Université du Québec à Montréal **Session d'automne 2011**
Groupe-cours 51 **MAT1112 - Calcul I**

Devoir 2

- Le devoir est à remettre en classe le vendredi 2 décembre 2011 **à 9h**. Des pénalités de notation seront appliquées à tout devoir rendu en retard.
- Une attention particulière devra être portée à la qualité de la rédaction. Les étapes des calculs doivent figurer sur la copie.
- Votre devoir doit être personnel, et rédigé à l'encre.

Exercice 1. (région d'intégration et intégrale double)

(a) Tracer la région $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq 1,\ -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}\}$.

(b) Soit $f(x, y)$ une fonction continue quelconque. Écrire l'intégrale $\iint_R f(x, y)dA$ sous la forme d'une intégrale itérée (ou d'une somme d'intégrales itérées), des deux façons différentes (avec $dydx$ puis $dxdy$).

Exercice 2. (centre de gravité d'un quart d'ellipse)

Soit E la région constituée par l'intérieur du quart supérieur droit d'une ellipse de demi-axes a et b :

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}\ .$$

(a) En utilisant une intégrale double, calculer l'aire de la région E.

(b) On appelle *centre de gravité* (ou centre de masse) d'une région R le point C dont les coordonnées sont :

$$x_C = \frac{\iint_R x\ dxdy}{\iint_R dxdy} \qquad \text{et} \qquad y_C = \frac{\iint_R y\ dxdy}{\iint_R dxdy}\ .$$

Calculer les coordonnées du centre de gravité de E.

Exercice 3. (intégrale de Gauss)

Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$, qui est par définition la limite de $\int_0^a e^{-t^2} dt$ lorsque $a \to +\infty$. Ceci n'est pas faisable par des méthodes habituelles car on ne connaît pas d'expression simple d'une primitive de la fonction e^{-t^2}.

On note, pour $a \in \mathbb{R}^+$: $\quad I(a) = \displaystyle\int_0^a e^{-t^2} dt \quad$ et

- $C(a) = [0, a] \times [0, a]$;
- $D(a) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,$ tels que $x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

On pose enfin : $\quad f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$.

(a) Expliquer pourquoi $\iint_{C(a)} f(x, y)\ dxdy = I(a)^2$.

(b) Calculer $\iint_{D(a)} f(x, y)\ dxdy$ en fonction de a.
[On pourra tracer la région $D(a)$, et penser à utiliser des coordonnées adaptées.]

Tourner la page... **Tourner la page...**

(c) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^+$

$$\iint_{D(a)} f(x,y)dxdy \leq \iint_{C(a)} f(x,y)dxdy \leq \iint_{D(a\sqrt{2})} f(x,y)dxdy.$$

[On pourra tracer sur un même dessin les régions $D(a)$, $C(a)$ et $D(a\sqrt{2})$, et utiliser le fait que l'intégrale double d'une fonction positive est positive.]

(d) En utilisant les questions précédentes, calculer $\lim\limits_{a\to+\infty} \iint_{D(a)} f(x,y)dxdy$, puis $\lim\limits_{a\to+\infty} \iint_{C(a)} f(x,y)dxdy$, et enfin en déduire que

$$\lim_{a\to+\infty} I(a) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Exercice 4. (intégrale triple en coordonnées cartésiennes)

Soit $f(x,y,z)$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^3$, et considérons l'intégrale suivante :

$$I = \int_1^2 \int_1^{y^4} \int_1^{\sqrt{z}} f(x,y,z)\ dxdzdy\ .$$

(a) Donner les 5 autres expressions équivalentes de I sous forme d'intégrales itérées.

(b) Pour $f(x,y,z) = x$, calculer I en utilisant l'une de ses 6 expressions.

Exercice 5. (volume d'une calotte sphérique)

Soit S la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon 1, et $a \in [-1,1]$. Soit S_a la région de l'espace contenue à l'intérieur de la sphère S et située *au-dessus* du plan $z = a$.

(a) Calculer le volume de S_a. On utilisera une intégrale triple, et on pourra faire un changement de variables en coordonnées cylindriques.

(b) On cherche à découper une demi-boule de rayon 1 par un plan parallèle à sa base, de sorte que les deux morceaux obtenus aient le même volume. Montrer que le plan de coupe doit être situé à une hauteur h de la base, où h vérifie l'équation : $h^3 - 3h + 1 = 0$.