UQÀM **Session d'hiver 2013**
MAT1013 Vivien Ripoll
Analyse 1 (vivien.ripoll@lacim.ca)

Examen intra 2

Consignes :
- **Aucun document** (cours, livres, calculatrice, appareil électronique) n'est autorisé.
- La copie doit être écrite à l'encre (stylo bille ou plume, pas de crayon gris). Veuillez **soigner la présentation** de votre copie.
- Sauf mention explicite du contraire, il faut **démontrer** tout ce que l'on affirme. Les étapes des calculs et des raisonnements doivent figurer sur la copie. Si l'on utilise un théorème du cours, il faut le dire explicitement. La qualité et à la précision de la rédaction seront des critères importants lors de la notation.
- Les exercices sont indépendants, et leur ordre n'a pas d'importance. À l'intérieur d'un même exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes pour répondre à une question donnée.
- Le barême annoncé est indicatif et pourrait être modifié. Il n'est pas nécessaire de faire toutes les questions pour avoir 100%.

[10 pts] **Exercice 1. (Continuité des fonctions)**

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, et $a \in \mathbb{R}$. Donner la définition, avec la notation (ϵ, δ), de "f est continue en a".

(b) On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2x$, et on fixe $a \in \mathbb{R}$. Montrer que f est continue en a, *en utilisant le critère séquentiel* (i.e., avec la définition de la continuité à partir des suites).

[20 pts] **Exercice 2. (Diverses convergences de séries)**

(a) La série $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est-elle convergente ? absolument convergente ? Mêmes questions pour la série $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)^3}\right)$.

(b) Montrer que la série $\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}\right)$ est convergente, et calculer sa somme totale. [On pourra calculer $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$, puis étudier des sommes partielles.]

(c) Donner (*sans justifications*) l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que la série $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \sqrt{n}}\right)$ est convergente.

(d) Justifier pourquoi si $x \in]-1, 1[$, et si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un réarrangement de la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{1-x}$.

[12 pts] **EXERCICE 3. (Séries et polynômes)**

On fixe $r \in \mathbb{R}$ tel que $|r| < 1$.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la série $\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^k r^n\right)$ est convergente.

(b) En déduire que pour tout polynôme $P(n)$ de la forme $P(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_d n^d$, la série $\left(\sum_{n=0}^{\infty} P(n) r^n\right)$ est convergente.

[15 pts] **EXERCICE 4. (Séries, encadrement et télescopage)**

On considère trois suites (a_n), (b_n), (u_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq a_n \leq u_{n+1} - u_n \leq b_n.$$

(a) Montrer que si la série $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)$ diverge, alors la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

(b) Montrer que si la série $\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$ converge, alors la suite (u_n) a une limite finie, et la série $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)$ converge. En notant ℓ la limite de (u_n), montrer qu'alors :

$$u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \ell \leq u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

[30 pts] **EXERCICE 5. (Une série de cosinus)**

[Rappel : $\cos 0 = 1$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$ et $|\cos(\theta)| \leq 1$.]

(a) Montrer que si $|x| < 4$, la série $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \cos(2nx)}{4^n}\right)$ est convergente.

(b) On pose, lorsque cela a un sens, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \cos(2nx)}{4^n}$. Calculer $f(\pi)$ et $f(\frac{\pi}{2})$.

(c) Montrer que pour tout $x \in]-4, 4[$, $|f(x)| \leq \frac{4}{4 - |x|}$.

(d) Calculer $f(\frac{\pi}{4})$.

[30 pts] **EXERCICE 6. (Valeurs d'adhérence et limite)**

(a) Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Étant donnée une suite (u_n), si ℓ est la limite d'une suite extraite de (u_n), on dit que ℓ est une *valeur d'adhérence* de (u_n).

On fixe dans cet exercice une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 4 \leq u_n \leq 6.$$

Le but de l'exercice est de montrer que si la suite (u_n) n'a qu'une seule valeur d'adhérence, alors (u_n) converge vers cette valeur.

(b) Montrer que (u_n) a au moins une valeur d'adhérence, et que si ℓ en est une, alors : $4 \leq \ell \leq 6$.

Pour les questions (c)-(d)-(e), on suppose que ℓ est une valeur d'adhérence de (u_n), mais que (u_n) ne tend pas vers ℓ.

(c) Expliquer pourquoi il existe $\epsilon > 0$, tel que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \exists n > p,\ |u_n - \ell| \geq \epsilon.$$

(d) Expliquer comment construire alors une suite extraite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de (u_n) (avec $v_k = u_{n_k}$), telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|v_k - \ell| \geq \epsilon$.

(e) Déduire des questions précédentes qu'il existe alors une valeur d'adhérence ℓ' de (u_n), telle que $|\ell' - \ell| \geq \epsilon$.

(f) Conclure que si (u_n) n'a qu'une seule valeur d'adhérence, alors (u_n) converge vers cette valeur.

(g) On suppose que notre suite (u_n) vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n),$$

avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction *continue* sur $\mathbb{R}$. Montrer que si α est une valeur d'adhérence de la suite (u_n), alors $f(\alpha)$ aussi.