

PROPRIÉTÉ DE TREILLIS DANS LES GROUPES DE RÉFLEXIONS RÉELS FINIS

D'APRÈS BRADY-WATT

VIVIEN RIPOLL

M2 Algèbre et Géométrie, Université Paris VI

Mémoire de M2 sous la direction de David BESSIS

4 octobre 2006

RÉSUMÉ. On munit un groupe de réflexions réel fini W de l'ordre partiel $\preceq_{\mathcal{R}}$ relatif à la \mathcal{R} -longueur, où \mathcal{R} est l'ensemble de toutes les réflexions de W . On montre que pour cet ordre, l'intervalle $[1, c]$, où c est un élément de Coxeter, forme un treillis. Cette propriété est fondamentale dans la construction d'une structure «duale» de monoïde de Garside sur le groupe de tresses de W . Jusqu'ici la preuve de cette propriété de treillis n'avait pu être faite qu'au cas par cas ; on étudie l'article récent de Brady et Watt [BW3], qui donne une nouvelle démonstration ne reposant plus sur la classification des groupes de réflexions irréductibles. L'idée est de construire un complexe simplicial sphérique $X(c)$ dont les sommets sont les racines positives d'un système de racines de W , et dont la structure simpliciale est modelée sur celle de l'ensemble ordonné $([1, c], \preceq_{\mathcal{R}})$. Les éléments de l'intervalle $[1, c]$ se voient alors comme des sous-complexes de $X(c)$, et on exhibe un infimum de deux éléments en considérant l'intersection de leurs complexes associés.

INTRODUCTION

Soit V un espace euclidien, et W un groupe de réflexions réel fini, inclus dans $O(V)$. On note classiquement \mathcal{A} l'arrangement d'hyperplans associé à W , et $V^{\text{reg}} := V - \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$. Si l'on choisit une chambre C de l'arrangement, et si l'on note S l'ensemble des réflexions par rapport aux murs de C , il est connu que W a une présentation de Coxeter :

$$W \simeq \langle S \mid \forall s \in S, s^2 = 1; \forall s, t \in S, \underbrace{sts \dots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst \dots}_{m_{s,t}} \rangle_{\text{Gr}},$$

où $[m_{s,t}]_{s,t \in S}$ est la matrice de Coxeter du système de Coxeter (W, S) . On construit sur ce modèle le *groupe de tresses d'Artin* associé :

$$B(W, S) := \langle S \mid \forall s, t \in S, \underbrace{sts \dots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst \dots}_{m_{s,t}} \rangle_{\text{Gr}}.$$

La compréhension de $B(W, S)$ ainsi que de la topologie de V^{reg} complexifié passe par l'étude du *monoïde des tresses positives* :

$$B_+(W, S) := \langle S \mid \forall s, t \in S, \underbrace{sts \dots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst \dots}_{m_{s,t}} \rangle_{\text{Mon}}.$$

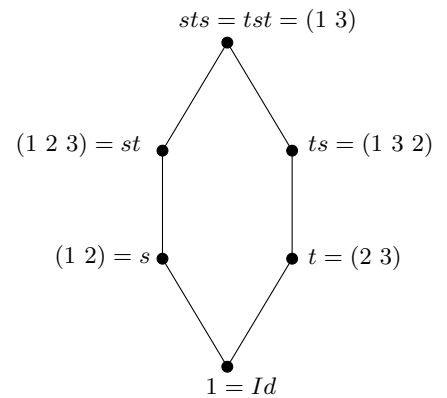
La structure de $B(W, S)$ et $B_+(W, S)$ a fait l'objet de plusieurs articles (voir Deligne et Brieskorn-Saito [D, BS]). Ils vérifient en particulier que $B_+(W, S)$ se plonge dans $B(W, S)$, et construisent une forme normale dans $B(W, S)$ qui permet d'y résoudre le problème des mots. Dehornoy et Paris ont voulu formaliser cette structure en introduisant dans [Deh, DP] la notion de *monoïde de Garside*. Un des axiomes de définition d'un monoïde de Garside M est une propriété de treillis dans M . Dans le cas de $B_+(W, S)$, cette propriété se déduit elle-même du fait que l'ensemble ordonné (W, \preceq_S) forme un treillis — où \preceq_S est l'ordre partiel relatif à la S -longueur (*i.e.* $u \preceq_S v$ si u s'écrit en préfixe d'une S -décomposition réduite de v).

Rappelons qu'un treillis est un ensemble partiellement ordonné où deux éléments quelconques ont toujours un infimum et un supremum (voir la définition 3.3 pour des précisions). Par exemple, considérons le cas élémentaire du type A_2 , avec $W = \mathfrak{S}_3$. On peut poser $s = (1\ 2)$ et $t = (2\ 3)$, et on a

$$\begin{aligned} W &= \langle s, t \mid s^2 = t^2 = 1, sts = tst \rangle_{\text{Gr}} \\ &= \{1, s, t, st, ts, sts\}. \end{aligned}$$

On voit sur la figure ci-contre que (W, \preceq_S) a bien une structure de treillis.

De façon plus générale, pour montrer que (W, \preceq_S) est un treillis on utilise la géométrie de l'arrangement d'hyperplans, en voyant un élément de W comme un chemin entre deux chambres.



Actuellement un axe de recherche important consiste à tenter d'étendre la théorie de Coxeter aux groupes de réflexions complexes. Cependant, un obstacle capital est que pour beaucoup de ces groupes, il n'existe pas d'ensemble de réflexions minimal «naturel» qui jouerait le rôle de S . C'est pourquoi on est amené à travailler plutôt avec l'ensemble de *toutes* les réflexions de W , que l'on notera ici \mathcal{R} . Dans son article [B], Bessis commence ainsi à mettre en place une théorie «duale» pour les groupes de réflexions réels, où en particulier on remplace l'ordre \preceq_S par l'ordre $\preceq_{\mathcal{R}}$ relatif à la \mathcal{R} -longueur. Par analogie avec le cas classique, il construit un autre monoïde de Garside, appelé dans [B] *monoïde dual*, qui n'est pas isomorphe à $B_+(W, S)$ mais dont le groupe des fractions est isomorphe à $B(W, S)$. Dans [BW2] Brady et Watt donnent indépendamment des résultats semblables.

Pour montrer qu'effectivement ce monoïde est de Garside, le point-clé est toujours une propriété de treillis. Cependant, comme $(W, \preceq_{\mathcal{R}})$ n'est généralement pas un treillis, on considère à la place l'intervalle $[1, c] := \{w \in W, w \preceq_{\mathcal{R}} c\}$, où c est un élément de Coxeter de W . Ainsi, si l'on reprend l'exemple précédent de \mathfrak{S}_3 , on a $\mathcal{R} = \{s, t, u\}$ avec $s = (1\ 2)$, $t = (2\ 3)$ et $u = (1\ 3)$. Pour l'ordre $\preceq_{\mathcal{R}}$, \mathfrak{S}_3 n'est alors plus un treillis, il faut se restreindre à un intervalle $[1, c]$ où c est un 3-cycle :

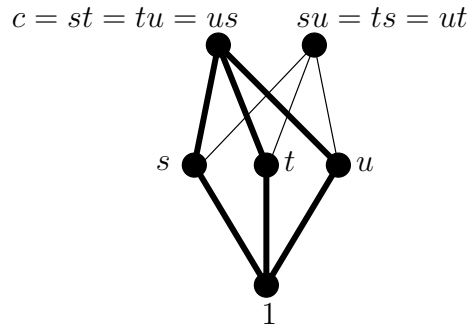


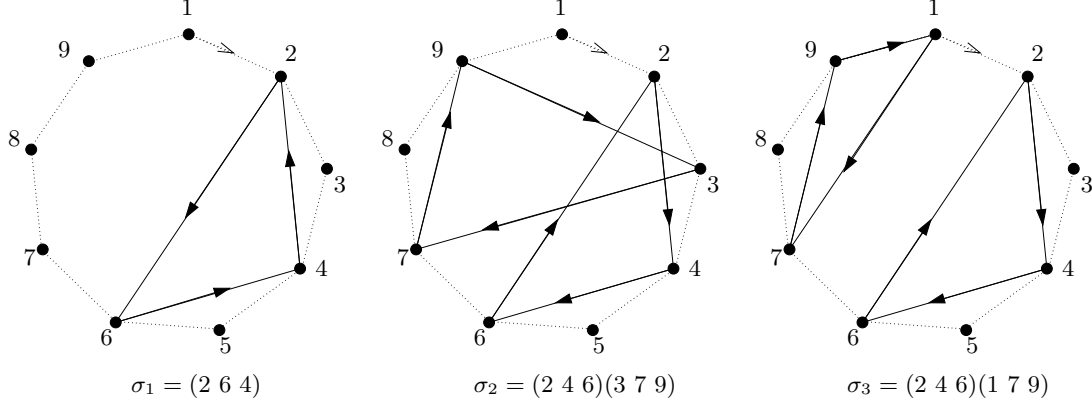
FIG. 1. L'exemple de $\mathfrak{S}_3 : ([1, c], \preceq_{\mathcal{R}})$, où $c = (1\ 2\ 3)$, est un treillis, mais pas $(W, \preceq_{\mathcal{R}})$.

La propriété de treillis pour l'intervalle $[1, c]$ a d'abord été démontrée au cas par cas, en utilisant la classification des groupes de réflexions irréductibles. Le type A se résoud de façon assez élémentaire, en utilisant un isomorphisme avec les partitions non-croisées du n -gone (cf. [BDM, Br]). Donnons quelques précisions sur cet isomorphisme, afin de faire remarquer sa spécificité. Considérons $W = \mathfrak{S}_n$, que l'on plonge canoniquement dans $GL_n(\mathbb{R})$; les réflexions sont alors les transpositions de \mathfrak{S}_n , et un élément de Coxeter est un n -cycle. De plus, si pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on note $P(\sigma)$ la partition de $\{1, \dots, n\}$ donnée par sa décomposition en cycles, et $p(\sigma)$ le cardinal de $P(\sigma)$ (*i.e.* le nombre d'orbites de σ), alors on voit facilement que $\ell_{\mathcal{R}}(\sigma) = n - p(\sigma)$, ce qui permet de mieux comprendre l'ordre $\preceq_{\mathcal{R}}$. Pour c un élément de Coxeter, on montre que $\sigma \preceq_{\mathcal{R}} c$ si et seulement si :

- (i) pour chaque cycle γ de σ , l'ordre cyclique défini par γ sur $\text{Supp}(\gamma)$ est compatible avec celui défini par c ;
- (ii) la partition $P(\sigma)$ est non-croisée vis-à-vis de c .

On comprend ces conditions en représentant géométriquement la permutation σ dans le n -gone régulier, où les sommets représentent les points $1, \dots, n$ ordonnés selon c . Le point

(i) est vérifié lorsque les cycles de σ « tournent » dans le même sens que c ; le second point signifie que les enveloppes convexes construites à partir des cycles de σ ne s'intersectent pas. Ainsi, sur les figures ci-dessous, où l'on a pris $c = (1\ 2 \dots n)$, σ_1 ne satisfait pas le point (i) et σ_2 ne donne pas une partition non-croisée ; seul σ_3 est dans l'intervalle $[1, c]$.



Il est ensuite aisé de vérifier que pour $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$, $\sigma \preceq_{\mathcal{R}} \sigma'$ si et seulement si $P(\sigma)$ est une partition plus fine que σ' et que pour chaque cycle c_i de σ' , $\sigma|_{\text{Supp}(c_i)}$ vérifie les conditions (i) et (ii) relativement à c_i . Ainsi on établit un isomorphisme entre l'intervalle $[1, c]$, muni de $\preceq_{\mathcal{R}}$, et l'ensemble des partitions non-croisées du n -gone, muni de l'ordre de raffinement. Cela permet de conclure sur la propriété de treillis puisque celle-ci se vérifie de façon élémentaire pour les partitions non-croisées.

Cette méthode de démonstration n'est malheureusement pas générale. En effet, elle utilise de façon fondamentale la géométrie convexe spécifique au type A . L'utilisation de partitions non-croisées s'adapte assez bien aux types B et D , et $I_2(m)$ (voir [BC]). Notons au passage que le cas de $I_2(m)$ est trivial, puisque l'élément de Coxeter est de longueur 2. Par contre, les types exceptionnels ne peuvent se faire de façon similaire : ils avaient dû être traités par ordinateur à l'aide du logiciel GAP (cf. [B]). Il était regrettable de ne pas avoir de preuve générale, permettant de voir la structure de l'intervalle $[1, c]$ de manière unifiée, et ouvrant peut-être la voie à une généralisation aux groupes de réflexions complexes bien engendrés (dans lesquels on peut encore définir un élément de Coxeter).

Brady et Watt ont publié tout récemment une telle preuve dans [BW3], grâce à une approche totalement nouvelle. Pour c un élément de Coxeter, ils construisent un complexe simplicial sphérique $X(c)$, de sommets les racines positives d'un système de racines du groupe. La structure de ce complexe est modelée sur celle de l'intervalle $([1, c], \preceq_{\mathcal{R}})$; on associe ainsi à chaque élément $u \preceq_{\mathcal{R}} c$ un sous-complexe $X(u)$ de $X(c)$. Grâce à cette nouvelle structure, un infimum de $u, v \in [1, c]$ peut être déterminé en travaillant sur le complexe $X(u) \cap X(v)$. L'objet du mémoire est de comprendre, détailler et structurer cette preuve.

Les quatre premières parties sont des prérequis techniques à la démonstration. On rappelle d'abord les propriétés fondamentales des groupes de réflexions et des systèmes de racines, en introduisant les notations et définitions utilisées par la suite. La deuxième

partie introduit un ordre partiel \preceq sur $O(V)$ (où V est un espace euclidien), en reprenant les propriétés de l'article [BW1]. En particulier on détermine la structure des intervalles pour cet ordre, en établissant pour $g \in O(V)$ un isomorphisme entre $[1, g]$ et l'ensemble des sous-espaces de $\text{Im}(g - 1)$ (théorème 2.6). Dans la partie 3 on montre que l'ordre $\preceq_{\mathcal{R}}$ sur un groupe de réflexion $W \subseteq O(V)$ est en fait une restriction de l'ordre \preceq . On liste certaines caractéristiques de cet ordre, et on détermine une condition suffisante d'existence d'un infimum (proposition 3.7) : si $u, v, w \in [1, c]$ avec $\mathcal{R}_w = \mathcal{R}_u \cap \mathcal{R}_v$ (où \mathcal{R}_x est l'ensemble des réflexions précédant x), alors w est l'infimum de u et v . Enfin, la partie 4 définit les notions de simplexes et complexes sphériques utilisées ici ; on y étudie en particulier la convexité des complexes, en prouvant que si un complexe de dimension d est convexe, alors il est purement de dimension d (proposition 4.7).

La partie 5 amorce la démonstration de la propriété de treillis : on fixe désormais un groupe de réflexions irréductible W , et un élément de Coxeter c . Tout d'abord on ordonne de façon adaptée les éléments d'un système de racines positives Φ^+ de W (en suivant la numérotation de Steinberg [S]), puis on construit le complexe $X(c)$ (définition 5.5) : abstraitement, $X(c)$ est le complexe de drapeaux sur le graphe d'ensemble de sommets Φ^+ où ρ est relié à ρ' si $\rho < \rho'$ et $r_\rho r_{\rho'} \preceq c^{-1}$. On obtient plusieurs caractérisations des simplexes de $X(c)$, et on traite l'exemple du groupe B_3 . Dans la partie 6 on travaille sur un élément u de $[1, c]$, et on lui associe un sous-complexe $X(u)$ de $X(c)$. On donne la forme des «murs» des simplexes de $X(u)$ (proposition 6.2). La partie 7 s'attache plus particulièrement au cas où u est de longueur 2 ; on en tire néanmoins des conséquences importantes sur la structure locale de $X(u)$ dans le cas général. Dans la partie 8 on introduit des racines particulières, et on exhibe le «premier» simplexe maximal de $X(u)$ (théorème 8.10). La partie 9 contient les démonstrations les plus techniques du mémoire : on procède par (double) récurrence pour montrer que les $X(u)$ sont des complexes sphériques convexes (corollaire 9.6), et au passage on obtient une écriture du cône sur $X(u)$ comme intersection de demi-espaces bien déterminés. Enfin, dans la partie 10 on rassemble le tout pour démontrer que l'intervalle $([1, c], \preceq_{\mathcal{R}})$ forme un treillis.

Je tiens à remercier David Bessis, qui m'a proposé le sujet et accompagné tout au long de ce travail, pour sa disponibilité, sa clarté, sa patience, et son implication.

1. GROUPES DE RÉFLEXIONS ET SYSTÈMES DE RACINES

Dans cette partie on résume les notions essentielles sur les groupes de réflexions réels, en particulier on rappelle les propriétés qui seront utilisées par la suite. Des précisions peuvent être trouvés dans [Bo], [H], ou le plus récent [K].

Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel, et S un ensemble de symétries hyperplanes de $GL(V)$. On considère le sous-groupe W de $GL(V)$, engendré par la partie S . Si W est fini, on peut construire un produit scalaire sur V , invariant par W . On munit ainsi V d'une structure euclidienne, pour laquelle W est un sous-groupe fini de $O(V)$, engendré par des réflexions. Un tel groupe est appelé *groupe de réflexions réel fini* ; par abus de langage, on pourra parfois écrire simplement «groupe de réflexions».

Si $\alpha \in V$, on notera r_α la réflexion d'hyperplan $(\mathbb{R}\alpha)^\perp$, et on appellera ligne de r_α la droite $\mathbb{R}\alpha$. Pour $v \in V$, $r_\alpha(v) = v - 2\frac{(v \cdot \alpha)}{(\alpha \cdot \alpha)}\alpha$, où $(x \cdot y)$ désigne le produit scalaire dans V .

Soit W un groupe de réflexions. Notons que si $w \in W$ et $\alpha \in V$, alors $r_{w(\alpha)} = wr_\alpha w^{-1}$. En particulier, si $r_\alpha \in W$, alors $r_{w(\alpha)} \in W$. Pour chaque réflexion de W , considérons les deux vecteurs unitaires (opposés) dirigeant la ligne de r , et notons $\Phi(W)$ l'ensemble de tous ces vecteurs. La configuration géométrique de $\Phi(W)$ est remarquable, et motive la définition de *systèmes de racines*.

Définition 1.1

Soit V un espace euclidien. On appellera ici système de racines tout ensemble fini de vecteurs unitaires de V vérifiant :

- (i) $\forall \alpha \in \Phi, \Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$;
- (ii) $\forall \alpha \in \Phi, r_\alpha(\Phi) = \Phi$.

Remarque : Cette définition n'est pas du tout universelle. La notion la plus générale de système de racines ne demande pas que les vecteurs soient unitaires. D'autres définitions imposent que Φ engendre l'espace V . Enfin, une condition d'intégralité est souvent ajoutée : on parle alors plutôt de systèmes de racines cristallographiques, qui sont à la base de la théorie de Lie.

Pour tout groupe de réflexions W , l'ensemble $\Phi(W)$ défini plus haut est clairement un système de racines. Inversement, à partir d'un système de racines Φ , on peut construire un groupe de réflexions en considérant le groupe $W(\Phi)$ engendré par les réflexions r_α , pour $\alpha \in \Phi$ (on vérifie qu'il est fini en montrant qu'il se plonge dans le groupe des permutations de Φ). Dans la suite du mémoire on parlera «du» système de racines d'un groupe de réflexions W pour désigner le système $\Phi(W)$.

Si Φ est un système de racines dans V , tout hyperplan de V qui n'intersecte pas Φ le partitionne en deux sous-parties de même cardinal, qu'on appelle arbitrairement *racines positives* et *racines négatives* : $\Phi = \Phi^+ \sqcup \Phi^-$, où $\Phi^- = -\Phi^+$. Considérons l'ensemble Δ des racines positives qui sont extrémales dans le cône convexe sur Φ^+ . On peut montrer que Δ est un système de *racines simples* pour Φ , c'est-à-dire que chaque racine est combinaison linéaire à coefficients soit tous positifs, soit tous négatifs, d'éléments de Δ , et que Δ engendre V en entier. On montre également que le choix d'un système de racines simples Δ détermine Φ^+ , et qu'inversement Φ^+ détermine Δ . Une autre propriété des racines simples est la suivante : si $\alpha, \beta \in \Delta$, avec $\alpha \neq \beta$, alors $(\alpha \cdot \beta) \leq 0$. Enfin, le groupe de réflexions W associé à Φ est engendré par $S := \{s_\alpha, \alpha \in \Delta\}$. On peut même donner une présentation, dite de Coxeter, par générateurs (S) et relations (du type $sts\dots = tst\dots$, appelées relations de tresses) de W (voir [H, p. 6–18] pour des démonstrations et des précisions sur ces résultats). Les éléments de S sont appelés *réflexions fondamentales*.

La classification des groupes de réflexions finis irréductibles revient ainsi à celle des *systèmes de Coxeter* (W, S) finis irréductibles. Cela passe par la construction de *graphes de Coxeter* : les sommets du graphe de (W, S) sont les $s \in S$, et si pour $s, t \in S$ le produit

st est d'ordre $m \geq 3$, une arête étiquetée m relie s et t . Une des premières propriétés est la suivante [Bo, Prop. 8, p. 98] :

Proposition 1.2

Soit (W, S) un système de Coxeter fini irréductible. Alors le graphe de Coxeter de (W, S) est un arbre.

Géométriquement, on détermine une partie génératrice S en considérant l'ensemble des réflexions par rapport aux murs d'une chambre C de l'arrangement V^{reg} correspondant à W , et un système de racines simples est constitué des vecteurs normaux aux murs de C dirigés vers l'intérieur de C . Un *élément de Coxeter* est par définition un produit de toutes les réflexions par rapport aux murs d'une chambre. On montre que tous les éléments de Coxeter sont conjugués dans W ([Bo, Prop. 1, p. 116]).

Rappelons maintenant la notion de longueur des éléments de W relativement à S .

Définition 1.3

Soit W un groupe de réflexions et S un ensemble de réflexions fondamentales.

Pour $w \in W$, une S -décomposition de w est une suite de réflexions $s_1, \dots, s_p \in S$ telle que $w = s_1 \dots s_p$. L'entier p est appelé longueur de la décomposition ; on parle de S -décomposition réduite de w si la longueur est minimale. On appelle S -longueur de w , et on note $\ell_S(w)$, la longueur d'une S -décomposition réduite de w .

Le système de racines de W permet de caractériser la S -longueur des éléments :

Proposition 1.4

Pour tout $w \in W$:

- (i) la longueur de w est exactement le nombre de racines positives envoyées par w sur des racines négatives ;
- (ii) si $s_1 \dots s_p$ est une décomposition réduite de w , alors ces racines sont de la forme $\beta_i := s_p s_{p-1} \dots s_{i+1}(\alpha_i)$ pour $i = 1, \dots, p$ (où α_i est la racine positive dirigeant $\text{Ker}(s_i - 1)^\perp$).

Démonstration : Le point (i) est classique (voir par exemple [H, p. 114]). On en déduit facilement (ii) : si $\rho \in \Phi^+$ mais $w(\rho) \in \Phi^-$, alors il existe $i \in \{1, \dots, p\}$ tel que $s_{i+1} \dots s_p(\rho) \in \Phi^+$ alors que $s_i s_{i+1} \dots s_p(\rho) \in \Phi^-$. Donc la racine positive $s_{i+1} \dots s_p(\rho)$ est envoyée par s_i sur une racine négative, et d'après (i) appliqué à s_i , elle ne peut valoir que α_i (puisque $\ell_S(s_i) = 1$ et que $s_i(\alpha_i) = -\alpha_i$). D'où $\rho = s_p \dots s_{i+1}(\alpha_i)$. \square

2. ORDRE PARTIEL SUR LE GROUPE ORTHOGONAL $O(V)$

Soit V un espace euclidien. Nous allons définir et étudier sommairement un ordre partiel sur le groupe orthogonal $O(V)$, qui va s'avérer particulièrement adapté aux groupes de réflexions. Nous suivons pour cette partie l'article de Brady et Watt [BW1].

Définition 2.1

Pour $f \in O(V)$, on pose : $\mathcal{M}(f) := \text{Im}(f - 1)$ (espace déplacé), et $\mathcal{F}(f) := \text{Ker}(f - 1)$ (espace fixé).

Remarquons qu'on a de façon évidente : $\mathcal{M}(f) = \mathcal{F}(f)^\perp$. La propriété suivante va nous permettre de munir $O(V)$ d'un ordre partiel :

Propriété 2.2

Soient $f, g \in O(V)$. Alors : $\dim \mathcal{M}(fg) \leq \dim \mathcal{M}(f) + \dim \mathcal{M}(g)$, avec égalité si et seulement si $\mathcal{M}(fg) = \mathcal{M}(f) \oplus \mathcal{M}(g)$.

Démonstration : De façon évidente $\mathcal{F}(f) \cap \mathcal{F}(g) \subseteq \mathcal{F}(fg)$, ce qui donne en passant aux supplémentaires $\mathcal{M}(f) + \mathcal{M}(g) \supseteq \mathcal{M}(fg)$. Or $\dim(\mathcal{M}(f) + \mathcal{M}(g)) \leq \dim \mathcal{M}(f) + \dim \mathcal{M}(g)$, avec égalité si et seulement si $\mathcal{M}(f) \cap \mathcal{M}(g) = \{0\}$, ce qui permet de conclure. \square

Définition 2.3

Soient $f, g \in O(V)$. On écrit $f \preceq g$ si $\dim \mathcal{M}(f) + \dim \mathcal{M}(f^{-1}g) = \dim \mathcal{M}(g)$

On a donc : $f \preceq g \Leftrightarrow \mathcal{M}(f) \oplus \mathcal{M}(f^{-1}g) = \mathcal{M}(g)$.

Proposition 2.4

La relation \preceq munit $O(V)$ d'un ordre partiel.

Démonstration : La réflexivité et l'antisymétrie sont élémentaires. Quant à la transitivité, si $f \preceq g$ et $g \preceq h$, alors

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{M}(h) &= \dim \mathcal{M}(g) + \dim \mathcal{M}(g^{-1}h) \\ &= \dim \mathcal{M}(f) + \dim \mathcal{M}(f^{-1}g) + \dim \mathcal{M}(g^{-1}h) \\ &\geq \dim \mathcal{M}(f) + \dim \mathcal{M}(f^{-1}h) && \text{d'après la propriété 2.2} \\ &\geq \dim \mathcal{M}(h) && \text{(même raison),} \end{aligned}$$

donc les deux dernières lignes sont égales *i.e.* $f \preceq h$. \square

Nous allons voir que pour cet ordre on peut déterminer la structure des intervalles.

Définition 2.5

Pour $g \in O(V)$, on pose :

$$\begin{aligned} \varphi_g : [1, g] &\rightarrow SEV_g := \{\text{sous-espaces vectoriels de } \mathcal{M}(g)\} \\ f &\mapsto \mathcal{M}(f) \end{aligned}$$

L'application φ_g est clairement un morphisme d'ensembles ordonnés (où SEV_g est muni de la relation d'inclusion).

Théorème 2.6

Pour tout $g \in O(V)$, φ_g est un isomorphisme d'ensembles ordonnés.

Démonstration : On résume ici les étapes de la construction de l'inverse de φ_g , en renvoyant à [BW1] pour plus de détails. Soit E un sous-espace de $\mathcal{M}(g)$. On pose $U_E := ((g-1)|_{\mathcal{M}(g)})^{-1}(E)$. On vérifie que U_E est un supplémentaire de E^\perp dans V , et on note p_E le projecteur sur U_E parallèlement à E^\perp . On montre qu'alors l'application $f_E := 1 + (g-1)p_E$ est bien dans l'intervalle $[1, g]$, et qu'elle vérifie $\mathcal{M}(f_E) = E$, ce qui permet de définir φ_g^{-1} . \square

Corollaire 2.7

Soient $f, f', g \in \mathcal{O}(V)$. Si $f \preceq g$ et $f' \preceq g$, alors :

$$\mathcal{M}(f) \subseteq \mathcal{M}(f') \Rightarrow f \preceq f'$$

Démonstration : Par le théorème 2.6, comme $f, f' \in [1, g]$, on peut écrire $f = \varphi_g^{-1}(\mathcal{M}(f))$ et $f' = \varphi_g^{-1}(\mathcal{M}(f'))$. Le résultat vient donc du fait que φ_g^{-1} est un morphisme d'ensembles ordonnés. \square

Les réflexions jouent un rôle particulier pour cet ordre, car ce sont les seuls éléments r de $\mathcal{O}(V)$ vérifiant $\dim \mathcal{M}(r) = 1$. C'est pourquoi il est adapté aux groupes de réflexions.

3. ORDRE PARTIEL SUR UN GROUPE DE RÉFLEXIONS

Soit V un espace euclidien, et W un sous-groupe fini de $\mathcal{O}(V)$ engendré par des réflexions. On note \mathcal{R} l'ensemble de *toutes* les réflexions de W . On utilisera les notions de \mathcal{R} -décomposition et de \mathcal{R} -longueur, qui se comprennent comme dans la définition 1.3, en remplaçant S par \mathcal{R} .

Signalons quelques propriétés évidentes : pour $w \in W$, $\ell_{\mathcal{R}}(w^{-1}) = \ell_{\mathcal{R}}(w)$. D'autre part, puisque \mathcal{R} est stable par conjugaison, la longueur d'un élément est également invariante par conjugaison. En particulier, pour tout $u, v \in W$, $\ell_{\mathcal{R}}(uv) = \ell_{\mathcal{R}}(vu)$.

Définition 3.1

Pour $u, v \in W$, on écrit $u \preceq_{\mathcal{R}} v$ si $\ell_{\mathcal{R}}(u) + \ell_{\mathcal{R}}(u^{-1}v) = \ell_{\mathcal{R}}(v)$.

Il est facile de vérifier que la relation $\preceq_{\mathcal{R}}$ est bien un ordre sur W .

Concrètement, $u \preceq_{\mathcal{R}} v$ si u s'écrit en un préfixe d'une décomposition réduite de v . En raison de l'invariance de la longueur par conjugaison, on peut même dire mieux : $u \preceq_{\mathcal{R}} v$ si et seulement si u s'écrit en facteur quelconque (pas forcément initial) d'une décomposition réduite de v .

On remarque une similarité entre les définitions de \preceq et de $\preceq_{\mathcal{R}}$. Il est connu que pour un élément $f \in \mathcal{O}(V)$, le nombre minimal de réflexions formant une décomposition de f vaut $\text{codim } \mathcal{F}(f)$ i.e. $\dim \mathcal{M}(f)$. En fait c'est encore le cas quand on se limite aux réflexions de \mathcal{R} :

Théorème 3.2

Pour $w \in W$, $\ell_{\mathcal{R}}(w) = \dim \mathcal{M}(w)$. En particulier l'ordre $\preceq_{\mathcal{R}}$ est la restriction à W de l'ordre \preceq .

Démonstration : On voit d'abord facilement que $\ell_{\mathcal{R}}(w) \geq \dim \mathcal{M}(w)$: si w s'écrit $r_1 \dots r_p$, en itérant la propriété 2.2 on obtient $\dim \mathcal{M}(w) \leq \dim \mathcal{M}(r_1) + \dots + \dim \mathcal{M}(r_p) = p$.

Pour montrer que $\ell_{\mathcal{R}}(w) \leq \dim \mathcal{M}(w)$, on procède par récurrence sur $p := \dim \mathcal{M}(w)$. Pour $p = 0$ c'est évident. Si $p \geq 1$, on pose $W' := \{u \in W, \forall x \in \mathcal{F}(w), u(x) = x\}$. On sait que W' est encore un groupe de réflexions (cf. par exemple [H, Th. 1.12(d), p. 22]). En particulier, comme $W' \neq \{1\}$, il existe r_1 dans \mathcal{R} , tel que $\mathcal{F}(w) \subseteq \mathcal{F}(r_1)$, i.e. $\mathcal{M}(r_1) \subseteq \mathcal{M}(w)$ et donc $r_1 \preceq w$. D'où $\dim \mathcal{M}(r_1^{-1}w) = p - 1$. Par hypothèse de récurrence, il existe r_2, \dots, r_p réflexions de \mathcal{R} , telles que $r_1^{-1}w = r_2 \dots r_p$, ce qui permet de conclure que $\ell_{\mathcal{R}}(w) \leq p$. \square

Désormais on pourra donc noter \preceq au lieu de $\preceq_{\mathcal{R}}$. De même, pour simplifier les notations, on écrira ℓ plutôt que $\ell_{\mathcal{R}}$.

On travaille maintenant dans l'ensemble partiellement ordonné (W, \preceq) . En particulier, pour $u, v \in W$ on définit l'intervalle $[u, v] := \{w \in W, u \preceq w \preceq v\}$. Le but du mémoire est de démontrer que l'intervalle $[1, c]$ (où c est un élément de Coxeter) est un treillis. Rappelons ici la définition :

Définition 3.3

Soit (E, \leq) un ensemble partiellement ordonné. On dit que E est un treillis si :

- (i) E est borné : $\exists a, b \in E, \forall x \in E, a \leq x \leq b$;
- (ii) pour tout $x, y \in E$, x et y admettent un infimum $x \wedge y$;
- (iii) pour tout $x, y \in E$, x et y admettent un supremum $x \vee y$.

Lorsque E est de plus fini, il est facile de voir que deux quelconques de ces propriétés entraînent la troisième. L'intervalle $[1, c]$ étant clairement borné, tout le travail va être de vérifier le point (ii), c'est à dire de construire, pour $u, v \in [1, c]$, un infimum (ou p.g.c.d.) de u et v , que l'on notera classiquement $u \wedge v$. Par définition, pour $u, v, w \in W$,

$$w = u \wedge v \Leftrightarrow \begin{cases} w \preceq u, v, \text{ et} \\ \forall t \in W, t \preceq u, v \Rightarrow t \preceq w. \end{cases}$$

Commençons avec quelques propriétés faciles de l'ordre sur W :

Proposition 3.4

Soient $a, u, v, w \in W$. Alors :

- (i) $u \preceq v \Leftrightarrow vu^{-1} \preceq v \Leftrightarrow u^{-1}v \preceq v$;
- (ii) $u \preceq ava^{-1} \Leftrightarrow a^{-1}ua \preceq v$;
- (iii) $u \preceq v \preceq w \Rightarrow \begin{cases} u^{-1}v \preceq u^{-1}w \\ v^{-1}w \preceq u^{-1}w \\ vu^{-1} \preceq wu^{-1} \\ wv^{-1} \preceq wu^{-1} \end{cases}$.

Démonstration : Les deux premiers points découlent directement des définitions. Pour (iii), si $u \preceq v \preceq w$, alors $\ell(w) = \ell(v) + \ell(v^{-1}w) = \ell(u) + \ell(u^{-1}v) + \ell(v^{-1}w)$. D'autre part, comme $u \preceq w$, $\ell(w) = \ell(u) + \ell(u^{-1}w)$, d'où $\ell(u^{-1}w) = \ell(u^{-1}v) + \ell(v^{-1}w)$, i.e. $u^{-1}v \preceq u^{-1}w$. Les autres implications sont similaires ou s'en déduisent grâce aux propriétés de la longueur. \square

D'autres propriétés nous seront utiles par la suite :

Proposition 3.5

Soit $w \in W$. Alors :

- (i) si $r \in \mathcal{R}$, alors : soit $r \preceq w$, soit $r \preceq rw$;
- (ii) $\forall r \in \mathcal{R}$, $r \preceq w \Leftrightarrow \mathcal{M}(r) \subseteq \mathcal{M}(w)$;
- (iii) $\forall r, r' \in \mathcal{R}$, si $r \neq r'$, alors : $rr' \preceq w \Leftrightarrow \begin{cases} r \preceq w \\ r' \preceq rw \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r' \preceq w \\ r \preceq wr' \end{cases}$.

Soient $r_1, \dots, r_p \in \mathcal{R}$ tels que $w = r_1 \dots r_p$. Pour $i = 1, \dots, p$, on note α_i un vecteur directeur de $\mathcal{M}(r_i)$. Alors :

- (iv) r_1, \dots, r_p est une décomposition réduite de w si et seulement si $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ est une famille libre.

Si c'est le cas, on a :

- (v) $\mathcal{M}(w) = \bigoplus_{i=1}^p \mathcal{M}(r_i)$;
- (vi) $\forall 1 \leq i < j \leq p$, $r_i r_j \preceq w$.

Démonstration : (i) Comme $\ell(r) = 1$, on sait que $\ell(rw) \leq 1 + \ell(w)$. De plus, $\ell(w) = \ell(rrw) \leq 1 + \ell(rw)$. D'où $\ell(w) - 1 \leq \ell(rw) \leq \ell(w) + 1$. Or $\det(rw) = -\det(w)$ donc $\ell(rw) \neq \ell(w)$. Ainsi, soit $\ell(rw) = \ell(w) - 1$, i.e. $r \preceq w$; soit $\ell(rw) = \ell(w) + 1$, i.e. $r \preceq rw$.

(ii) Si $r \preceq w$, $\mathcal{M}(r) \subseteq \mathcal{M}(w)$ de façon évidente. Si $r \not\preceq w$, d'après (i), $r \preceq rw$. D'où $\mathcal{M}(rw) = \mathcal{M}(r) \oplus \mathcal{M}(w)$ par définition, et en particulier $\mathcal{M}(r) \not\subseteq \mathcal{M}(w)$.

(iii) Comme $r \neq r'$, $\ell(rr') = 2$, et $r \preceq rr'$. Donc si $rr' \preceq w$, on obtient $r \preceq w$, et par la propriété 3.4(iii), $r' \preceq r^{-1}w = rw$. Réciproquement, si $r \preceq w$ et $r' \preceq rw$, alors par définition $\ell(w) = \ell(rw) + 1$ et $\ell(rw) = \ell(r'rw) + 1$. D'où $\ell(r'rw) = \ell(w) - 2 = \ell(w) - \ell(rr')$, i.e. $rr' \preceq w$. L'autre équivalence est similaire.

(iv) et (v) On procède par récurrence sur p pour établir les propriétés (iv) et (v) simultanément (pour $p = 1$ elles sont triviales). Si r_1, \dots, r_p est une décomposition réduite de w , alors $r_1 \preceq w$, donc $\mathcal{M}(w) = \mathcal{M}(r_1) \oplus \mathcal{M}(r_1w)$. De plus, r_2, \dots, r_p est alors une décomposition réduite de r_1w , donc $\mathcal{M}(r_1w) = \bigoplus_{i=2}^p \mathcal{M}(r_i)$ par hypothèse de récurrence. D'où $\mathcal{M}(w) = \bigoplus_{i=1}^p \mathcal{M}(r_i) = \bigoplus_{i=1}^p \mathbb{R}\alpha_i$, et $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ est libre. Réciproquement, si $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ est libre, $(\alpha_2, \dots, \alpha_p)$ aussi donc par hypothèse de récurrence $\mathcal{M}(r_1w) = \bigoplus_{i=2}^p \mathcal{M}(r_i) = \bigoplus_{i=2}^p \mathbb{R}\alpha_i$. Ainsi $\mathcal{M}(r_1) = \mathbb{R}\alpha_1 \not\subseteq \mathcal{M}(r_1w)$, d'où, d'après les propriétés (i) et (ii), $r_1 \preceq w$ et $\alpha_1 \in \mathcal{M}(w)$. En particulier, $\mathcal{M}(w) = \mathcal{M}(r_1) \oplus \mathcal{M}(r_1w) = \bigoplus_{i=1}^p \mathcal{M}(r_i)$, et $\ell(w) = \dim \mathcal{M}(w) = p$, i.e. la décomposition est réduite.

(vi) Soient $1 \leq i < j \leq p$; on écrit $w = r_1 \dots r_i \dots r_j \dots r_p$, avec $\ell(w) = p$. Soit $u \in W$ tel que $r_{i+1} \dots r_j = r_j u$: u est un conjugué de $r_{i+1} \dots r_{j-1}$, donc est de longueur $j - i - 1$. Or w s'écrit $r_1 \dots r_i r_j u r_{j+1} \dots r_p$, avec $\ell(r_{j+1} \dots r_p) = p - j$. Donc le produit $r_i r_j$ est en facteur d'une décomposition réduite de w , i.e. $r_i r_j \preceq w$. \square

Pour $w \in W$, on note $\mathcal{R}_w := \{r \in \mathcal{R}, r \preceq w\}$ (appelé ensemble de réflexions de w).

Si l'on cherche un infimum de $u, v \in [1, c]$, une première approche serait de chercher un $w \in [1, c]$ «maximal» tel que $\mathcal{M}(w) \subseteq \mathcal{M}(u), \mathcal{M}(v)$; on peut être tenté de déterminer w tel que $\mathcal{M}(w) = \mathcal{M}(u) \cap \mathcal{M}(v)$. Cela ne peut malheureusement pas aboutir : donnons un contre-exemple tout simple dans \mathfrak{S}_4 . On pose $c := (1\ 2\ 3\ 4)$, $u := (1\ 2)(3\ 4)$, et $v := (1\ 4)(2\ 3)$; u et v sont bien inférieurs à c . Cependant $\mathcal{M}(u) \cap \mathcal{M}(v)$ est de dimension 1, donc un candidat w devrait être une réflexion, or aucune réflexion ne précède à la fois u et v .

Nous allons voir que par contre, ce genre d'idée fonctionne en remplaçant $\mathcal{M}(u)$ par \mathcal{R}_u .

Lemme 3.6

Soit $w \in W$. Alors :

- (i) $\mathcal{R}_w = \{r \in \mathcal{R}, \mathcal{M}(r) \subseteq \mathcal{M}(w)\}$. En particulier :
- $$\forall w' \in W, \mathcal{M}(w') \subseteq \mathcal{M}(w) \Rightarrow \mathcal{R}_{w'} \subseteq \mathcal{R}_w.$$
- (ii) $\mathcal{M}(w) = \sum_{r \in \mathcal{R}_w} \mathcal{M}(r)$. En particulier :
- $$\forall w' \in W, \mathcal{R}_{w'} \subseteq \mathcal{R}_w \Rightarrow \mathcal{M}(w') \subseteq \mathcal{M}(w).$$

Démonstration : (i) L'égalité est claire par la proposition 3.5(ii).

(ii) L'inclusion $\sum_{r \in \mathcal{R}_w} \mathcal{M}(r) \subseteq \mathcal{M}(w)$ est évidente. Pour l'autre inclusion, il suffit de considérer une décomposition réduite de w et d'utiliser 3.5(v). \square

Ce lemme permet d'établir une condition suffisante d'existence de l'infimum $u \wedge v$ de deux éléments u et v de W : celle-ci sera essentielle dans la preuve du théorème final, où l'on cherchera à écrire $\mathcal{R}_u \cap \mathcal{R}_v$ comme un \mathcal{R}_w pour $w \in [1, c]$. En effet, l'ensemble \mathcal{R}_u sera, à une bijection près, l'ensemble des sommets du complexe $X(u)$ que l'on construira en partie 5.2.

Proposition 3.7

Soient $a \in W$ et $u, v \in [1, a]$. Alors :

- (i) $\mathcal{R}_u \subseteq \mathcal{R}_v \Leftrightarrow u \preceq v$;
- (ii) si $w \in [1, a]$ est tel que $\mathcal{R}_w = \mathcal{R}_u \cap \mathcal{R}_v$, alors $w = u \wedge v$.

Démonstration : Le point (i) est conséquence du lemme précédent et du corollaire 2.7. Pour

(ii), soit $w \in [1, a]$ tel que $\mathcal{R}_w = \mathcal{R}_u \cap \mathcal{R}_v$. D'une part, comme $\mathcal{R}_w \subseteq \mathcal{R}_u, \mathcal{R}_v$, on obtient $w \preceq u, v$ d'après (i). D'autre part, pour $w' \in W$,

$$\begin{aligned} w' \preceq u, v &\Rightarrow \mathcal{R}_{w'} \subseteq \mathcal{R}_u, \mathcal{R}_v \\ &\Rightarrow \mathcal{R}_{w'} \subseteq \mathcal{R}_w \\ &\Rightarrow w' \preceq w, \end{aligned}$$

d'où par définition $w = u \wedge v$. \square

4. COMPLEXES SIMPLICIAUX SPHÉRIQUES

On donne ici les définitions et propriétés qui nous seront utiles plus loin, concernant les simplexes et complexes sphériques. L'article de Brady et Watt [BW3], ainsi que la littérature dans le domaine, étant assez vagues sur ce sujet précis, les définitions contenues dans cette partie ont été volontairement adaptées au problème, et ne sont donc pas forcément générales.

On fixe $n \geq 1$, et l'on va se placer dans la sphère \mathbf{S}^{n-1} .

4.1. Définitions.

On commence par une suite de définitions un peu longue mais assez intuitive : l'objectif est de plonger une structure abstraite de complexe simplicial dans la sphère \mathbf{S}^{n-1} .

Définition 4.1

Soit P une partie de la sphère \mathbf{S}^{n-1} . On dira que P est une partie aiguë si elle est contenue dans une demi-sphère stricte de \mathbf{S}^{n-1} . Si P est une partie aiguë, on définit :

- le cône sur P , noté $\mathcal{C}P : \{\lambda x, x \in P, \lambda \in \mathbb{R}^+\}$;
- le cône convexe sur $P : \{\sum_{i=0}^r \lambda_i x_i, r \in \mathbb{N}, x_i \in P, \lambda_i \in \mathbb{R}^+\}$;
- l'enveloppe convexe sphérique de P : trace sur \mathbf{S}^{n-1} du cône convexe sur P .

Il est facile de montrer (par exemple par récurrence) qu'une famille libre de vecteurs unitaires de \mathbb{R}^n forme automatiquement une partie aiguë de \mathbf{S}^{n-1} . Cela autorise la définition suivante :

Définition 4.2

Soit $\Sigma = \{x_0, \dots, x_p\}$ une famille libre de vecteurs unitaires de \mathbb{R}^n . On appelle simplexe sphérique défini par Σ l'enveloppe convexe sphérique de Σ . On le notera $\langle \Sigma \rangle$ ou $\langle x_0, \dots, x_p \rangle$.

On pose $\dim \langle \Sigma \rangle := p$, et on dit que $\langle \Sigma \rangle$ est un p -simplexe. On appelle facettes de $\langle \Sigma \rangle$ les simplexes $\langle \Sigma' \rangle$ pour $\Sigma' \subseteq \Sigma$, sommets les facettes de dimension 0, arêtes celles de dimension 1 et faces celles de dimension $(\dim \Sigma - 1)$. Enfin, on dit qu'un point est dans l'intérieur de $\langle \Sigma \rangle$ s'il est dans $\langle \Sigma \rangle$ mais dans aucune de ses facettes (strictes).

Si $\Sigma = \{x_0, \dots, x_p\}$ est tel que ci-dessus, le cône convexe sur Σ , qui est aussi le cône sur le simplexe sphérique $\langle \Sigma \rangle$ est appelé cône simplicial : on a $\mathcal{C} \langle \Sigma \rangle = \{\sum_{i=0}^p \lambda_i x_i, \lambda_i \in \mathbb{R}^+\}$. Il peut aussi se voir comme une intersection de demi-espaces de $E_\Sigma := \text{Vect}(x_0, \dots, x_p)$. Si l'on note $E_i := \text{Vect}(x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_p)$ (appelé *mur* du cône simplicial, ou par extension, mur du simplexe — c'est le support vectoriel d'une facette de Σ), et E_i^+ la composante connexe de $E_\Sigma - E_i$ qui contient x_i , alors :

$$\mathcal{C} \langle \Sigma \rangle = \bigcap_{i=0}^p E_i^+$$

D'autres part un point est dans l'intérieur de $\langle \Sigma \rangle$ si et seulement si il est combinaison linéaire à coefficients strictement positifs de x_0, \dots, x_p (et de norme 1).

Pour simplifier, et quand cela ne prête pas à confusion, on dira «simplexe» pour désigner tant l'ensemble Σ que la partie $\langle \Sigma \rangle$.

Définition 4.3

Soit X un ensemble de simplexes. On dira que X est un complexe simplicial sphérique s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

- (i) Si Σ est un simplexe de X , alors toute facette de Σ est encore un simplexe de X ;
- (ii) Si Σ et Σ' sont deux simplexes de X , alors $\langle \Sigma \rangle \cap \langle \Sigma' \rangle = \langle \Sigma \cap \Sigma' \rangle$.

La propriété (i) dit qu'on doit avoir une structure de complexe simplicial abstrait sur X , et (ii) assure que l'intersection géométrique de deux simplexes est soit vide soit un simplexe qui est une facette de chacun des deux.

Définition 4.4

Si X est un ensemble de simplexes, on note X_0 le 0-squelette de X , i.e. l'ensemble de tous les sommets des simplexes de X . On appelle dimension de X la dimension maximale de ses simplexes. Enfin, on note $\langle X \rangle$ l'union des $\langle \Sigma \rangle$ pour Σ simplexe de X .

Si $\langle X \rangle$ est dans une sphère de dimension p , alors $\dim X \leq p$. La réciproque est clairement fautive dans le cas général, mais devient vraie lorsque le complexe est «convexe» (et fini) : c'est l'objet de la partie suivante.

4.2. Propriété de convexité.

Désormais tous les complexes simpliciaux seront supposés finis, i.e. se composant d'un nombre fini de simplexes ; sinon cela poserait des problèmes de dimension. On supposera aussi toujours que leur 0-squelette forme une partie aiguë, ce qui permet de définir la convexité d'un complexe.

Définition 4.5

Soit P une partie aiguë de \mathbf{S}^{n-1} . On dira que P est convexe si $\mathcal{C}P$ (le cône sur P) est convexe.

Soit X un complexe simplicial sphérique. On dira que X est un complexe convexe si la partie $\langle X \rangle$ est convexe.

Remarque : Si X est un complexe simplicial sphérique, le cône sur $\langle X \rangle$ est inclus dans le cône convexe sur X_0 , puisque $\langle X \rangle$ est une partie de l'enveloppe convexe sphérique des sommets. Selon la définition ci-dessus, l'inclusion réciproque est vérifiée si et seulement si X est un complexe convexe.

Définition 4.6

Soit X un complexe de dimension d . On dira qu'il est purement de dimension d si :

- (i) tout simplexe de X est une facette d'un d -simplexe de X ;
- (ii) si Σ et Σ' sont deux d -simplexes de X , alors $\text{Vect}(\Sigma) = \text{Vect}(\Sigma')$.

Remarque importante : Les propriétés (i) et (ii) impliquent en particulier que pour tout d -simplexe Σ de X , $\text{Vect}(\Sigma) = \text{Vect}(\langle X \rangle)$, qui est aussi l'espace engendré par le 0-squelette X_0 ; le complexe est donc inclus dans une sphère de dimension d . Ce dernier point, associé à la proposition qui suit, servira de manière essentielle dans la preuve finale du théorème 10.1.

Proposition 4.7

Soit X un complexe de dimension d . Si X est un complexe convexe, alors X est purement de dimension d .

Remarque : Rappelons que le complexe est supposé fini; sinon la proposition est clairement fautive : on pourrait «empiler» une infinité de simplexes pour augmenter artificiellement la dimension, tout en conservant la convexité.

Démonstration : Soit X un complexe convexe de dimension d . Considérons un simplexe Σ maximal pour l'inclusion (*i.e.* qui n'est facette d'aucun autre simplexe). Notons $E_\Sigma := \text{Vect}(\Sigma)$; on va d'abord montrer que tout autre simplexe de X est alors contenu dans E_Σ .

Choisissons un point x dans l'intérieur de $\langle \Sigma \rangle$. Par maximalité de Σ , x n'est alors dans aucun autre simplexe de X . Puisque les simplexes sont compacts et en nombre fini, on peut trouver une boule B (dans \mathbb{R}^n) de centre x et de rayon strictement positif, qui ne rencontre que le simplexe $\langle \Sigma \rangle$. Considérons maintenant un autre simplexe de X , Σ' , et un point quelconque y dans $\langle \Sigma' \rangle$. Comme X est un complexe convexe, le segment $[x, y]$ doit être contenu dans le cône $\mathcal{C}\langle X \rangle$. Donc d'après ce qui précède, au voisinage de x il est nécessairement contenu dans $\mathcal{C}\langle \Sigma \rangle$, inclus dans E_Σ . Par suite le segment $[x, y]$ est contenu entièrement dans E_Σ , en particulier $y \in E_\Sigma$, et donc $\Sigma' \subseteq E_\Sigma$.

Cela implique clairement les deux propriétés de la définition 4.6 : en prenant pour Σ' un d -simplexe, on obtient $\dim E_\Sigma = d + 1$ et $E_{\Sigma'} = E_\Sigma$. \square

Dans la preuve finale, on utilisera de façon fondamentale la notion de convexité des complexes. Il est déjà intéressant de remarquer que si X est un complexe convexe, le cône sur $\langle X \rangle$ étant égal au cône convexe sur la partie finie X_0 , on obtient ce que l'on appelle un *cône polyédral*. D'après [Z, p. 30], celui-ci s'écrit donc comme intersection de demi-espaces de $\text{Vect}(X_0)$; les hyperplans de $\text{Vect}(X_0)$ associés à ces demi-espaces sont appelés les murs du cône $\mathcal{C}\langle X \rangle$, ou, par extension, les murs du complexe X . On a en outre la propriété suivante :

Propriété 4.8

Soit X un complexe sphérique convexe, de dimension d . Si M est un mur de X , alors M est nécessairement aussi un mur d'un d -simplexe de X .

Démonstration : Cela vient de la caractérisation classique suivante : un mur d'un cône polytopal C est un hyperplan de $\text{Vect}(C)$ qui intersecte C en dimension maximale, mais qui ne le partage pas en deux composantes connexes. \square

5. CONSTRUCTION DU COMPLEXE $X(c)$

On commence maintenant la preuve du théorème. Soit W un groupe de réflexions contenu dans $O(V)$, où V est un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. L'objectif est de montrer que pour tout élément de Coxeter c , l'intervalle $[1, c] \subseteq (W, \preceq)$ est un treillis. On peut d'abord se ramener facilement au cas où W est irréductible, puisque si $W = W_1 \times W_2$, l'ordre $\preceq_{\mathcal{R}}$ est l'ordre produit de \preceq_{R_1} et \preceq_{R_2} , où $\mathcal{R}_i := \mathcal{R} \cap W_i$. De plus, comme on sait que tous les éléments de Coxeter de W sont conjugués (voir partie 1), il suffit de le montrer pour un élément c bien choisi : en effet, d'après la proposition 3.4(ii), si $c' = aca^{-1}$, alors $[1, c'] = a[1, c]a^{-1}$.

On se fixe donc une chambre C , et on note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les vecteurs normaux aux murs de C , orientés vers l'intérieur de C . On a rappelé en partie 1 que $\Delta := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ est alors un système simple pour le système de racines Φ associé à W . On notera Φ^+ le système positif associé à Δ . On pose pour $i = 1, \dots, n$, $s_i := r_{\alpha_i}$, et $S := \{s_1, \dots, s_n\}$, de sorte que (W, S) est un système de Coxeter. D'après la proposition 1.2, le graphe de (W, S) est un arbre, il admet donc un 2-coloriage, *i.e.* on peut supposer quitte à réordonner les α_i qu'il existe $q \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\Delta_1 := \{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}$ et $\Delta_2 := \{\alpha_{q+1}, \dots, \alpha_n\}$ soient deux familles orthonormales. On va désormais travailler avec l'élément de Coxeter $c := s_1 \dots s_n$. Notons tout de suite que comme $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ est libre, cette décomposition est réduite (cf. 3.5(iv)), et donc $\dim \mathcal{M}(c) = \ell(c) = n$ *i.e.* $\mathcal{M}(c) = V$.

 5.1. Un ordre total sur Φ^+ .

On commence par munir le système de racines Φ d'un ordre total adapté à c . Soit h l'ordre de c . Il est connu que $\text{Card } \Phi = nh$. Dans l'article [S], Steinberg montre que si l'on pose :

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \rho_i := s_1 \dots s_{i-1}(\alpha_i),$$

où les indices des s et des α sont à prendre *modulo* n , alors $\Phi = \{\rho_1, \dots, \rho_{nh}\}$ (*). Tout d'abord on a clairement $\forall i, \rho_{i+nh} = \rho_i$. De plus, les ρ_i , $1 \leq i \leq nh$, se construisent itérativement à partir des α_i de la façon suivante :

$$\rho_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{pour } i = 1, \dots, q, \\ -c(\alpha_i) & \text{pour } i = q + 1, \dots, n, \\ c(\rho_{i-n}) & \text{pour } i > n. \end{cases}$$

La première égalité est directe : si $1 \leq i \leq q$, $\alpha_i \in \mathcal{F}(s_j)$ pour chaque $1 \leq j < i$, par orthonormalité de Δ_1 . De même, si $q + 1 \leq i \leq n$, on a $\forall n \geq j > i$, $\alpha_i \in \mathcal{F}(s_j)$, donc :

$$\begin{aligned} \rho_i &= s_1 \dots s_{i-1}(\alpha_i) \\ &= s_1 \dots s_{i-1} s_i(-\alpha_i) \\ &= -s_1 \dots s_{i-1} s_i \dots s_n(\alpha_i) \\ &= -c(\alpha_i). \end{aligned}$$

La dernière égalité est évidente par définition.

En admettant l'égalité (*) de Steinberg, on peut ajouter deux propriétés :

Proposition 5.1

Si les ρ_i sont donnés par les formules ci-dessus, alors :

- (i) $\Phi^+ = \{\rho_1, \dots, \rho_{nh/2}\}$;
- (ii) $\forall i, r_{\rho_{i+n-1}} \dots r_{\rho_{i+1}} r_{\rho_i} = c$.

Démonstration : Le point (i) vient de ce que $\rho_i = c^{-1}(\rho_{i+n})$, et que d'après la proposition 1.4, ρ_1, \dots, ρ_n doivent être exactement les racines positives envoyées par c^{-1} sur des racines négatives. Pour (ii), il suffit de montrer l'égalité pour $i = 1$ et d'itérer en utilisant le fait que $r_{\rho_{i+n}} = cr_{\rho_i}c^{-1}$. Or :

$$\begin{aligned} r_{\rho_1} \dots r_{\rho_n} &= r_{\alpha_1} \dots r_{\alpha_q} r_{-c(\alpha_{q+1})} \dots r_{-c(\alpha_n)} \\ &= s_1 \dots s_q c s_{q+1} c^{-1} \dots c s_n c^{-1} \\ &= (s_1 \dots s_q)^2 (s_{q+1} \dots s_n)^2 c^{-1} \\ &= c^{-1} \end{aligned}$$

puisque s_1, \dots, s_q (resp. s_{q+1}, \dots, s_n) commutent. \square

Notons que l'on peut aussi montrer que les racines simples $\alpha_{q+1}, \dots, \alpha_n$ se retrouvent à la fin de la numérotation de Φ^+ (tandis que les q premières sont au début).

La propriété (2) implique que pour tout i , $r_{\rho_i} \preccurlyeq c$ (c'était d'ailleurs déjà connu puisque $\mathcal{M}(c) = V \supseteq \mathcal{M}(r_{\rho_i})$). Donc $V = \mathcal{M}(r_{\rho_i}c) \oplus \mathcal{M}(r_{\rho_i})$. En particulier $\mathcal{M}(r_{\rho_i}c)$ est un hyperplan de V , ne contenant pas ρ_i ; cela nous permet de définir un générateur particulier de la droite $\mathcal{F}(r_{\rho_i}c)$:

Définition 5.2

On note μ_i l'unique vecteur de $\mathcal{F}(r_{\rho_i}c)$ vérifiant $\mu_i \cdot \rho_i = 1$.

Lemme 5.3

La famille des μ_i vérifie :

- (i) $\mu_{i+n} = c(\mu_i)$, pour $1 \leq i \leq n(h-1)$;
- (ii) $c(\mu_i) = \mu_i - 2\rho_i$, pour $1 \leq i \leq nh$;
- (iii) $\mu_i \cdot \rho_j = -\mu_{j+n} \cdot \rho_i$, pour $1 \leq i, j \leq nh$;
- (iv) (μ_1, \dots, μ_n) est la base duale de $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Remarque : En parlant de base duale on sous-entend qu'on a identifié V et V^* via le produit scalaire choisi sur V : le point (iv) signifie donc que pour tout i, j , $\mu_i \cdot \alpha_j = \delta_i^j$.

Démonstration :

- (i) Comme $r_{\rho_{i+n}}c = cr_{\rho_i}$, on a $r_{\rho_{i+n}}c(c(\mu_i)) = cr_{\rho_i}c(\mu_i) = c(\mu_i)$ par définition de μ_i , d'où $c(\mu_i) \in \mathcal{F}(r_{\rho_{i+n}}c)$. De plus $c(\mu_i) \cdot \rho_{i+n} = \mu_i \cdot c^{-1}(\rho_{i+n}) = \mu_i \cdot \rho_i = 1$.
- (ii) Comme $\mu_i \in \mathcal{F}(r_{\rho_i}c)$, on a : $c(\mu_i) = r_{\rho_i}(r_{\rho_i}c(\mu_i)) = r_{\rho_i}(\mu_i)$, d'où $c(\mu_i) = \mu_i - 2(\rho_i \cdot \mu_i)\rho_i = \mu_i - 2\rho_i$.
- (iii) D'après les deux points précédents, $-\mu_{j+n} \cdot \rho_i = -c(\mu_j) \cdot (-\frac{1}{2}(c(\mu_i) - \mu_i)) = \frac{1}{2}(\mu_j \cdot \mu_i - c(\mu_j) \cdot \mu_i) = \frac{1}{2}(2\rho_j \cdot \mu_i) = \rho_j \cdot \mu_i$.

(iv) Soit $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ la base duale de $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, calculons $c(\beta_i)$.

Si $j \neq i$, $s_j(\beta_i) = \beta_i$, donc :

$$\begin{aligned} c(\beta_i) &= s_1 \dots s_n(\beta_i) \\ &= s_1 \dots s_i(\beta_i) \\ &= s_1 \dots s_{i-1}(\beta_i - 2\alpha_i) \\ &= \beta_i - 2\rho_i \end{aligned}$$

D'où $\|\beta_i\|^2 = \|c(\beta_i)\|^2 = \|\beta_i\|^2 + 4\|\rho_i\|^2 - 4(\beta_i \cdot \rho_i)$ et donc $\beta_i \cdot \rho_i = 1$. En outre, on obtient : $r_{\rho_i}c(\beta_i) = r_{\rho_i}(\beta_i - 2\rho_i) = \beta_i - 2(\rho_i \cdot \beta_i)\rho_i - 2r_{\rho_i}(\rho_i) = \beta_i - 2\rho_i + 2\rho_i = \beta_i$, i.e. $\beta_i \in \mathcal{F}(r_{\rho_i}c)$. Donc $(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$. \square

Remarque : D'après [S], les vecteurs μ_1, \dots, μ_n sont en fait les «sommets» de la chambre C , c'est-à-dire que son adhérence \bar{C} est le cône convexe sur μ_1, \dots, μ_n .

Par la suite on aura particulièrement besoin de certaines propriétés des produits scalaires $(\mu_i \cdot \rho_j)$. Calculons-les d'abord dans un exemple.

Exemple : Dans [BW3] les calculs sont faits pour H_3 . Nous allons ici traiter l'exemple de B_3 .

On a donc $n = 3$ et $h = 6$. On pose $\alpha_1 := (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$, $\alpha_2 := (0, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ et $\alpha_3 := (1, 0, 0)$, de sorte que $\Delta_1 = \{\alpha_1\}$ et $\Delta_2 = \{\alpha_2, \alpha_3\}$ sont bien chacune des familles orthonormales. On calcule :

$$c = s_1 s_2 s_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{puis : } \begin{array}{lll} \rho_1 = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0) & \rho_2 = (-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2) & \rho_3 = (0, 1, 0) \\ \rho_4 = (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) & \rho_5 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0) & \rho_6 = (0, 0, 1) \\ \rho_7 = (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2) & \rho_8 = (0, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) & \rho_9 = (1, 0, 0) \end{array}$$

$$\text{et : } \begin{array}{lll} \mu_1 = (0, \sqrt{2}, \sqrt{2}) & \mu_2 = (0, 0, \sqrt{2}) & \mu_3 = (1, 1, 1) \\ \mu_4 = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}) & \mu_5 = (\sqrt{2}, 0, 0) & \mu_6 = (1, -1, 1) \\ \mu_7 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0) & \mu_8 = (0, -a, 0) & \mu_9 = (1, -1, 1) \end{array}$$

On en déduit ainsi la matrice $[(\mu_i \cdot \rho_j)]_{1 \leq i, j \leq 9}$:

	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_6	ρ_7	ρ_8	ρ_9
μ_1	1	1	$\sqrt{2}$	2	1	$\sqrt{2}$	1	0	0
μ_2	0	1	0	1	0	$\sqrt{2}$	1	1	0
μ_3	0	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	0	1
μ_4	-1	0	0	1	1	$\sqrt{2}$	2	1	$\sqrt{2}$
μ_5	-1	-1	0	0	1	0	1	0	$\sqrt{2}$
μ_6	$-\sqrt{2}$	0	-1	0	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
μ_7	-2	-1	$-\sqrt{2}$	-1	0	0	1	1	$\sqrt{2}$
μ_8	-1	0	$-\sqrt{2}$	-1	-1	0	0	1	0
μ_9	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	0	-1	0	0	1

Dans l'exemple on note que les éléments positifs, négatifs, ou nuls de la matrice $[(\mu_i \cdot \rho_j)]$ sont à des places bien particulières ; ceci se généralise dans la propriété suivante :

Propriété 5.4

Les produits $\mu_i \cdot \rho_j$ ont les propriétés suivantes :

- (i) $\mu_i \cdot \rho_j \geq 0$, pour $1 \leq i \leq j \leq nh/2$;
- (ii) $\mu_{i+k} \cdot \rho_i = 0$, pour $1 \leq k \leq n-1$ et pour tout i ;
- (iii) $\mu_j \cdot \rho_i \leq 0$, pour $1 \leq i < j \leq nh/2$.

Démonstration :

- (i) Comme $c(\mu_i) \cdot c(\rho_j) = \mu_i \cdot \rho_j$, on peut se ramener au cas où $1 \leq i \leq n$ et $i \leq j \leq nh/2$. Le vecteur μ_i est donc un élément de la base duale de $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, et en particulier, $\forall k, \mu_i \cdot \alpha_k \geq 0$. Or ρ_j est une racine positive, donc est combinaison linéaire à coefficients positifs des α_k . D'où $\mu_i \cdot \rho_j \geq 0$.
- (ii) Soit $1 \leq k \leq n-1$. On sait que $r_{\rho_{i+k}} \dots r_{\rho_{i+k-n+1}} = c$, donc r_{ρ_i} apparaît dans une décomposition réduite de $r_{\rho_{i+k}} c$. Par conséquent $\mathcal{M}(r_{\rho_i}) \subseteq \mathcal{M}(r_{\rho_{i+k}} c)$; or $\mathcal{M}(r_{\rho_{i+k}} c) = \mu_{i+k}^\perp$, par définition de μ_{i+k} . D'où $\rho_i \cdot \mu_{i+k} = 0$.
- (iii) Soient $1 \leq i < j \leq nh/2$. Si $j < i+n$, (ii) implique que $\mu_j \cdot \rho_i = 0$. Si $j \geq i+n$, d'après le lemme 5.3(iii) : $\mu_j \cdot \rho_i = -\mu_{i+n} \cdot \rho_j$. Or $\mu_{i+n} \cdot \rho_j \geq 0$ d'après (i). \square

Notations : afin d'éviter l'excès d'indices, on notera, pour $\rho \in \Phi$, $\mu(\rho)$ le vecteur μ_i avec i tel que $\rho = \rho_i$. On notera également \leq l'ordre total sur Φ issu de la numérotation de Steinberg ($\rho_i \leq \rho_j \Leftrightarrow i \leq j$).

5.2. Le complexe $X(c)$.

Nous allons définir $X(c)$ comme un ensemble bien choisi de simplexes construits à partir des éléments de Φ^+ . c'est-à-dire :

Définition 5.5

On note $X(c)$ l'ensemble des simplexes suivants :

- 0-simplexes : éléments de Φ^+ ;
- k -simplexes, pour $k \geq 1$: ensembles Σ tels que pour tout $\rho, \rho' \in \Sigma$, si $\rho < \rho'$, alors $r_\rho r_{\rho'} \preceq c^{-1}$.

Par commodité on parlera dans la suite du «complexe» $X(c)$, bien qu'il ne soit pas clair que c'est un complexe simplicial sphérique au sens de la définition 4.3 — ce sera l'objet du théorème 9.2. Par contre, $X(c)$ a par construction une structure de complexe simplicial abstrait : c'est ce qu'on appelle le complexe de drapeaux sur le graphe de sommets Φ^+ et d'arêtes les $\{\rho, \rho'\}$, où $\rho < \rho'$ et $r_\rho r_{\rho'} \preceq c^{-1}$.

Notons que les ensembles Σ que l'on a défini comme k -simplexes ne forment pas de façon évidente des familles libres, ce qui est pourtant nécessaire dans notre définition de simplexe sphérique. Cette propriété est contenue dans les caractérisations suivantes :

Proposition 5.6

Soit $k \geq 2$, et $\sigma_1 < \dots < \sigma_k$ dans Φ^+ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_k \rangle$ simplexe de $X(c)$
- (2) $\forall i > j, \mu(\sigma_i) \cdot \sigma_j = 0$
- (3) $\ell(r_{\sigma_1} \dots r_{\sigma_k} c) = n - k$
- (4) $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ libre et $r_{\sigma_1} \dots r_{\sigma_k} \preceq c^{-1}$

Démonstration : L'équivalence (3) \Leftrightarrow (4) est facile. Si (3) est vérifiée, on obtient :

$$\begin{aligned} n = \ell(c^{-1}) &\leq \ell(r_{\sigma_1} \dots r_{\sigma_k}) + \ell(r_{\sigma_k} \dots r_{\sigma_1} c^{-1}) \\ &= \ell(r_{\sigma_1} \dots r_{\sigma_k}) + \ell(r_{\sigma_1} \dots r_{\sigma_k} c) \\ &\leq k + n - k = n \end{aligned}$$

d'où égalité dans la première inégalité, *i.e.* par définition $r_{\sigma_1} \dots r_{\sigma_k} \preceq c^{-1}$, et égalité dans la deuxième, *i.e.* $\ell(r_{\sigma_1} \dots r_{\sigma_k}) = k$ donc $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ libre. Réciproquement, si on suppose (4), alors $\ell(r_{\sigma_1} \dots r_{\sigma_k} c) = \ell(r_{\sigma_k} \dots r_{\sigma_1} c^{-1}) = \ell(c^{-1}) - \ell(r_{\sigma_1} \dots r_{\sigma_k}) = n - k$, par définition de l'ordre.

(3) \Rightarrow (2). Posons $u := r_{\sigma_1} \dots r_{\sigma_k} c$. On suppose que $\ell(u) = n - k$. Soient $i > j$. Il suffit de montrer que $r_{\sigma_j} \preceq r_{\sigma_i} c$, puisque $\mathcal{M}(r_{\sigma_j}) = \mathbb{R}\sigma_j$ et $\mathcal{M}(r_{\sigma_i} c) = \mu(\sigma_i)^\perp$. Or l'écriture $c = r_{\sigma_k} \dots r_{\sigma_1} u$ est une décomposition réduite de c , puisque $\ell(u) = \ell(c) - k$. Donc d'après la proposition 3.5(vi), $r_{\sigma_i} r_{\sigma_j} \preceq c$, et donc $r_{\sigma_j} \preceq r_{\sigma_i} c$ (par 3.5(iii)).

(2) \Rightarrow (3). L'assertion (2) implique que la matrice $[\mu(\sigma_i) \cdot \sigma_j]_{1 \leq i, j \leq k}$ est triangulaire supérieure. On sait aussi que sa diagonale est constituée de 1, donc cette matrice est inversible. En particulier, les familles $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ et $(\mu(\sigma_1), \dots, \mu(\sigma_k))$ sont libres.

Procédons par récurrence descendante sur i pour montrer que :

$$\forall 1 \leq i \leq k, \ell(r_{\sigma_i} \dots r_{\sigma_k} c) = n - (k - i + 1)$$

ou, de façon équivalente (puisque $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ est libre), que $\forall 1 \leq i \leq k, r_{\sigma_k} \dots r_{\sigma_i} \preceq c$.

Pour $i = k$ c'est clair puisque $r_{\sigma_k} \preceq c$.

Soit $1 \leq i < k$, on suppose que $\ell(r_{\sigma_{i+1}} \dots r_{\sigma_k} c) = n - (k - i)$. Comme $(\sigma_{i+1}, \dots, \sigma_k)$ est libre, $\ell(r_{\sigma_k} \dots r_{\sigma_{i+1}}) = k - i$. Donc : $\forall j \in \{i+1, \dots, k\}$, $r_{\sigma_j} \preceq r_{\sigma_k} \dots r_{\sigma_{i+1}} \preceq c$, et par la proposition 3.4(iii), $(r_{\sigma_k} \dots r_{\sigma_{i+1}})^{-1} c \preceq r_{\sigma_j}^{-1} c$. D'où $\mathcal{F}(r_{\sigma_j} c) \subseteq \mathcal{F}(r_{\sigma_{i+1}} \dots r_{\sigma_k} c)$, c'est-à-dire : $\forall j \in \{i+1, \dots, k\}$, $\mu(\sigma_j) \in \mathcal{F}(r_{\sigma_{i+1}} \dots r_{\sigma_k} c)$.

Or, par hypothèse de récurrence, $\text{codim } \mathcal{F}(r_{\sigma_{i+1}} \dots r_{\sigma_k} c) = \ell(r_{\sigma_{i+1}} \dots r_{\sigma_k} c) = n - (k - i)$, donc $(\mu(\sigma_{i+1}), \dots, \mu(\sigma_k))$ est une base de $\mathcal{F}(r_{\sigma_{i+1}} \dots r_{\sigma_k} c)$. Comme $\forall j \in \{i+1, \dots, k\}$, $\sigma_i \cdot \mu(\sigma_j) = 0$, on en déduit $\sigma_i \in \mathcal{M}(r_{\sigma_{i+1}} \dots r_{\sigma_k} c)$, *i.e.* $r_{\sigma_i} \preceq r_{\sigma_{i+1}} \dots r_{\sigma_k} c$ d'après 3.5(ii). D'où finalement : $\ell(r_{\sigma_i} \dots r_{\sigma_k} c) = \ell(r_{\sigma_{i+1}} \dots r_{\sigma_k} c) - 1 = n - (k - i + 1)$, ce qui termine la récurrence, et démontre l'assertion (3) en prenant $i = 1$.

À partir de là, (1) \Leftrightarrow (2) est évident :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1, \dots, \sigma_k \rangle \text{ simplexe de } X(c) &\Leftrightarrow \forall j < i, r_{\sigma_j} r_{\sigma_i} \preceq c^{-1} \quad (\text{par définition}) \\ &\Leftrightarrow \forall j < i, \mu(\sigma_i) \cdot \sigma_j = 0 \quad ((2) \Leftrightarrow (4) \text{ appliquée à } \{\sigma_j, \sigma_i\}) \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. \square

Une conséquence particulière de cette caractérisation est qu'on peut d'ores et déjà visualiser plusieurs simplexes de $X(c)$. En effet, comme pour tout i , $r_{\rho_i} \cdots r_{\rho_{i+n-1}} = c^{-1}$, on obtient les simplexes (maximaux) suivants : $\langle \rho_i, \dots, \rho_{i+n-1} \rangle$ pour $i = 1, \dots, nh/2 - (n-1)$.

Exemple : Grâce au calcul des produits scalaires $(\mu_i \cdot \rho_j)$ effectués dans la partie précédente, on peut donc déterminer le complexe $X(c)$ dans le cas de B_3 . On se place dans la demi-sphère $z \geq 0$ de \mathbf{S}^2 , et les figures sont faites en projection sur le plan équateur. Dans la figure 2 on a tracé les intersections des hyperplans μ_i^\perp avec la demi-sphère. La figure 3 représente le complexe $X(c)$: ses simplexes sont exactement tous les sommets, toutes les arêtes minimales, et tous les triangles sphériques minimaux qui apparaissent. Ceci est une traduction du fait que $X(c)$ est effectivement un complexe simplicial sphérique (voir partie 9). D'autre part, on note qu'il suffit pour obtenir le complexe de tracer la figure 2 et d'effacer les courbes ne reliant pas deux ρ_j : cela provient du caractère convexe du complexe, que nous démontrerons aussi dans la partie 9. La partie $\langle X(c) \rangle$ est ainsi l'enveloppe convexe sphérique des racines simples, ici ρ_1, ρ_8 , et ρ_9 . On peut remarquer une particularité supplémentaire : si l'on se restreint aux simplexes dont les sommets sont tous inférieurs à un ρ_j fixé, on obtient encore un complexe sphérique convexe ; cette propriété nous incitera à procéder par récurrence dans les démonstrations futures.

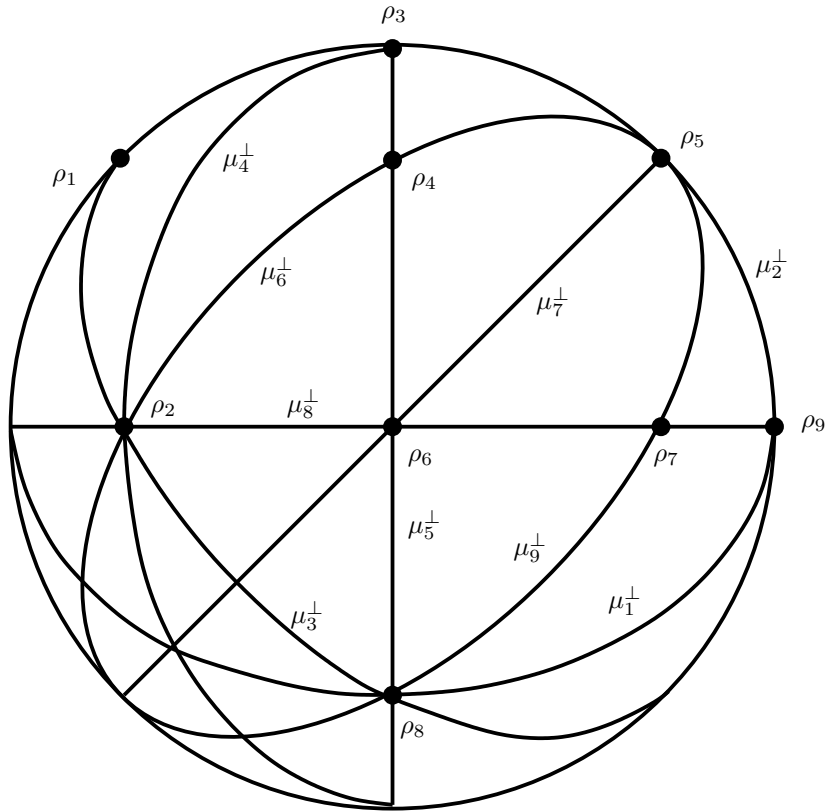
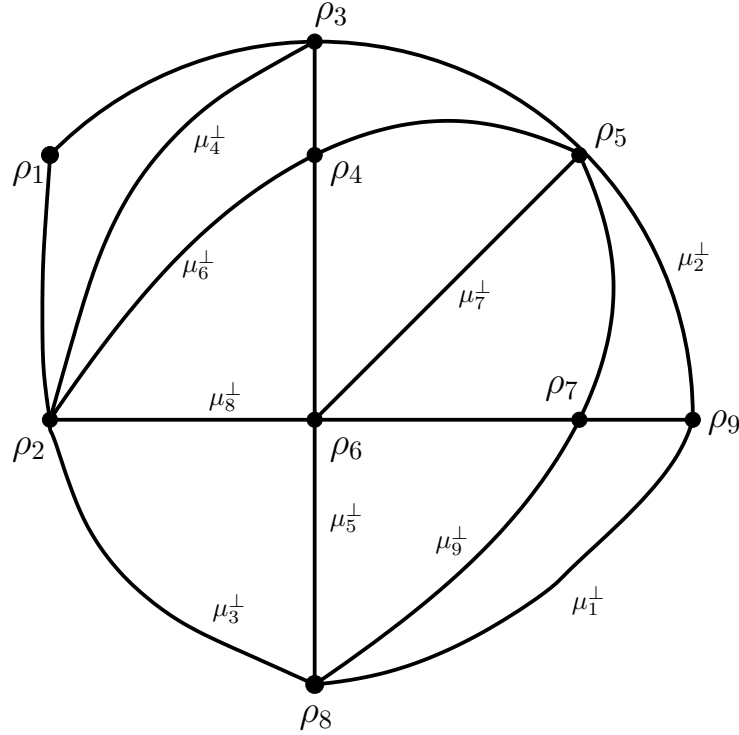


FIG. 2. Les hyperplans μ_i^\perp , «murs» des simplexes de $X(c)$.


 FIG. 3. Le complexe $X(c)$ dans l'exemple de B_3 .

Le lemme suivant généralise une propriété que l'on voit également dans l'exemple, concernant la position relative des sommets de $X(c)$:

Lemme 5.7

Soient $k \geq 2$ et $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in \Phi^+$, tels que $\sigma_1 < \dots < \sigma_k$ pour l'ordre sur Φ^+ . Alors :

- la racine σ_k n'appartient pas au cône convexe sur $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$;
- la racine σ_1 n'appartient pas au cône convexe sur $\sigma_2, \dots, \sigma_k$.

Démonstration : C'est un corollaire de la propriété 5.4 :

- Si $\sigma_k = \lambda_1 \sigma_1 + \dots + \lambda_{k-1} \sigma_{k-1}$, avec $\lambda_i \geq 0$, alors le produit scalaire avec $\mu(\sigma_k)$ donne : $1 = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \mu(\sigma_k) \cdot \sigma_i$. Or pour $i < k$, d'après 5.4(iii), $\mu(\sigma_k) \cdot \sigma_i \leq 0$. Contradiction.
- Supposons $\sigma_1 = \lambda_2 \sigma_2 + \dots + \lambda_k \sigma_k$, avec $\lambda_i \geq 0$. On fait le produit avec $c(\mu(\sigma_1))$: par le lemme 5.3(iii), $c(\mu(\sigma_1)) \cdot \sigma_i = -\mu(\sigma_i) \cdot \sigma_1$, donc vaut -1 si $i = 1$, et est positif si $i > 1$ (par la propriété 5.4(iii)). Contradiction. \square

6. SOUS-COMPLEXES DE $X(c)$

6.1. Racines associées à un élément de $[1, c]$.

Pour $u \in [1, c]$, on pose $\Phi_u^+ := \{\rho \in \Phi^+, r_\rho \preceq u\} = \Phi^+ \cap \mathcal{M}(u)$; Φ_u^+ est en bijection naturelle avec l'ensemble \mathcal{R}_u défini dans la partie 3. Notons que Φ_u^+ est l'ensemble des

racines positives pour le sous-groupe parabolique $W_u := \{w \in W, \mathcal{M}(w) \subseteq \mathcal{M}(u)\}$ — W_u , qui est aussi le fixateur de $\mathcal{F}(u)$, est un groupe de réflexions de rang $\ell(u)$. Ainsi Φ_u^+ contient un système de racines simples, que l'on notera Δ_u .

Notons d'abord que pour $\tau \in \Phi_u^+$, $\mathcal{M}(r_\tau u)$ est un hyperplan de $\mathcal{M}(u)$, que l'on peut déterminer, comme pour $\mathcal{M}(r_\tau c)$, à l'aide de $\mu(\tau)$:

Lemme 6.1

Soit $\tau \in \Phi_u^+$. Alors :

$$\mathcal{M}(r_\tau u) = \mathcal{M}(u) \cap \mu(\tau)^\perp \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(r_\tau u) = \mathcal{F}(u) \oplus \mathbb{R}\mu(\tau)$$

Démonstration : D'une part $r_\tau \preceq u$, donc $r_\tau u \preceq u$ (d'après 3.4(i)) et $\mathcal{M}(r_\tau u) \subseteq \mathcal{M}(u)$. D'autre part $r_\tau \preceq u \preceq c$, donc par 3.4(iii) $r_\tau u \preceq r_\tau c$ et $\mathcal{M}(r_\tau u) \subseteq \mathcal{M}(r_\tau c) = \mu(\tau)^\perp$. Enfin $\mathcal{M}(u) \not\subseteq \mu(\tau)^\perp$ car $\tau \in \mathcal{M}(u)$ et $\mu(\tau) \cdot \tau = 1$; donc $\dim \mathcal{M}(u) \cap \mu(\tau)^\perp = \ell(u) - 1 = \dim \mathcal{M}(r_\tau u)$.

La deuxième égalité est une conséquence directe de la première. \square

Cela nous permet au passage de déterminer la forme générale des murs d'un simplexe de $X(c)$:

Proposition 6.2

Soit $\Sigma := \langle \sigma_1, \dots, \sigma_k \rangle$ un simplexe de $X(c)$, avec $\sigma_1 < \dots < \sigma_k$. Alors un mur de Σ est de la forme :

$$\mathcal{M}(u) \cap \mu(\tau)^\perp, \quad \text{où} \quad u := r_{\sigma_k} \dots r_{\sigma_1} \quad \text{et} \quad \tau \in \Phi_u^+$$

Démonstration : Soit $u := r_{\sigma_k} \dots r_{\sigma_1}$. Comme Σ est un simplexe, $u \preceq c$. Un mur de Σ est par définition de la forme $E_i := \text{Vect}(\sigma_1, \dots, \widehat{\sigma}_i, \dots, \sigma_k)$. Par conjugaison, il existe $r \in \mathcal{R}$, tel que $u = r r_{\sigma_k} \dots \widehat{r_{\sigma_i}} \dots r_{\sigma_1}$. Comme $\ell(u) = k$, $r \preceq u$ donc $r = r_\tau$ pour $\tau \in \Phi_u^+$. Enfin, comme $(\sigma_1, \dots, \widehat{\sigma}_i, \dots, \sigma_k)$ est libre, d'après 3.5(iv) $E_i = \mathcal{M}(r_{\sigma_k} \dots \widehat{r_{\sigma_i}} \dots r_{\sigma_1}) = \mathcal{M}(r_\tau u)$, d'où $E_i = \mathcal{M}(u) \cap \mu(\tau)^\perp$ par le lemme 6.1. \square

Pour $u \preceq c$ donné, notons maintenant $\delta_1 < \dots < \delta_{\ell(u)}$ les racines simples constituant Δ_u , ordonnées selon l'ordre de Φ^+ . Alors on a l'égalité suivante, analogue du fait que $c = r_{\alpha_1} \dots r_{\alpha_n}$:

Proposition 6.3

Soit $u \in [1, c]$. Si $\Delta_u = \{\delta_1 < \dots < \delta_{\ell(u)}\}$, alors :

$$u = r_{\delta_1} \dots r_{\delta_{\ell(u)}}$$

Démonstration : On procède par récurrence sur $\ell(u)$. Si $\ell(u) = 1$ c'est évident. Soit $p \geq 2$, et $u \in [1, c]$ de longueur p ; on suppose l'égalité vérifiée pour tout $v \in [1, c]$ de longueur $p - 1$. On note $\Delta_u = \{\delta_1 < \dots < \delta_p\}$, et on pose naturellement $v := r_{\delta_1} u$. Comme $\delta_1 \in \Phi_u^+$,

$v \preceq u \preceq c$ et $\ell(v) = p - 1$. Donc, par hypothèse de récurrence, il suffit pour conclure de montrer que $\Delta_v = \{\delta_2 < \dots < \delta_p\}$.

Soit $\tau \in \Phi_v^+ : \Phi_v^+ \subseteq \Phi_u^+$ donc τ s'écrit $\lambda_1\delta_1 + \dots + \lambda_p\delta_p$, avec $\lambda_i \geq 0$. Or $r_\tau \preceq v = r_{\delta_1}u$ donc $\mu(\delta_1) \cdot \tau = 0$ (cf. 6.1); $\mu(\delta_1) \cdot \delta_1 = 1$; et pour $i > 1$, $\mu(\delta_1) \cdot \delta_i \geq 0$ (par 5.4). D'où, via l'égalité $\mu(\delta_1) \cdot \tau = \sum_i \lambda_i \mu(\delta_1) \cdot \delta_i$, on obtient $\lambda_1 = 0$. Chaque racine de Φ_v^+ est ainsi combinaison linéaire à coefficients positifs de $\delta_2, \dots, \delta_p$. Or Φ_v^+ engendre $\mathcal{M}(v)$, qui est de dimension $p - 1$. Donc nécessairement $\delta_2, \dots, \delta_p \in \mathcal{M}(v) \cap \Phi^+ = \Phi_v^+$, et par unicité des racines simples associées à un système de racines positives, on obtient bien que $\{\delta_2 < \dots < \delta_p\} = \Delta_v$. \square

Proposition 6.4

Soit $\Delta_u = \{\delta_1 < \dots < \delta_{\ell(u)}\}$ le système de racines simples relatif à Φ_u^+ , ordonné selon l'ordre sur Φ^+ . Alors :

$$\delta_1 = \min \Phi_u^+, \text{ et } \delta_{\ell(u)} = \max \Phi_u^+$$

Remarque : Cette propriété se généralise en une caractérisation exhaustive des racines simples : on peut montrer que pour tout i , δ_i est la première racine positive contenue dans l'espace $\mathcal{M}(r_{\delta_{i-1}} \dots r_{\delta_2} r_{\delta_1} u)$, et également la dernière racine positive dans $\mathcal{M}(ur_{\delta_{\ell(u)}} r_{\delta_{\ell(u)-1}} \dots r_{\delta_{i+1}})$ (cf. [BW3, Th. 5.1]).

Démonstration : Posons $\Phi_u^+ = \{\tau_1 < \dots < \tau_t\}$. D'après le lemme 5.7, τ_t n'est pas combinaison linéaire à coefficients positifs des racines précédentes, donc τ_t est nécessairement une racine simple, et $\tau_t = \max \Delta_u = \delta_{\ell(u)}$. De même, τ_1 n'est pas combinaison linéaire à coefficients positifs des racines suivantes, donc τ_1 est une racine simple, et $\tau_1 = \min \Delta_u = \delta_1$. \square

6.2. Les sous-complexes $X(u)$.

Pour $u \in [1, c]$, on définit $X(u)$ comme le sous-ensemble de $X(c)$ constitué des simplexes dont tous les sommets sont dans Φ_u^+ . On peut montrer facilement qu'on a des caractérisations des simplexes de $X(u)$ similaires à celles vues pour $X(c)$ (cf. proposition 5.6) :

Proposition 6.5

Soient $u \in [1, c]$, $k \geq 2$ et $\sigma_1 < \dots < \sigma_k$ dans Φ^+ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_k \rangle$ simplexe de $X(u)$
- (2) $\ell(r_{\sigma_1} \dots r_{\sigma_k} u) = \ell(u) - k$
- (3) $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ libre et $r_{\sigma_1} \dots r_{\sigma_k} \preceq u^{-1}$

Démonstration :

(2) \Leftrightarrow (3) : Mêmes arguments que pour $X(c)$.

(3) \Rightarrow (1) : La famille $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ est libre donc pour $i = 1, \dots, k$, $r_{\sigma_i} \preceq r_{\sigma_1} \dots r_{\sigma_k} \preceq u^{-1}$, d'où $r_{\sigma_i} \preceq u$ i.e. $\sigma_i \in \Phi_u^+$. D'autre part, comme $u \preceq c$, on a aussi $r_{\sigma_1} \dots r_{\sigma_k} \preceq c^{-1}$, donc $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_k \rangle$ est un simplexe de $X(c)$ d'après la proposition 5.6.

(1) \Rightarrow (3) : Si $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_k \rangle$ est un simplexe de $X(u)$, c'en est un de $X(c)$ donc $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ est libre, et $r_{\sigma_1} \dots r_{\sigma_k} \preceq c^{-1}$. De plus, $\forall i, \sigma_i \in \Phi_u^+$, donc $r_{\sigma_i} \preceq u$. D'où :

$$\mathcal{M}(r_{\sigma_1} \dots r_{\sigma_k}) = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{M}(r_{\sigma_i}) \subseteq \mathcal{M}(u) = \mathcal{M}(u^{-1})$$

avec $u^{-1} \preceq c^{-1}$ et $r_{\sigma_1} \dots r_{\sigma_k} \preceq c^{-1}$, ce qui implique, par le corollaire 2.7, que $r_{\sigma_1} \dots r_{\sigma_k} \preceq u^{-1}$. \square

Notons que $X(u)$ est toujours inclus dans $\mathcal{M}(u) \cap \mathbf{S}^{n-1}$, qui est la sphère de dimension $(\ell(u) - 1)$. Donc les simplexes de $X(u)$ sont de dimension inférieure à $(\ell(u) - 1)$. S'il existe un simplexe de cette dimension, alors il détermine u ; en effet, si $\sigma_0 < \dots < \sigma_{\ell(u)}$ sont les sommets d'un $(\ell(u) - 1)$ -simplexe, on a $r_{\sigma_{\ell(u)}} \dots r_{\sigma_1} r_{\sigma_0} = u$.

7. LE CAS DE LA LONGUEUR 2 ; APPLICATIONS

On va maintenant commencer par étudier $X(u)$ dans le cas où u est de longueur 2. Ce cas, plus simple, sera à la base de l'étude générale. On note $\Phi_u^+ = \{\tau_1 < \dots < \tau_m\}$ le système de racines ordonné, et $\Delta_u = \{\delta_1 < \delta_2\}$ les deux racines simples. Le groupe W_u est alors $I_2(m)$, et u est une rotation d'angle $\pm 2\pi/m$ dans le plan $\mathcal{M}(u)$.

D'après la proposition 6.4, $\delta_1 = \tau_1$ et $\delta_2 = \tau_m$. D'autre part, par les caractérisations 5.6 et 6.5, si $\sigma < \tau$ sont deux racines de Φ_u^+ , on a :

$$\begin{aligned} \langle \sigma, \tau \rangle \text{ simplexe de } X(u) &\Leftrightarrow r_\tau r_\sigma = u \\ &\Leftrightarrow \mu(\tau) \cdot \sigma = 0 \end{aligned}$$

Cela va nous permettre de déterminer complètement $X(u)$:

Théorème 7.1

Soit u un élément de $[1, c]$ de longueur 2; les notations sont celles du paragraphe ci-dessus. Alors $X(u)$ est le graphe de sommets τ_1, \dots, τ_m et d'arêtes $\langle \tau_i, \tau_{i+1} \rangle$, pour $i = 1, \dots, m - 1$.

Démonstration : Pour $\tau \in \Phi_u^+$, $r_\tau \preceq u$ donc $\exists! \tau' \in \Phi^+$, $u = r_\tau r_{\tau'}$, i.e. $\mu(\tau) \cdot \tau' = 0$; de plus $\tau' \in \Phi_u^+$ puisque $r_{\tau'} \preceq u$. De même, $\forall \tau \in \Phi_u^+$, $\exists! \tau'' \in \Phi_u^+$, $u = r_{\tau''} r_\tau$, i.e. $\mu(\tau'') \cdot \tau = 0$. Considérons la matrice $A := [\mu(\tau_i) \cdot \tau_j]_{1 \leq i, j \leq m}$; on sait que sa diagonale est faite de 1, que les éléments au-dessus sont positifs, et les éléments au-dessous négatifs (par la propriété 5.4). De plus, par ce qui précède, A comporte un unique zéro sur chaque ligne, et un unique zéro sur chaque colonne. Il faut déterminer où sont ces zéros; les zéros en dessous de la diagonale correspondront alors par définition aux 1-simplexes de $X(u)$.

Commençons par la ligne de τ_1 . Comme $\tau_1 < \tau_m$ sont les racines simples pour Φ_u^+ , la proposition 6.3 permet d'écrire : $u = r_{\tau_1} r_{\tau_m}$. D'où $\mu(\tau_1) \cdot \tau_m = 0$, ce qui donne un zéro de A au-dessus de la diagonale.

Montrons maintenant, par récurrence (forte) sur i , que : $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $u = r_{\tau_i} r_{\tau_{i-1}}$, où l'on a posé $\tau_0 := \tau_m$.

Le cas $i = 1$ vient d'être traité. Soit donc $1 \leq i \leq m - 1$, et supposons que $u = r_{\tau_1} r_{\tau_m} = r_{\tau_2} r_{\tau_1} = \dots = r_{\tau_i} r_{\tau_{i-1}}$. Montrons que $u = r_{\tau_{i+1}} r_{\tau_i}$, i.e. que $\mu(\tau_{i+1}) \cdot \tau_i = 0$. Soit τ l'unique racine de Φ_u^+ telle que $\mu(\tau) \cdot \tau_i = 0$. Par hypothèse de récurrence, on a déjà déterminé,

dans la matrice A , les zéros des lignes $1, 2, \dots, i$: ceux-ci sont situés respectivement sur les colonnes $m, 1, \dots, i-1$. Donc nécessairement $\tau \geq \tau_{i+1}$.

Dans le cas où $i = m-1$ on a fini puisqu'on obtient $\tau = \tau_m$. Si $i < m-1$, supposons par l'absurde que $\tau > \tau_{i+1}$. On a alors $\mu(\tau) \cdot \tau_{i+1} \leq 0$. Mais comme $\mathcal{M}(u)$ est de dimension 2 et que (τ_i, τ_m) est libre, on peut écrire $\tau_{i+1} = a\tau_i + b\tau_m$, avec $a, b \neq 0$ puisque $\tau_i < \tau_{i+1} < \tau_m$. En exprimant τ_m en fonction de τ_i et τ_{i+1} , puis τ_i en fonction de τ_{i+1} et τ_m , on peut utiliser le lemme 5.7 pour en déduire que a et b ont même signe. Comme $\tau_i, \tau_{i+1}, \tau_m$ sont des racines positives, a et b sont tous deux positifs. D'où $\mu(\tau) \cdot \tau_{i+1} = b\mu(\tau) \cdot \tau_m \geq 0$, et donc $\mu(\tau) \cdot \tau_{i+1} = 0$. C'est une contradiction, car τ_i doit être l'unique racine de Φ_u^+ orthogonale à $\mu(\tau)$.

Finalement $\tau = \tau_{i+1}$, $\mu(\tau_{i+1}) \cdot \tau_i = 0$, et $r_{\tau_{i+1}}r_{\tau_i} = u$, ce qui conclut la récurrence. Les zéros de la matrice sont ainsi sur la première sous-diagonale, et sur le coin en haut à droite, ce qui donne bien les 1-simplexes $\langle \tau_i, \tau_{i+1} \rangle$ pour $i = 1, \dots, m-1$. \square

Remarque : D'après 1.4, pour $\tau \in \Delta_u$, r_τ envoie τ sur $-\tau$, et permute $\Phi_u^+ - \{\tau\}$. Dans le cas où u est de longueur 2, le théorème précédent, en donnant la liste des décompositions réduites de u , permet de déterminer exactement cette permutation. Par exemple, comme $u = r_{\tau_1}r_{\tau_m} = r_{\tau_2}r_{\tau_1}$, on a $r_{\tau_2} = r_{\tau_1}r_{\tau_m}r_{\tau_1}^{-1} = r_{r_{\tau_1}(\tau_m)}$, donc $\tau_2 = \pm r_{\tau_1}(\tau_m) = +r_{\tau_1}(\tau_m)$ puisque τ_m ne peut être envoyé par r_{τ_1} sur une racine négative. De même, on peut obtenir $r_{\tau_m}(\tau_1) = \tau_{t-1}$; ces deux formules seront utiles plus loin. D'autres formules de ce type, obtenues similairement et par récurrence, sont données dans le lemme 5.5 de [BW3].

Ce théorème permet également d'étudier ce qui se passe localement dans $X(u)$ dans le cas général. Un arc de cercle dans $X(u)$ définit un sous-groupe parabolique de type $I_2(m)$, et un élément $v \preceq u$ de longueur 2, et d'ordre m . Le nombre m correspond aux nombres de racines de sommets situés sur l'arc de cercle. Ainsi dans l'exemple de B_3 (figure 3), on voit les sous-groupes paraboliques standards de type I_2 sur les «côtés» du grand triangle sphérique (ρ_1, ρ_8, ρ_9) ; les ordres sont 2, 3, 4, ce qui correspond bien au diagramme de Coxeter de B_3 .

On obtient en outre le corollaire suivant :

Corollaire 7.2

Soit $u \in [1, c]$ de longueur quelconque, et $\sigma, \tau \in \Phi_u^+$, tels que $\sigma < \tau$ et $r_\sigma r_\tau \preceq u$. Posons $v := r_\sigma r_\tau$. Alors :

- $\sigma = \min \Phi_v^+$ et $\tau = \max \Phi_v^+$;
- $\Delta_v = \{\sigma, \tau\}$;
- $r_\tau(\sigma) \in \Phi_v^+$, et $r_\tau(\sigma) < \tau$;
- $r_\sigma(\tau) \in \Phi_v^+$, et $r_\sigma(\tau) > \sigma$.

Démonstration : Si on pose $\Phi_v^+ = \{\sigma_1 < \dots < \sigma_m\}$, on sait par la proposition 6.4 que $\Delta_v = \{\sigma_1, \sigma_m\}$. De plus, comme on l'a vu dans la preuve du théorème précédent, les décompositions réduites de v sont :

$$v = r_{\sigma_1}r_{\sigma_m} = r_{\sigma_2}r_{\sigma_1} = \dots = r_{\sigma_m}r_{\sigma_{m-1}}$$

Comme $\sigma < \tau$, la seule décomposition pouvant être $v = r_\sigma r_\tau$ est la première : $\sigma = \sigma_1$ et $\tau = \sigma_m$. Enfin, les deux derniers points sont conséquences de la remarque précédente.

8. LE «PREMIER» SIMPLEXE DE DIMENSION MAXIMALE

Dans cette partie on se fixe un élément $u \in [1, c]$. L'objectif est d'exhiber un simplexe de dimension $(\ell(u) - 1)$ dans $X(u)$.

Définition 8.1

Pour $i = 1, \dots, \ell(u)$, on pose :

$$\varepsilon_i := r_{\delta_1} \dots r_{\delta_{i-1}}(\delta_i) ,$$

et on note $\mathcal{E}_u := \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\ell(u)}\}$.

Les ε_i sont donc, pour u , les analogues des n premiers ρ_i pour c (on avait posé $\rho_i := r_{\alpha_1} \dots r_{\alpha_{i-1}}(\alpha_i)$ avec $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ dans la partie 5.1). Par suite on les appellera ici (définition non standard) les *racines premières* associées à u . Notons que d'après la proposition 6.3, $r_{\delta_p} \dots r_{\delta_1}$ est une décomposition réduite de u^{-1} , constituée en outre de réflexions fondamentales dans W_u . La proposition 1.4 permet donc d'assurer que $\mathcal{E}_u \subseteq \Phi_u^+$, et donne en outre la caractérisation suivante :

Proposition 8.2

Soit $\tau \in \Phi_u^+$. Alors :

$$u^{-1}(\tau) \in -\Phi_u^+ \Leftrightarrow \tau \in \mathcal{E}_u$$

L'analogie entre les racines premières de u et les n premiers ρ_i se poursuit :

Proposition 8.3

On a l'égalité :

$$u = r_{\varepsilon_{\ell(u)}} \dots r_{\varepsilon_2} r_{\varepsilon_1} .$$

Démonstration : Pour $i = 1, \dots, \ell(u)$,

$$\begin{aligned} r_{\varepsilon_i} &= r_{r_{\delta_1} \dots r_{\delta_{i-1}}(\delta_i)} \\ &= (r_{\delta_1} \dots r_{\delta_{i-1}}) r_{\delta_i} (r_{\delta_{i-1}} \dots r_{\delta_1}) \end{aligned}$$

donc le produit des r_{ε_i} vaut $r_{\delta_1} \dots r_{\delta_{\ell(u)}}$ c'est-à-dire u (cf. 6.3). □

Définition 8.4

Pour $\tau \in \Phi_u^+$, on note $\mu_u(\tau)$ le projeté orthogonal de $\mu(\tau)$ dans $\mathcal{M}(u)$.

Nous allons continuer l'analogie avec la partie 5.1 en prouvant que dans $\mathcal{M}(u)$, la famille $(\mu_u(\varepsilon_1), \dots, \mu_u(\varepsilon_{\ell(u)}))$ est la base duale de Δ_u . On commence par un calcul technique :

Lemme 8.5

Pour $i = 1, \dots, \ell(u)$, $\mu(\varepsilon_i) \cdot \delta_i = 1$.

Démonstration : Pour $1 \leq i \leq \ell(u)$ fixé, posons $v = r_{\delta_1} \dots r_{\delta_i}$. C'est un élément de $[1, c]$, de longueur i . De plus, comme par définition $r_{\varepsilon_i} r_{\delta_1} \dots r_{\delta_{i-1}} = r_{\delta_1} \dots r_{\delta_{i-1}} r_{\delta_i}$, on sait que $r_{\varepsilon_i} \preceq v$, donc $\varepsilon_i \in \Phi_v^+$. D'où, par le lemme 6.1 appliqué à v , $v(\mu(\varepsilon_i)) = r_{\varepsilon_i}(\mu(\varepsilon_i)) = \mu(\varepsilon_i) - 2\varepsilon_i$. D'autre part, $v(\delta_i) = r_{\delta_1} \dots r_{\delta_i}(\delta_i) = r_{\delta_1} \dots r_{\delta_{i-1}}(-\delta_i) = -\varepsilon_i$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mu(\varepsilon_i) \cdot \delta_i &= v(\mu(\varepsilon_i)) \cdot v(\delta_i) \\ &= (\mu(\varepsilon_i) - 2\varepsilon_i) \cdot (-\varepsilon_i) \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

Proposition 8.6

La base duale de $(\delta_1, \dots, \delta_{\ell(u)})$ dans $\mathcal{M}(u)$ est $(\mu_u(\varepsilon_1), \dots, \mu_u(\varepsilon_{\ell(u)}))$.

Démonstration : Soit $1 \leq i \leq \ell(u)$ fixé. Par définition, $\mu_u(\varepsilon_i) - \mu(\varepsilon_i)$ est dans $\mathcal{M}(u)^\perp$. Donc pour $\delta \in \Delta_u \subseteq \mathcal{M}(u)$, on obtient $\mu_u(\varepsilon_i) \cdot \delta = \mu(\varepsilon_i) \cdot \delta$. En particulier, par le lemme précédent, $\mu_u(\varepsilon_i) \cdot \delta_i = 0$. D'autre part, l'égalité $r_{\varepsilon_i} r_{\delta_1} \dots r_{\delta_{i-1}} = r_{\delta_1} \dots r_{\delta_{i-1}} r_{\delta_i}$ implique que $r_{\varepsilon_i} r_{\delta_1} \dots r_{\delta_{i-1}} r_{\delta_{i+1}} \dots r_{\delta_p}$ est une décomposition réduite de u ; donc, pour $j \neq i$, $r_{\delta_j} \preceq r_{\varepsilon_i} u$. D'où $\delta_j \in \mu(\varepsilon_i)^\perp$ et $\mu_u(\varepsilon_i) \cdot \delta_j = \mu(\varepsilon_i) \cdot \delta_j = 0$. □

Une conséquence de cette propriété nous sera utile plus loin :

Corollaire 8.7

Soit $\varepsilon \in \mathcal{E}_u$. Alors :

- $\forall \tau \in \Phi_u^+$, $\mu(\varepsilon) \cdot \tau \geq 0$;
- $\forall \tau \in \Phi_u^+$, $\tau < \varepsilon \Rightarrow \mu(\varepsilon) \cdot \tau = 0$.

Démonstration : D'après la proposition, si $\varepsilon \in \mathcal{E}_u$ et $\delta \in \Delta_u$, alors $\mu(\varepsilon) \cdot \delta = 0$ ou 1. Donc comme Δ_u est l'ensemble des racines simples pour Φ_u^+ , on obtient : $\forall \tau \in \Phi_u^+$, $\mu(\varepsilon) \cdot \tau \geq 0$.

Le second point en découle, en vertu de la propriété 5.4(iii). □

La suite de cette partie a pour but d'établir une caractérisation géométrique des racines premières, liée à la structure de $X(u)$ (théorème 8.10).

Lemme 8.8

Si $i < j$ et $\varepsilon_i > \varepsilon_j$, alors $r_{\varepsilon_i} r_{\varepsilon_j} = r_{\varepsilon_j} r_{\varepsilon_i}$.

Démonstration : Soit $i < j$ tel que $\varepsilon_i > \varepsilon_j$. Il suffit de vérifier que $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = 0$. D'une part, comme $u = r_{\varepsilon_{\ell(u)}} \dots r_{\varepsilon_j} \dots r_{\varepsilon_i} \dots r_{\varepsilon_1}$, d'après la proposition 3.5(vi), $r_{\varepsilon_j} r_{\varepsilon_i} \preceq u$, alors que $\varepsilon_j < \varepsilon_i$. On peut donc appliquer le corollaire 7.2 : ε_j et ε_i sont les racines simples relatives à $v = r_{\varepsilon_j} r_{\varepsilon_i}$, d'où $\varepsilon_j \cdot \varepsilon_i \leq 0$. D'autre part :

$$\begin{aligned} \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j &= r_{\delta_1} \dots r_{\delta_{i-1}}(\delta_i) \cdot r_{\delta_1} \dots r_{\delta_{j-1}}(\delta_j) \\ &= \delta_i \cdot r_{\delta_i} \dots r_{\delta_{j-1}}(\delta_j) \\ &= -\delta_i \cdot r_{\delta_{i+1}} \dots r_{\delta_{j-1}}(\delta_j). \end{aligned}$$

Or, Δ_u étant un système de racines simples, on a : $\forall \delta, \delta' \in \Delta_u, \delta \neq \delta' \Rightarrow \delta \cdot \delta' \leq 0$. Comme $r_{\delta_{j-1}}(\delta_j) = \delta_j - 2(\delta_{j-1} \cdot \delta_j)\delta_{j-1}$, on en déduit que $r_{\delta_{j-1}}(\delta_j)$ est combinaison linéaire à coefficients positifs de δ_{j-1} et δ_j . En itérant, on obtient de façon similaire que $r_{\delta_{i+1}} \dots r_{\delta_{j-1}}(\delta_j)$ est combinaison linéaire positive de $\delta_{i+1}, \dots, \delta_j$. D'où $(\delta_i \cdot r_{\delta_{i+1}} \dots r_{\delta_{j-1}}(\delta_j)) \leq 0$, et $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \geq 0$. \square

Proposition 8.9

Si $\theta_1 < \dots < \theta_{\ell(u)}$ sont les éléments de \mathcal{E}_u réordonnés, on a l'égalité :

$$u = r_{\theta_{\ell(u)}} \dots r_{\theta_2} \dots r_{\theta_1}.$$

Démonstration : On sait par 8.3 que $u = r_{\varepsilon_{\ell(u)}} \dots r_{\varepsilon_1}$. Notons I le «nombre d'inversions» dans cette égalité, *i.e.* le nombre de couples (i, j) tels que $\varepsilon_i < \varepsilon_j$ alors que r_{ε_i} est écrite à gauche de r_{ε_j} . Si $I = 0$, on a fini. Sinon : $\exists i \in \{1, \dots, \ell(u) - 1\}, \varepsilon_{i+1} < \varepsilon_i$. On peut donc d'après le lemme précédent permuter $r_{\varepsilon_{i+1}}$ et r_{ε_i} dans l'égalité. Cela donne une nouvelle écriture de u , de nombre d'inversions $I - 1$. En itérant, on obtient donc l'égalité cherchée. \square

On notera jusqu'à la fin de la partie $p := \ell(u)$. La proposition implique que \mathcal{E}_u est un simplexe de $X(u)$. En particulier, $X(u)$ est de dimension $p - 1$. On peut même être plus précis :

Théorème 8.10

Le simplexe $\langle \theta_1, \dots, \theta_p \rangle$ est le «premier» simplexe de dimension maximale de $X(u)$. On entend par là la propriété suivante :

Pour tout $\sigma_1 < \dots < \sigma_p \in \Phi_u^+$, si $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_p \rangle$ est un $(p - 1)$ -simplexe de $X(u)$, alors pour tout $i, \theta_i \leq \sigma_i$.

Démonstration : Soit $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_p \rangle$ un $(p - 1)$ -simplexe de $X(u)$, avec $\sigma_1 < \dots < \sigma_p$. Supposons par l'absurde qu'il existe $i \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\sigma_i < \theta_i$. Alors : $\forall j \leq i, \forall k \geq i, \sigma_j < \theta_k$, donc d'après le corollaire 8.7, $\mu(\theta_k) \cdot \sigma_j = 0$. D'où :

$$\{\sigma_1, \dots, \sigma_i\} \subseteq \mathcal{M}(u) \cap \mu(\theta_i)^\perp \cap \dots \cap \mu(\theta_p)^\perp$$

Or la famille $(\mu(\theta_i), \dots, \mu(\theta_p))$ est libre (puisque d'après 8.6 elle se projette en une famille libre), et pour $k = i, \dots, p, \mathcal{M}(u) \not\subseteq \mu(\theta_k)^\perp$, puisque $\theta_k \in \mathcal{M}(u)$. Donc :

$$\dim \mathcal{M}(u) \cap \mu(\theta_i)^\perp \cap \dots \cap \mu(\theta_p)^\perp = p - (p - i + 1) = i - 1.$$

C'est absurde puisque la famille $(\sigma_1, \dots, \sigma_i)$ est libre. \square

On notera par la suite pour abrégier les notations : $\theta_u := \max \mathcal{E}_u = \theta_{\ell(u)}$.

Le corollaire suivant sera fondamental pour faire des récurrences. Pour $u \in [1, c]$, on pose $u' := r_{\theta_u} u$. Alors $u' \preceq u$, et $\ell(u') = \ell(u) - 1$.

Corollaire 8.11

Soient $u \in [1, c]$ et $u' := r_{\theta_u} u$. Alors : $\mathcal{E}_{u'} = \mathcal{E}_u - \{\theta_u\}$. En particulier, $\theta_{u'} < \theta_u$.

Démonstration : Posons $\mathcal{E}_u = \{\theta_1 < \dots < \theta_p\}$. Alors $u' = r_{\theta_{p-1}} \dots r_{\theta_1}$, donc $\{\theta_1, \dots, \theta_{p-1}\} = \mathcal{E}_u - \{\theta_p\}$ est un simplexe de dimension maximale de $X(u')$. D'autre part, si Σ est un simplexe de $X(u')$, et si on suppose que Σ précède $\{\theta_1, \dots, \theta_{p-1}\}$ (dans l'ordre lexicographique), alors en particulier tous ses sommets sont strictement inférieurs à θ_p . Par conséquent, d'après le corollaire 8.7, ils sont dans $\mu(\theta_p)^\perp$, et par la caractérisation des simplexes (cf. 5.6), $\Sigma \sqcup \{\theta_p\}$ est un simplexe de $X(u)$. Donc d'après le théorème ci-dessus, $\Sigma \sqcup \{\theta_p\}$ doit nécessairement venir après $\{\theta_1, \dots, \theta_p\}$, i.e. Σ succéder à $\{\theta_1, \dots, \theta_{p-1}\}$. Le simplexe $\{\theta_1, \dots, \theta_{p-1}\}$ est donc bien le premier de $X(u')$. \square

9. CONVEXITÉ DES COMPLEXES $X(u)$

On va maintenant utiliser ce qui a été fait pour démontrer que les $X(u)$ sont des complexes sphériques convexes. Pour cela, on va procéder par récurrence en définissant d'abord un complexe «tronqué» :

Définition 9.1

Pour $u \preccurlyeq c$ et $\tau \in \Phi_u^+$, on note $X(u, \tau)$ l'ensemble des simplexes de $X(u)$ dont les sommets sont inférieurs à τ pour l'ordre sur Φ^+

Théorème 9.2

Pour tout $u \preccurlyeq c$, pour tout $\tau \in \Phi_u^+$, l'ensemble $X(u, \tau)$ est un complexe simplicial sphérique.

Démonstration : Fixons une racine τ de Φ_u^+ . Notons $\Phi_u^+ = \{\tau_1 < \dots < \tau_t\}$, et soit $i \in \{1, \dots, t\}$ tel que $\tau = \tau_i$. On va procéder par récurrence sur i . Pour $i = 1$ c'est évident puisque $X(u, \tau_1) = \{\{\tau_1\}\}$.

Soit $i \geq 1$. On suppose que $X(u, \tau_i)$ est un complexe simplicial sphérique. Soit σ un sommet de $X(u, \tau_i)$ (i.e. $\sigma \in \Phi_u^+$ et $\sigma \leq \tau_i$). Alors $\langle \sigma, \tau_{i+1} \rangle \in X(u, \tau_{i+1})$ si et seulement si $\langle \sigma, \tau_{i+1} \rangle \in X(c)$, i.e. si $\sigma \cdot \mu(\tau_{i+1}) = 0$, d'après la proposition 5.6. Posons désormais par commodité $a := \mu(\tau_{i+1})$. Les seuls sommets de $X(u, \tau_i)$ qui ne sont pas liés à τ_{i+1} dans le complexe $X(u, \tau_{i+1})$ sont nécessairement dans l'intérieur du demi-espace a^- , en vertu du lemme 5.4.

Un simplexe de $X(u, \tau_{i+1}) - X(u, \tau_i)$ est donc de la forme $\Sigma_0 \sqcup \{\tau_{i+1}\}$ où $\Sigma_0 \subseteq a^\perp$. Soient Σ_1, Σ_2 deux simplexes de $X(u, \tau_{i+1})$. Pour montrer que $X(u, \tau_{i+1})$ est un complexe simplicial sphérique, il suffit de vérifier que $\langle \Sigma_1 \rangle \cap \langle \Sigma_2 \rangle = \langle \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \rangle$. Trois cas se présentent :

- Si Σ_1 et Σ_2 sont dans $X(u, \tau_i)$, c'est clair par hypothèse de récurrence ;
- Si seul Σ_1 est dans $X(u, \tau_i)$, alors en écrivant $\Sigma_2 = \Sigma'_2 \sqcup \{\tau_{i+1}\}$ avec $\Sigma'_2 \subseteq a^\perp$ et $\tau_{i+1} \in a^+$, on voit que $\langle \Sigma_2 \rangle \subseteq a^+$, tandis que $\langle \Sigma_1 \rangle \subseteq a^-$. Donc leur intersection est dans l'hyperplan a^\perp : $\langle \Sigma_1 \rangle \cap \langle \Sigma_2 \rangle = \langle \Sigma_1 \rangle \cap (\langle \Sigma_2 \rangle \cap a^\perp) = \langle \Sigma_1 \rangle \cap \langle \Sigma'_2 \rangle = \langle \Sigma_1 \cap \Sigma'_2 \rangle$ car $X(u, \tau_i)$ est un complexe simplicial, et donc $\langle \Sigma_1 \rangle \cap \langle \Sigma_2 \rangle = \langle \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \rangle$;
- Si $\Sigma_1 = \Sigma'_1 \sqcup \{\tau_{i+1}\}$ et $\Sigma_2 = \Sigma'_2 \sqcup \{\tau_{i+1}\}$, avec Σ'_1 et Σ'_2 dans a^\perp , on a $\langle \Sigma_1 \rangle \cap \langle \Sigma_2 \rangle = \langle \Sigma'_1 \sqcup \{\tau_{i+1}\} \rangle \cap \langle \Sigma'_2 \sqcup \{\tau_{i+1}\} \rangle = \langle (\Sigma'_1 \cap \Sigma'_2) \sqcup \{\tau_{i+1}\} \rangle$, d'où $\langle \Sigma_1 \rangle \cap \langle \Sigma_2 \rangle = \langle \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \rangle$. \square

Corollaire 9.3

Pour tout $u \preccurlyeq c$, $X(u)$ est un complexe simplicial sphérique (de dimension $\ell(u) - 1$). En particulier, $X(c)$ est un complexe simplicial sphérique (de dimension $n - 1$).

Pour montrer que $X(u, \tau)$ est un complexe convexe inclus dans $\mathcal{M}(u)$, on va chercher à écrire le cône $\mathcal{C}\langle X \rangle$ sous la forme d'intersection de demi-espaces de $\mathcal{M}(u)$. Les hyperplans impliqués vont naturellement être de la forme $\mu(\rho)^\perp$. On sait déjà que si σ est un sommet de $X(u, \tau)$, on a :

- si $\theta \in \mathcal{E}_u$, alors $\mu(\theta) \cdot \sigma \geq 0$ d'après le lemme 8.7 ;
- si $\sigma' \in \Phi_u^+$ avec $\sigma' > \tau$, alors $\sigma < \sigma'$ donc $\mu(\sigma') \cdot \sigma \leq 0$ par la propriété 5.4.

Comme $\langle X(u, \tau) \rangle$ est inclus dans l'enveloppe convexe sphérique de ses sommets, on en déduit :

$$\mathcal{C}\langle X(u, \tau) \rangle \subseteq \mathcal{M}(u) \cap \left(\bigcap_{\theta \in \mathcal{E}_u} \mu(\theta)^+ \right) \cap \left(\bigcap_{\sigma \in \Phi_u^+, \sigma > \tau} \mu(\sigma)^- \right),$$

où l'on note pour $a \in V$, $a^+ := \{x \in V, x \cdot a \geq 0\}$ et $a^- := \{x \in V, x \cdot a \leq 0\}$.

Dans le cas où $\tau < \theta_u$, cela montre que $X(u, \tau)$ est un complexe de dimension strictement inférieure à celle de $X(u)$; ce n'est pas pratique pour les récurrences. On va par contre montrer par récurrence que dès que τ est supérieur à θ_u , il y a égalité. On notera $Z(u, \tau) := \mathcal{M}(u) \cap \left(\bigcap_{\theta \in \mathcal{E}_u} \mu(\theta)^+ \right) \cap \left(\bigcap_{\sigma \in \Phi_u^+, \sigma > \tau} \mu(\sigma)^- \right)$.

On a auparavant besoin du lemme géométrique de séparation suivant :

Lemme 9.4

Soient $\sigma, \tau \in \Phi_u^+$, tels que $\sigma < \tau$, $\tau \in \mu(\sigma)^\perp$, $\tau \geq \theta_u$, et $\sigma \notin \mathcal{E}_u$. Alors il existe $\alpha, \beta \in \Phi_u^+$, tels que :

- $\alpha, \beta < \tau$;
- $\alpha, \beta \in \mu(\tau)^\perp$;
- α, β sont séparés par $\mu(\sigma)^\perp$.

Démonstration : Soit $v := r_\sigma r_\tau$. Comme $\tau \in \mu(\sigma)^\perp \cap \mathcal{M}(u) = \mathcal{M}(r_\sigma u)$ (par le lemme 6.1), on a : $r_\tau \preccurlyeq r_\sigma u$ i.e. $v \preccurlyeq u$.

- *Construction de α :* D'après le corollaire 7.2, $\Delta_v = \{\sigma, \tau\}$, $r_\tau(\sigma) \in \Phi_v^+ \subseteq \Phi_u^+$, et $r_\tau(\sigma) < \tau$. Posons donc $\alpha := r_\tau(\sigma)$. On sait également (cf. théorème 7.1 et remarque) que $r_\tau r_\alpha = r_\sigma r_\tau = v$. En particulier, $r_\tau r_\alpha \preccurlyeq c$ donc $\alpha \in \mu(\tau)^\perp$. Enfin : $\mu(\sigma) \cdot \alpha = \mu(\sigma) \cdot r_\tau(\sigma) = \mu(\sigma) \cdot (\sigma - 2(\tau \cdot \sigma)\tau) = 1$.
- *Construction de β :* On pose $\beta := u^{-1}(\sigma)$. Comme (par hypothèse) $\sigma \notin \mathcal{E}_u$, d'après la proposition 8.2, $\beta \in \Phi_u^+$. Ensuite $\mu(\sigma) \cdot \beta = \mu(\sigma) \cdot u^{-1}(\sigma) = u(\mu(\sigma)) \cdot \sigma$. Or, d'après le lemme 6.1, $\mu(\sigma) \in \mathcal{F}(r_\sigma u)$, donc $u(\mu(\sigma)) = r_\sigma(\mu(\sigma)) = \mu(\sigma) - 2(\sigma \cdot \mu(\sigma))\sigma = \mu(\sigma) - 2\sigma$. D'où $\mu(\sigma) \cdot \beta = (\mu(\sigma) - 2\sigma) \cdot \sigma = -1$.

En particulier, en vertu de la propriété 5.4, on obtient $\beta < \sigma$, donc $\beta < \tau$. Enfin, $r_\beta = r_{u^{-1}(\sigma)} = u^{-1}r_\sigma u$, donc $r_\sigma r_\tau \preccurlyeq u$ donne $r_\tau \preccurlyeq r_\sigma u = ur_\beta$, et par la proposition 3.5(iii) (comme $\beta \neq \tau$), $r_\beta \preccurlyeq r_\tau u$, i.e. $\beta \in \mu(\tau)^\perp$. \square

Théorème 9.5

Soit $u \preccurlyeq c$. Pour tout $\tau \in \Phi_u^+$, si $\tau \geq \theta_u$, alors :

$$\mathcal{C} \langle X(u, \tau) \rangle = Z(u, \tau)$$

Démonstration : On va montrer l'inclusion manquante par récurrence, à la fois sur $\ell(u)$ et sur τ . On commence par une récurrence sur $p := \ell(u)$. Pour $p = 1$ c'est évident ; soit $p \geq 2$, on suppose l'inclusion vérifiée lorsque $\ell(u) = p - 1$. On note $\Phi_u^+ = \{\tau_1, \dots, \tau_t\}$. Soit $i \in \{1, \dots, t\}$ tel que $\tau = \tau_i$; procédons par récurrence sur i , en commençant par le rang i_0 tel que $\tau_{i_0} = \theta_u$.

Initialisation. Montrons que $Z(u, \theta_u) \subseteq \mathcal{C} \langle X(u, \theta_u) \rangle$.

Posons $B := X(u, \tau_{i_0-1})$. Soit $u' := r_{\theta_u} u$; u' est un élément de $[1, c]$ de longueur $p - 1$. Il est facile de voir que $B = X(u', \tau_{i_0-1})$. En effet, il suffit de vérifier que si $\tau \in \Phi_u^+$, avec $\tau \leq \tau_{i_0-1}$, alors $r_\tau \preccurlyeq u'$. Cela vient du fait que $\tau < \theta_u$ et a déjà été fait dans la preuve du corollaire 8.11.

D'après le corollaire 8.11, on a aussi : $\theta_{u'} < \theta_u$, i.e. $\theta_{u'} \leq \tau_{i_0-1}$. Donc, par hypothèse de récurrence sur p , $B = X(u', \tau_{i_0-1})$ est un complexe convexe de dimension $p - 2$. Considérons maintenant $X(u, \theta_u) = X(u, \tau_{i_0})$, noté ici A par commodité : tous ses sommets, excepté θ_u , sont dans $\mu(\theta_u)^\perp$ (par lemme 8.7), donc pour $j = 1, \dots, p - 1$, $\langle \tau_j, \theta_u \rangle$ est un simplexe de A . Tout simplexe de A est donc soit un simplexe de B (inclus dans $\mu(\theta_u)^\perp$), soit de la forme $\Sigma \sqcup \{\theta_u\}$ où Σ est un simplexe de B . Par conséquent, la partie $\langle A \rangle$ est l'enveloppe convexe (sphérique) de $\langle B \rangle$ et θ_u (forme de «pyramide» de base B et de sommet θ_u), d'où A est un complexe convexe (de dimension $p - 1$).

On va finalement montrer que $Z(u, \theta_u) \subseteq \mathcal{C} \langle A \rangle$ en étudiant les murs du complexe convexe A . D'après la partie 4.2, chaque mur de A est un mur d'un des simplexes maximaux de A , donc, par la propriété 6.2, est de la forme $\mu(\tau)^\perp \cap \mathcal{M}(u)$, pour un $\tau \in \Phi_u^+$.

Une des faces de A est la partie $\langle B \rangle$, donc a pour support le mur $\mu(\theta_u)^\perp \cap \mathcal{M}(u)$. Soit $\tau \in \Phi_u^+$ tel que $\mu(\tau)^\perp \cap \mathcal{M}(u)$ soit un autre mur de A . On sait que $\tau \neq \theta_u$, on va voir que τ est en outre nécessairement dans $\mathcal{E}_u \cup \{\sigma \in \Phi_u^+, \sigma > \theta_u\}$. En effet, supposons que $\tau \notin \mathcal{E}_u$: si $\tau < \theta_u$, on peut appliquer le lemme 9.4 à τ et θ_u , or $\mu(\tau)^\perp$ ne peut pas séparer la partie $\langle A \rangle$ puisque $\mu(\tau)^\perp \cap \mathcal{M}(u)$ est un mur de A . Par conséquent, par définition des murs (et A étant de dimension $p - 1$), on obtient :

$$\mathcal{C} \langle A \rangle = \mathcal{M}(u) \cap \bigcap_{\theta \in E} \mu(\theta)^\perp \cap \bigcap_{\tau \in F} \mu(\tau)^\perp,$$

où E est une partie de \mathcal{E}_u et F une partie de $\{\sigma \in \Phi_u^+, \sigma > \theta_u\}$; les exposants $+$ et $-$ se déterminent facilement en utilisant la propriété 5.4 et le fait que $\theta_u \in \langle A \rangle$. D'où, de façon évidente, $Z(u, \theta_u) \subseteq \mathcal{C} \langle A \rangle$.

Transmission. Soit $i \geq i_0$, on suppose que $Z(u, \tau_i) \subseteq \mathcal{C} \langle X(u, \tau_i) \rangle$. On va d'abord considérer certains sous-complexes de $X(u, \tau_{i+1})$.

Posons $S_i := \{\tau \in \Phi_u^+, \tau \leq \tau_i \text{ et } \mu(\tau_{i+1}) \cdot \tau = 0\}$. Appelons désormais B le sous-complexe de $X(u, \tau_i)$ d'ensemble de sommets S_i , et A le sous-complexe de $X(u, \tau_{i+1})$

d'ensemble de sommets $S_i \sqcup \{\tau_{i+1}\}$. Pour tout simplexe Σ de B , $\Sigma \sqcup \{\tau_{i+1}\}$ est un simplexe de A (puisque quand $\tau < \tau_{i+1}$, $\langle \tau_{i+1}, \tau \rangle$ simplexe $\Leftrightarrow \mu(\tau_{i+1}) \cdot \tau = 0$), donc, de façon similaire à la partie précédente, on voit A comme une «pyramide» de base B et de sommet τ_{i+1} .

Notons Z l'adhérence de la partie $Z(u, \tau_{i+1}) - Z(u, \tau_i)$, de sorte que par définition $Z = \mathcal{M}(u) \cap \left(\bigcap_{\theta \in \mathcal{E}_u} \mu(\theta)^+ \right) \cap \mu(\tau_{i+1})^+ \cap \left(\bigcap_{\tau \in \Phi_u^+, \tau > \tau_{i+1}} \mu(\tau)^- \right)$. En étudiant en détail le complexe B , on va montrer que Z est inclus dans $\mathcal{C}\langle A \rangle$. Vu que $\langle A \rangle \subseteq \langle X(u, \tau_{i+1}) \rangle$ et $Z(u, \tau_i) \subseteq \mathcal{C}\langle X(u, \tau_i) \rangle$ (par hypothèse de récurrence), on pourra conclure que $Z(u, \tau_{i+1}) = Z \cup Z(u, \tau_i) \subseteq \mathcal{C}\langle X(u, \tau_{i+1}) \rangle$.

Montrons d'abord que B est de dimension $p - 2$. Comme $B \subseteq \mathcal{M}(u) \cap \mu(\tau_{i+1})^\perp$ (qui est un espace de dimension $p - 1$), on a clairement $\dim B \leq p - 2$. On pose $v := r_{\tau_{i+1}} u$; c'est un élément de $[1, c]$, de longueur $p - 1$. On va montrer que l'ensemble \mathcal{E}_v , qui est de cardinal $p - 1$, forme un simplexe de B . On sait déjà que c'est un simplexe de $X(v)$, et que de plus $\mathcal{E}_v \subseteq \mathcal{M}(v) \subseteq \mu(\tau_{i+1})^\perp$, donc il suffit de montrer que tous ses sommets sont strictement inférieurs à τ_{i+1} . Soit $\varepsilon \in \mathcal{E}_v$. Comme $\mu(\tau_{i+1}) \cdot \varepsilon = 0$, on a $r_{\tau_{i+1}} r_\varepsilon \leq c$. Posons $w := r_{\tau_{i+1}} r_\varepsilon$; alors $w \preceq u$ car de plus $\mathcal{M}(w) \subseteq \mathcal{M}(u)$, avec $u \preceq c$ (cf. corollaire 2.7). Si on suppose par l'absurde que $\varepsilon > \tau_{i+1}$, on est dans le cadre d'application du corollaire 7.2, où w est l'élément de longueur 2. En particulier, $r_{\tau_{i+1}}(\varepsilon) \in \Phi_u^+$, et $r_{\tau_{i+1}}(\varepsilon) > \tau_{i+1}$. Considérons alors $v^{-1}(\varepsilon)$; d'après la proposition 8.2 appliquée à v , c'est une racine négative. Or : $v^{-1}(\varepsilon) = (r_{\tau_{i+1}} u)^{-1}(\varepsilon) = u^{-1}(r_{\tau_{i+1}}(\varepsilon))$, donc la même proposition appliquée à u donne : $r_{\tau_{i+1}}(\varepsilon) \in \mathcal{E}_u$. Or $r_{\tau_{i+1}}(\varepsilon) > \tau_{i+1} > \theta_u = \max \mathcal{E}_u$, contradiction. Donc $\varepsilon \leq \tau_i$, et l'ensemble \mathcal{E}_v est un $(p - 2)$ -simplexe, d'où $\dim B = p - 2$.

Montrons maintenant que B est un complexe convexe. On a clairement $\langle B \rangle \subseteq \mathcal{M}(u) \cap \mu(\tau_{i+1})^\perp \cap \langle X(u, \tau_i) \rangle$. L'inclusion réciproque est vérifiée également, puisque, si on se place dans $\mathcal{M}(u)$, on sait que les sommets de $X(u, \tau_i)$ sont tous d'un même côté de l'hyperplan $\mu(\tau_{i+1})^\perp \cap \mathcal{M}(u)$ ($\mu(\tau_{i+1})^-$ en l'occurrence, par la propriété 5.4). Donc, par hypothèse de récurrence, on obtient $\langle B \rangle = \mathcal{M}(u) \cap \mu(\tau_{i+1})^\perp \cap Z(u, \tau_i) \cap \mathbf{S}^{n-1}$ et B est bien un complexe convexe.

On en déduit que A est un complexe convexe de dimension $k - 1$; il reste à étudier les murs de A pour caractériser $\mathcal{C}\langle A \rangle$. De façon similaire à l'initialisation, on montre qu'un mur de A est nécessairement de la forme $\mathcal{M}(u) \cap \mu(\tau)^\perp$, où $\tau \in \mathcal{E}_u \cup \{\sigma \in \Phi_u^+, \sigma \geq \tau_{i+1}\}$ (on utilise le lemme 9.4 appliqué à τ_{i+1} au lieu de θ_u). Comme A est de dimension $(p - 1)$, on obtient :

$$\mathcal{C}\langle A \rangle = \mathcal{M}(u) \cap \bigcap_{\theta \in E} \mu(\theta)^+ \cap \mu(\tau_{i+1})^+ \cap \bigcap_{\tau \in F} \mu(\tau)^-,$$

où E est une partie de \mathcal{E}_u et F une partie de $\{\sigma \in \Phi_u^+, \sigma > \tau_{i+1}\}$, les signes en exposant se déterminant en testant sur τ_{i+1} . Etant donnée la définition de Z , on en déduit directement $Z \subseteq \mathcal{C}\langle A \rangle$, et donc $Z(u, \tau_{i+1}) \subseteq \mathcal{C}\langle X(u, \tau_{i+1}) \rangle$. \square

Corollaire 9.6

Pour tout $u \preccurlyeq c$, $X(u)$ est un complexe sphérique convexe, et :

$$\langle X(u) \rangle = \mathbf{S}^{n-1} \cap \mathcal{M}(u) \cap \bigcap_{\theta \in \mathcal{E}_u} \mu(\theta)^+$$

10. PROPRIÉTÉ DE TREILLIS

Théorème 10.1

L'intervalle $[1, c] \subseteq (W, \preccurlyeq)$ est un treillis.

Démonstration : Soient $u, v \in [1, c]$. D'après la proposition 3.7, pour montrer que u et v ont un infimum, il suffit de trouver $w \in [1, c]$ tel que $\Phi_w^+ = \Phi_u^+ \cap \Phi_v^+$.

En suivant la partie 6.2, on construit $X(u)$ et $X(v)$ sous-complexes de $X(c)$. Soit $X := X(u) \cap X(v)$; c'est aussi un sous-complexe de $X(c)$. Il faut arriver à le voir comme un $X(w)$.

Comme $\langle X \rangle = \langle X(u) \rangle \cap \langle X(v) \rangle$, $\langle X \rangle$ est convexe, $\langle X(u) \rangle$ et $\langle X(v) \rangle$ étant convexes par le corollaire 9.6. Soit d la dimension de X : d'après 4.7, X est purement de dimension d . Ainsi X est une union finie de d -simplexes, et pour chaque d -simplexe Σ , $\text{Vect}(\Sigma) = \text{Vect}(X)$.

Si X est de la forme $X(w)$, alors chaque d -simplexe de X permet de reconstruire w . On en choisit un que l'on ordonne selon l'ordre total sur $\Phi^+ : \sigma_0 < \dots < \sigma_d$. Par définition d'un simplexe de $X(c)$, $r_{\sigma_0} \dots r_{\sigma_d} \preccurlyeq c^{-1}$. On pose naturellement $w := r_{\sigma_d} \dots r_{\sigma_0}$.

Clairement $w \in [1, c]$, et comme la famille $(\sigma_0, \dots, \sigma_d)$ est libre, $\mathcal{M}(w) = \text{Vect}(\sigma_0, \dots, \sigma_d)$. D'où $\mathcal{M}(w) = \text{Vect}(X) = \text{Vect}(\Phi_u^+ \cap \Phi_v^+)$.

Donc si $\rho \in \Phi_u^+ \cap \Phi_v^+$, $\rho \in \mathcal{M}(w)$ donc $r_\rho \preccurlyeq w$ i.e. $\rho \in \Phi_w^+$. Réciproquement, $w \preccurlyeq u, v$ puisque $\langle \sigma_0, \dots, \sigma_d \rangle$ simplexe de $X(u)$ et de $X(v)$ (cf propriété 6.5), donc $\Phi_w^+ \subseteq \Phi_u^+ \cap \Phi_v^+$. D'où $\Phi_w^+ = \Phi_u^+ \cap \Phi_v^+$, $w = u \wedge v$ et $X = X(w)$. \square

RÉFÉRENCES

- [B] D. Bessis, *The dual braid monoid*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **36** (2003), 647–683.
- [BC] D. Bessis, R. Corran, *Non-crossing partitions of type (e, e, r)* , Adv. Math. **202** (2006), 1–49.
- [BDM] D. Bessis, F. Digne, J. Michel, *Springer theory in braid groups and the Birman-Ko-Lee monoid*, Pacific J. Math. **205** (2002), 287–310.
- [Bo] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie* Ch. 4–6, Hermann, Paris 1968.
- [Br] T. Brady, *A partial order on the symmetric group and new $K(\pi, 1)$'s for the braid groups*, Adv. Math. **161** (2001), no. 1, 20–40.
- [BS] E. Brieskorn, K. Saito, *Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen*, Invent. Math. **17** (1972) 245–271.
- [BW1] T. Brady, C. Watt, *A partial order on the orthogonal group*, Comm. Algebra **30** (2002), no. 8, 3749–3754.
- [BW2] T. Brady, C. Watt, *$K(\pi, 1)$'s for Artin groups of finite type*, Proceedings of the Conference on Geometric and Combinatorial Group Theory, Part I (Haifa, 2000), Geom. Dedicata **94** (2002), 225–250.
- [BW3] T. Brady, C. Watt, *Lattices in finite real reflection groups*, Preprint (2005), arXiv :math.CO/0501502.
- [D] P. Deligne, *Les immeubles des groupes de tresses généralisés*, Invent. Math. **17** (1972), 273–302.
- [Deh] P. Dehornoy, *Groupes de Garside*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **35** (2002) 267–306.
- [DP] P. Dehornoy, L. Paris, *Gaussian groups and Garside groups, two generalizations of Artin groups*, Proc. of London Math. Soc. **79** (1999), 569–604.
- [H] J.E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge Stud. Adv. Math. **29**, Cambridge Univ. Press, 1990.
- [K] R. Kane, *Reflection Groups and Invariant Theory*, CMS Books in Math. **5**, Springer-Verlag, New-York, 2001.
- [S] R. Steinberg, *Finite reflection groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **91** (1959), 403–504.
- [Z] G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Graduate Texts in Math. **152**, Springer-Verlag, New-York, 1995.
- E-mail address: vivien.ripoll@ens.fr*