Valette : Colloquium

Graphes expanseurs et applications

1. Introduction

Les graphes expanseurs sont des familles de graphes finis, réguliers, "très connexes", c-à-d

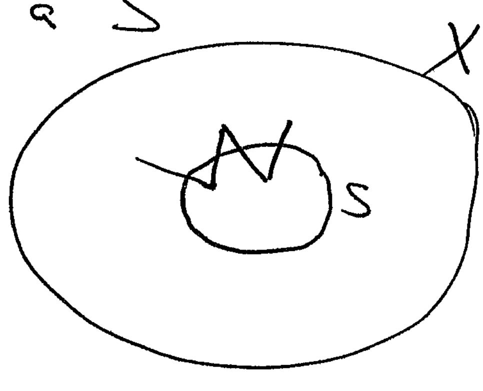
- combinatoire : pas de petite coupure (difficiles à déconnecter)
- algébrique : les valeurs propres non nulles du laplacien combinatoire sont grandes
- probabiliste : la marche aléatoire simple converge rapidement vers la distribution uniforme

"Théorème" ces trois définitions sont équiv

Plus précisément :

- combinatoire : soit $X=(V,E)$ un graphe d-régulier. Pour $S\subset V$, notons $E(S,S^c)$ la coupure associée, c-à-d l'ens des arêtes qui relient S à S^c

$n := |V|$

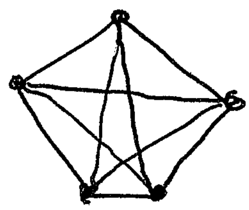


$h(X)$ = constante d'expansion
ou constante isopérimétrique

$$= \min_{S \subset V,\ |S| \leq \frac{|V|}{2}} \frac{|E(S, S^c)|}{|S|}$$

<u>Exemples</u> 1) $X = K_n$ graphe complet sur n sommets

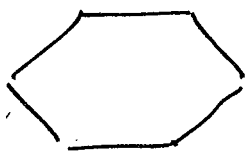
K_5



$$h(K_n) \sim \frac{n}{2}$$

2) $X = C_n$ cycle de longueur n

C_6



$$h(C_n) \sim \frac{4}{n}$$

• Algèbre linéaire : laplacien combinatoire sur X

Opérateur linéaire sur $\ell^2 V$

$$(\Delta_X f)(x) = d\, f(x) - \sum_{y \sim x} f(y) \qquad f \in \ell^2 V,\ x \in V$$

Matriciellement : $(\Delta_X)_{xy} = \begin{cases} d & \text{si } x = y \\ -\text{nbre arêtes de } x \text{ à } y & \text{si } x \neq y \end{cases}$

Δ_X est un opérateur positif sur $\ell^2 V$

$\ker \Delta_X = \{ \text{fonctions constantes} \}$, car X connexe

$\lambda_1(X) =$ première valeur propre non nulle

$$\frac{\lambda_1(X)}{2} \leq h(X) \leq \sqrt{2d\,\lambda_1(X)}$$

Alon-Milman Dodziuk "inégalités de Cheeger-Buser"

• Proba : pour la marche aléatoire simple sur X, d'origine x_0

$p_t(x) =$ proba que la marche soit en x en t pas

$$\| p_t - \text{unif} \|_1 \leq \sqrt{n} \left(1 - \frac{\lambda_1(X)}{d} \right)^t$$

<u>Déf</u> Une famille $(X_k)_{k \geq 1}$ de graphes d-réguliers, connexes, finis, avec $|X_k| \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty$ est une <u>famille d'expanseurs</u> si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

1) $\exists\, \varepsilon > 0 \quad h(X_k) \geq \varepsilon \quad \forall k$

2) $\exists\, \varepsilon' > 0 \quad \lambda_1(X_k) \geq \varepsilon \quad \forall k$

3) $\exists\, \varepsilon'' > 0 \quad \| p_t - \text{unif} \|_1 \leq \sqrt{|X_k|}\, (1 - \varepsilon'')^t$

<u>Non exemples</u> Les graphes $(C_n)_{n\geq 1}$ ne forment pas une famille d'expanseurs

<u>Remarque</u> sur l'exigence de d-régularité

Pour un graphe d-régulier : $|E| = \dfrac{d|V|}{2}$

Où servent les graphes expanseurs ?

- Informatique théorique : dérandomisation, codes correcteurs d'erreurs, circuit de communication, th de la complexité.
- Maths : th des graphes, th des groupes, variétés de dim 3, th des nombres, th de la mesure.

2. Constructions

<u>Thm</u> (Pinsker ~1970) "La plupart des graphes sont bons". Plus précisément, pour $n \to \infty$, la proportion des graphes d-réguliers sur n sommets avec $h(X) < \varepsilon$, tend vers 0 pour $n \to \infty$.

Importance des constructions explicites !

<u>Déf</u> Un groupe Γ de type fini a la propriété (T) de Kazhdan s'il existe une partie génératrice finie S et un $\varepsilon > 0$ tels que $\forall \pi \in \mathrm{Rep}\,\Gamma$

s'il existe un vecteur $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ t.q
$\|\xi\| = 1$ et $\max\limits_{s \in S} \|\pi(s)\xi - \xi\| < \varepsilon$,

alors π a des vecteurs invariants non nuls.

<u>Exemples</u> $SL_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$

Plus généralement (Kazhdan, 1967) : les réseaux dans les groupes de Lie simples de rang ≥ 2.

<u>Thm</u> (Margulis, 1973) Soit Γ un groupe avec la propriété (T) admettant une infinité de quotients finis Γ_k (p. ex $SL_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$).
Soit S une partie génératrice finie de Γ.
Alors la famille de graphes de Cayley $(\mathcal{G}(\Gamma_k, S))_{k \geq 1}$ est une famille d'expanseurs d-réguliers ($d = |S|$).

<u>Preuve</u> $\mathcal{H}_k = \left\{ f \in \ell^2(\Gamma_k) : \sum_{x \in \Gamma_k} f(x) = 0 \right\}$

π_k la rep correspondante de Γ sur $\mathcal{H}_k$.

π_k n'a pas de vecteur fixe non nul (par transitivité de l'action de Γ sur Γ_k).

Par la propriété (T), pour $f \in \mathcal{H}_k$, $\|f\| = 1$, $\exists\, s_0 \in S$ $\|\pi(s_0) f - f\| \geq \varepsilon$

$$\Longleftrightarrow 2 - 2\langle \pi(s_0) f | f \rangle \geq \varepsilon^2$$

$$\Longleftrightarrow \langle \pi(s_0) f | f \rangle \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$$

Δ_k = laplacien sur $\mathcal{G}(\Gamma_k, S)$

$$= d \cdot \mathrm{Id} - \sum_{s \in S} \pi_k(s)$$

$$\langle \Delta_k f | f \rangle = d - \sum_{s \in S} \langle \pi_k(s) f | f \rangle$$

$$= d - \sum_{s \neq s_0} \underbrace{\langle \pi_k(s) f | f \rangle}_{\leq 1} - \underbrace{\langle \pi_k(s_0) f | f \rangle}_{\leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}}$$

$$\langle \Delta_k f | f \rangle \geq d - (d-1) - \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) = \frac{\varepsilon^2}{2}$$

Donc $\lambda_1(\mathcal{G}(\Gamma_k, S)) \geq \frac{\varepsilon^2}{2}$. ∎

Meilleur ε possible $\overset{\text{déf}}{=}$ constante de Kazhdan

Pour $\Gamma = SL_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$ et

$S = \{$ mat élémentaires $\}$

$$\frac{1}{42\sqrt{n} + 860} \leq \varepsilon \leq \sqrt{\frac{2}{n}} \quad \text{(Kassabov 2003)}$$

3. Application aux plongements métriques

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$.

<u>Déf</u> f est un <u>plongement grossier</u> s'il existe $\rho_\pm : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tq

$\lim_{t \to \infty} \rho_\pm(t) = \infty$ et

$$\forall x, x' \in X \quad \rho_-\big(d_X(x,x')\big) \leq d_Y\big(f(x), f(x')\big) \leq \rho_+\big(d_X(x,x')\big)$$

Un des intérêts de cette notion vient de

<u>Thm</u> (Yu, 1998 ; Kasparov-Yu, 2006)

Soit Γ un groupe de tf avec la métrique des mots. Si Γ se plonge grossièrement dans un espace de Hilbert (resp dans un espace de Banach unif convexe), alors la conjecture de Novikov sur l'invariance homotopique des hautes signatures pour les variétés de groupe fondamental Γ est vraie.

Prop (Linial-London-Rabinovich, 1994 Gromov, 2000)
Une famille d'expanseurs n'admet pas de plongement grossier dans un Hilbert.

Thm (Gromov 2001, Arzhantseva-Delzant, 2008)
Il existe des groupes de type fini qui contiennent une famille d'expanseurs dans leur graphe de Cayley et donc ne se plongent pas grossièrement dans un Hilbert.

Thm (Lafforgue 2007, Mendel-Naor, 2009)
Il existe des expanseurs qui n'admettent de plongement grossier dans aucun espace de Banach uniformément convexe

Lafforgue : les quotients finis d'un réseau dans $SL_3(\mathbb{Q}_p)$

Problème ouvert : existe-t-il des groupes de type fini qui ne se plongent grossièrement dans aucun espace de Banach unif convexe ?