_0^{1/2} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

et il nous faut vérifier que ces deux intégrales impropres existent. Notons premièrement qu'il existe un nombre réel positif M tel que $0 \leq (1-x)^{q-1} \leq M$ pour tout x tel que $0 \leq x \leq (1/2)$. De ceci, nous avons $0 \leq x^{p-1} (1-x)^{q-1} \leq M x^{p-1}$ si $0 \leq x \leq (1/2)$ et comme l'intégrale $\int_0^{1/2} M x^{p-1} dx$ existe, nous obtenons que $\int_0^{1/2} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ existe en utilisant le lemme 12.1 b). Pour ce qui est de l'autre intégrale, il faut noter qu'il existe un nombre réel positif N tel que $0 \leq x^{p-1} \leq N$ pour tout x tel que $(1/2) \leq x \leq 1$. De ceci, nous avons $0 \leq x^{p-1} (1-x)^{q-1} \leq N(1-x)^{q-1}$ si $(1/2) \leq x \leq 1$ et comme l'intégrale $\int_{1/2}^1 N(1-x)^{q-1} dx$

existe, nous obtenons que $\int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$ existe en utilisant le lemme 12.1 b). La proposition est donc démontrée.

Cette intégrale présentée à la proposition 12.6 est la fonction bêta. Plus exactement la fonction bêta est la fonction de deux variables définie par

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

pour $p, q > 0$. Comme nous venons de le vérifier, cette intégrale impropre existe. Nous pourrions énumérer quelques propriétés de cette fonction, par exemple $B(p, q) = B(q, p)$, etc. Nous n'allons démontrer qu'une seule propriété de cette fonction, c'est sa relation avec la fonction gamma.

Proposition 12.7:

Soient p, q deux nombres réels positifs. Alors

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Preuve:

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx \right) \left(\int_0^\infty e^{-y} y^{q-1} dy \right) \\ &= \iint_{\text{premier quadrant}} x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy. \end{aligned}$$

Soit D le premier quadrant. Nous allons maintenant évaluer cette dernière intégrale double en utilisant un changement de coordonnées. Considérons les nouvelles coordonnées

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x/(x + y). \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que ceci est un changement de coordonnées pour les points de D . Notons aussi que

$$\begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left| \begin{pmatrix} v & u \\ (1-v) & -u \end{pmatrix} \right| = -uv - (1-v)u = -u.$$

De même que le domaine D' correspondant à D dans les coordonnées u, v est $D' = \{(u, v) \mid 0 \leq u, 0 \leq v \leq 1\}$. Par le théorème 10.1, nous avons

$$\begin{aligned} \iint_D x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy &= \iint_{D'} (uv)^{p-1} (u(1-v))^{q-1} e^{-u} | -u | du dv \\ &= \iint_{D'} u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} e^{-u} du dv \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^1 u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} e^{-u} dv \right) du \\ &= \left(\int_0^\infty u^{p+q-1} e^{-u} du \right) \left(\int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv \right) = \Gamma(p+q) B(p, q). \end{aligned}$$

Parce que $\Gamma(p+q) > 0$, nous pouvons donc diviser par ce nombre et ainsi terminer la preuve de cette proposition.

Nous pourrions poursuivre notre étude des fonctions gamma et bêta. Mais pour conclure ce chapitre nous étudierons brièvement la transformée de Laplace. Il est souvent utile d'associer à une fonction $f(x)$ définie sur \mathbf{R} une transformée intégrale $g(y) = \int_{-\infty}^\infty K(x, y) f(x) dx$, c'est-à-dire une nouvelle fonction d'une

nouvelle variable. Bien entendu l'intégrale impropre définissant $g(y)$ n'existe pas toujours, mais pour certaines fonctions $f(x)$, elle a un sens. Les exemples les plus connus de telles transformations sont les suivants:

Transformée de Fourier exponentielle:	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(x) dx$
Transformée de Fourier cosinus:	$\int_0^{\infty} \cos(xy) f(x) dx$
Transformée de Fourier sinus:	$\int_0^{\infty} \sin(xy) f(x) dx$
Transformée de Laplace:	$\int_0^{\infty} e^{-xy} f(x) dx$
Transformée de Mellin:	$\int_0^{\infty} x^{y-1} f(x) dx$

Nous étudierons seulement la transformée de Laplace. Il est possible de montrer que si $\int_0^{\infty} e^{-cx} |f(x)| dx$ existe, alors $\int_0^{\infty} e^{-xy} |f(x)| dx$ existe pour tout y tel que $y \geq c$. Nous noterons la fonction $F(y) = \int_0^{\infty} e^{-xy} f(x) dx$ pour $y > c$ par $L(f)$. Cette transformée est la transformée de Laplace de f . Le tableau suivant présente quelques-unes des transformées de Laplace de fonctions usuelles:

$f(x)$	$L(f)(y) = F(y)$	Intervalle de définition de F
e^{ax}	$1/(y - a)$	$y > a$
$\cos(ax)$	$y/(y^2 + a^2)$	$y > 0$
$\sin(ax)$	$a/(y^2 + a^2)$	$y > 0$
$x^p e^{ax}$ avec $p > 0$	$\Gamma(p + 1)/(y - a)^{p+1}$	$y > a$

Il est facile de démontrer ces formules. Par exemple, si $f(x) = x^p e^{ax}$, alors

$$\begin{aligned}
 F(y) &= \int_0^{\infty} x^p e^{ax} e^{-xy} dx = \int_0^{\infty} x^p e^{-x(y-a)} dx \\
 &= \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{y-a} \right)^p e^{-u} \frac{1}{y-a} du \quad \text{en posant } u = x(y-a) \text{ et } du = (y-a)dx \\
 &= \frac{1}{(y-a)^{p+1}} \int_0^{\infty} u^p e^{-u} du = \frac{\Gamma(p+1)}{(y-a)^{p+1}}.
 \end{aligned}$$

Nous ne présenterons que deux propriétés de la transformée de Laplace.

Proposition 12.8 (Linéarité):

Soient a, b deux nombres réels, $f(x), g(x)$ deux fonctions définies sur l'intervalle $[0, \infty)$ telles que leurs transformées de Laplace $L(f), L(g)$ existent pour $y \geq c$. Alors $L(af + bg) = aL(f) + bL(g)$ sur l'intervalle $[c, \infty)$.

La preuve de cette proposition est très simple. Il suffit d'utiliser la linéarité de l'intégrale.

Soient $f(x), g(x)$ deux fonctions définies sur \mathbf{R} et qui ne peuvent prendre des valeurs non nulles que sur l'intervalle $[0, \infty)$. On peut alors définir une troisième fonction appelée la convolution de f et g et que l'on note $f * g$ par la formule

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t) g(x-t) dt.$$

Proposition 12.9:

Soient f et g comme dans le paragraphe précédent. Alors $L(f * g) = L(f)L(g)$.

Preuve: Il suffit de faire un changement de coordonnées. On a

$$\begin{aligned}
 (L(f)L(g))(y) &= (L(f)(y))(L(g)(y)) = \left(\int_0^{\infty} f(s) e^{-sy} ds \right) \left(\int_0^{\infty} g(t) e^{-ty} dt \right) \\
 &= \iint_{\text{premier quadrant}} f(s) g(t) e^{-(s+t)y} ds dt = (\dagger).
 \end{aligned}$$

Considérons les nouvelles coordonnées

$$\begin{cases} u = s + t \\ v = s \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que ceci est un changement de coordonnées. De plus, nous obtenons

$$\begin{cases} s = v \\ t = u - v \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(s, t)}{\partial(u, v)} = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right| = -1 \quad \text{et}$$

que le domaine correspondant dans le plan u, v au premier quadrant du plan s, t sera

$$D' = \{(u, v) \mid v \geq u \geq 0\}.$$

Donc

$$\begin{aligned} (\dagger) &= \iint_{D'} f(v) g(u - v) e^{-uy} | -1 | du dv = \int_0^\infty \left(\int_0^u f(v) g(u - v) e^{-uy} dv \right) du \\ &= \int_0^\infty e^{-uy} \left(\int_0^u f(v) g(u - v) dv \right) du = \int_0^\infty (f * g)(u) e^{-uy} du = L(f * g)(y). \end{aligned}$$

La proposition est donc démontrée.

Exemple 12.9:

Si

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases}$$

alors

$$(f * g)(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ (2 - x) & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet si $0 \leq x \leq 1$, alors $\int_0^x f(u)g(x - u)du = \int_0^x du = x$. Si $1 \leq x \leq 2$, alors $\int_0^x f(u)g(x - u)du = \int_0^1 g(x - u)du = \int_{x-1}^1 du = (2 - x)$. Si $x \geq 2$, alors $\int_0^x f(u)g(x - u)du = \int_0^1 g(x - u)du = 0$ car $x - 1 > 1$. Nous pouvons calculer la transformée de Laplace dans ce cas-ci.

$$L(f)(y) = \int_0^\infty f(x)e^{-xy} dx = \int_0^1 e^{-xy} dx = \left(\frac{-e^{-xy}}{y} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1 - e^{-y}}{y} \quad \text{si } y \neq 0.$$

Donc $L(f * g)(y) = ((1 - e^{-y})/y)^2$ si $y \neq 0$.

★ ★ ★

Exercice 12.1:

Pour chacune des intégrales impropres suivantes, indiquer si elle existe et, si oui, évaluer celle-ci.

a) $\int_{-1}^1 1/(1 - x^2) dx$

b) $\int_{-1}^1 1/(1 - x^2)^2 dx$

c) $\int_{-1}^1 1/(1 - x^2)^{1/2} dx$

d) $\int_2^\infty 1/(x^2 - 2) dx$

e) $\int_0^\infty 1/(x^2 + 2x + 2) dx$

f) $\int_0^\infty ((\pi/2) - \arctan(x)) dx$

g) $\int_0^1 \ln(1 - t^2)/t^2 dt$

h) $\int_0^\infty t^2/(1 + t^4) dt$

- i) (†) $\int_0^1 t^{-3/4}/(1-t)^{1/4} dt$
 j) (†) $\int_0^1 t^{1/4}/(1-t)^{1/4} dt$

Exercice 12.2:

Indiquer pour quelles valeurs de s , les intégrales suivantes existent et, déterminer pour ces valeurs, l'intégrale impropre.

- a) $\int_0^\infty e^{-sx} \cos(ax) dx$
 b) $\int_0^\infty e^{-sx} \sin(ax) dx$

Exercice 12.3:

En supposant que $\int_0^\infty \sin(x)/x dx = \pi/2$, évaluer chacune des intégrales impropres suivantes.

- a) $\int_0^\infty \sin(x) \cos(x)/x dx$
 b) $\int_0^\infty \sin^2(x)/x^2 dx$
 c) $\int_0^\infty \sin^4(x)/x^2 dx$
 d) $\int_0^\infty \sin^4(x)/x^4 dx$

Exercice 12.4:

Posons $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ avec $a, b > 0$.

- a) Calculer l'intégrale $\int_0^b e^{-xy} \sin(y) dy$.
 b) Calculer de deux façons différentes $I(a, b) = \iint_R e^{-xy} \sin(y) dx dy$.
 c) Calculer, pour b fixé, $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a, b)$. En déduire la valeur de $\int_0^\infty \sin(x)/x dx$.

Exercice 12.5 (†):

Etudier pour quelles valeurs réelles de α et β l'intégrale suivante $\int_0^1 t^\alpha |\ln(t)|^\beta dt$ est bien définie. Calculer cette intégrale (lorsqu'elle est bien définie) dans le cas où $\beta \in \mathbf{N}$.

Exercice 12.6 (†):

Soit a , un nombre réel positif $a > 0$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'intégrale

$$I(n) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+t^a)^{n+(1/a)}} dt$$

converge. Calculer $I(n)$ en déterminant premièrement une relation de récurrence entre $I(n)$ et $I(n+1)$.

Exercice 12.7 (†):

- a) Montrer que l'intégrale $\int_0^\pi \ln(\sin(t)) dt$ est bien définie.
 b) Montrer que les intégrales

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt, \quad \int_{\pi/2}^\pi \ln(\sin(t)) dt, \quad \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt$$

sont bien définies et ont même valeur.

- c) En déduire que $\int_0^\pi \ln(\sin(t)) dt = -\pi \ln(2)$ et $\int_0^\pi t \ln(\sin(t)) dt = -\pi^2 \ln(2)/2$.