

Convergence exponentielle vers une distribution quasi-stationnaire et applications

Denis Villemonais

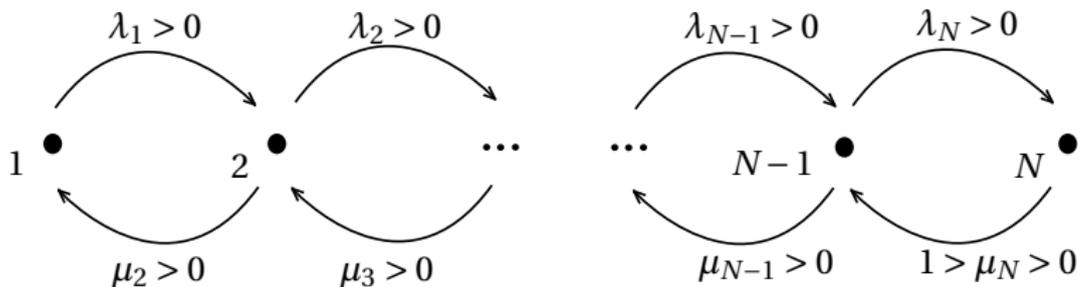
Université de Lorraine, Nancy, France

Soutenance pour l'obtention de
l'Habilitation à diriger des recherches

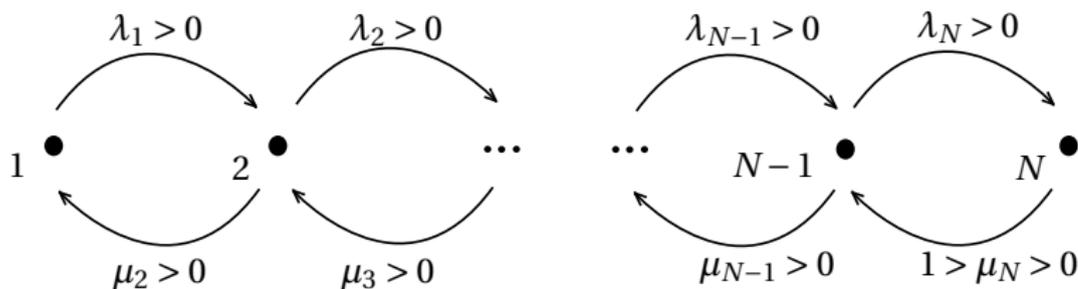
1. Distributions quasi-stationnaires

- a. Exemple d'une chaîne de Markov
- b. Définition et premières propriétés

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur $\{1, 2, \dots, N\}$ dont les probabilités de transition $(P_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ sont données par



Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur $\{1, 2, \dots, N\}$ dont les probabilités de transition $(P_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ sont données par

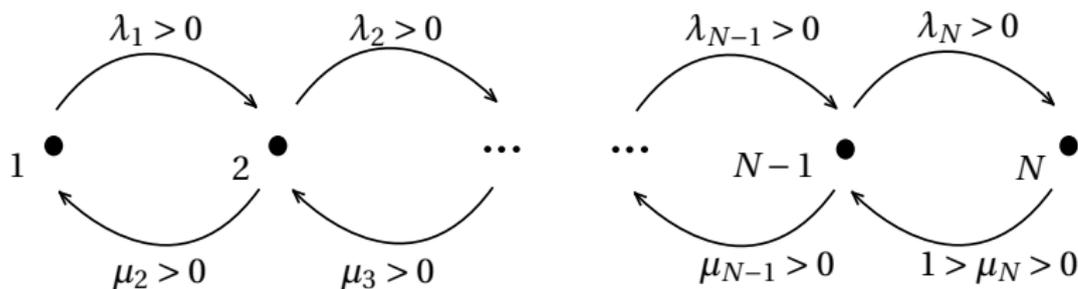


→ X admet une unique distribution stationnaire ν_s ,

$$\nu_s P = \nu_s \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu P^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_\mu(X_n \in \cdot) = \nu_s,$$

pour toute distribution initiale μ sur $\{1, \dots, N\}$.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur $\{1, 2, \dots, N\}$ dont les probabilités de transition $(P_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ sont données par



→ X admet une unique distribution stationnaire ν_s ,

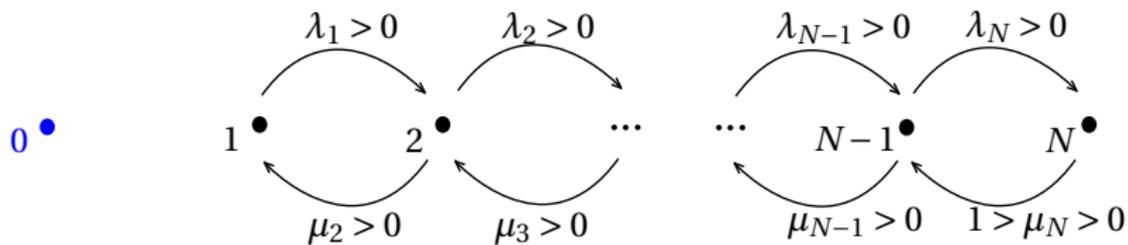
$$\nu_s P = \nu_s \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu P^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_\mu(X_n \in \cdot) = \nu_s,$$

pour toute distribution initiale μ sur $\{1, \dots, N\}$.

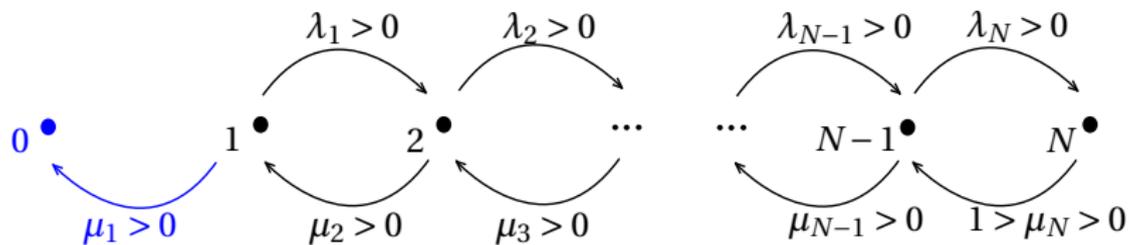
→ Preuves possibles

- par l'utilisation du théorème de Perron-Frobenius
- par couplage, tel qu'exposé par Doblin

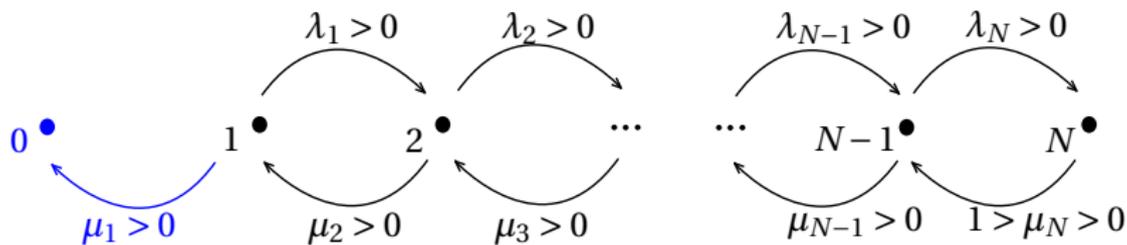
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur $\{0, 1, 2, \dots, N\}$ dont les probabilités de transition $(P_{ij})_{0 \leq i, j \leq N}$ sont données par



Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur $\{0, 1, 2, \dots, N\}$ dont les probabilités de transition $(P_{ij})_{0 \leq i, j \leq N}$ sont données par



Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur $\{0, 1, 2, \dots, N\}$ dont les probabilités de transition $(P_{ij})_{0 \leq i, j \leq N}$ sont données par

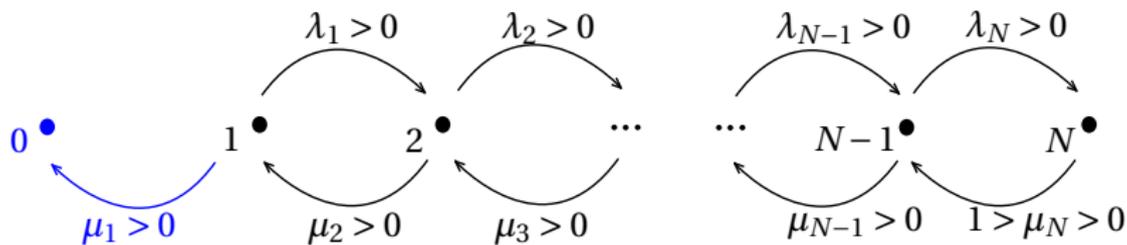


→ X admet une unique distribution **quasi**-stationnaire ν_{qs}

$$\nu_{qs}P = \theta_0 \nu_{qs} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_0^{-n} \mu P^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_0^{-n} \mathbb{P}_\mu(X_n \in \cdot) = \mu(\eta) \nu_{qs},$$

pour toute distribution initiale μ sur $\{1, \dots, N\}$, $\theta_0 > 0$, $\eta : E \rightarrow \mathbb{R}_+$

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur $\{0, 1, 2, \dots, N\}$ dont les probabilités de transition $(P_{ij})_{0 \leq i, j \leq N}$ sont données par



→ X admet une unique distribution quasi-stationnaire ν_{qs}

$$\nu_{qs}P = \theta_0 \nu_{qs} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_0^{-n} \mu P^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_0^{-n} \mathbb{P}_\mu(X_n \in \cdot) = \mu(\eta) \nu_{qs},$$

pour toute distribution initiale μ sur $\{1, \dots, N\}$, $\theta_0 > 0$, $\eta: E \rightarrow \mathbb{R}_+$

→ C'est une conséquence du théorème de Perron-Frobenius

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_\mu(X_n \in \cdot \mid X_n \neq 0) = \nu_{qs}$,
- Darroch-Seneta 1965, 1967, Pinsky 1985
- méthodes de couplage ?

1. Distributions quasi-stationnaires

- a. Exemple d'une chaîne de Markov
- b. Définition et premières propriétés

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ évoluant dans $E \cup \{\partial\}$, où $\partial \notin E$ est absorbant.

Notons $\tau_\partial = \inf\{t \geq 0, X_t = \partial\}$ le temps d'atteinte de ∂ ,

$$X_t = \partial, \forall t \geq \tau_\partial \text{ presque sûrement.}$$

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ évoluant dans $E \cup \{\partial\}$, où $\partial \notin E$ est absorbant.

Notons $\tau_\partial = \inf\{t \geq 0, X_t = \partial\}$ le temps d'atteinte de ∂ ,

$$X_t = \partial, \forall t \geq \tau_\partial \text{ presque sûrement.}$$

Définition

Une **distribution quasi-stationnaire (DQS)** est une mesure de probabilité ν_{qs} sur E telle que

$$\nu_{qs} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\mu(X_t \in \cdot \mid t < \tau_\partial)$$

pour au moins une mesure initiale μ sur E .

→ Surveys et livre

- Méléard, V. 2012, Van Doorn, Pollett 2013
- Collet, Martínez, San Martín 2013

Proposition

Une mesure de probabilité ν_{qs} est une DQS si et seulement si

$$\nu_{qs} = \mathbb{P}_{\nu_{qs}}(X_t \in \cdot \mid t < \tau_\partial), \quad \forall t \geq 0.$$

Proposition

Une mesure de probabilité ν_{qs} est une DQS si et seulement si

$$\nu_{qs} = \mathbb{P}_{\nu_{qs}}(X_t \in \cdot \mid t < \tau_\partial), \quad \forall t \geq 0.$$

Dans ce cas, $\exists \lambda_0 \geq 0$ tel que

$$\nu_{qs} P_t := \mathbb{P}_{\nu_{qs}}(X_t \in \cdot) = e^{-\lambda_0 t} \nu_{qs} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{\nu_{qs}}(t < \tau_\partial) = e^{-\lambda_0 t}, \quad \forall t \geq 0.$$

→ Réciproques partielles

- Ferrari, Kesten, Martinez, Picco (1995)
- Bourget, Chaumont, Sapoukhina (2013)

→ Processus de Galton-Watson

- Cas critique : $\mathbb{E}_x(\tau_\partial) = \infty$ pour tout $x \in \mathbb{N} \Rightarrow$ pas de DQS.
- Cas sous-critique : Yaglom (1947), Athreya, Ney (1972)

Définition

Le **domaine d'attraction** d'une DQS ν_{qs} est l'ensemble des mesures de probabilité μ telles que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\mu(X_t \in \cdot | t < \tau_\partial) = \nu_{qs}.$$

Définition

Le **domaine d'attraction** d'une DQS ν_{qs} est l'ensemble des mesures de probabilité μ telles que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\mu(X_t \in \cdot | t < \tau_\partial) = \nu_{qs}.$$

En général :

- L'**existence** d'une DQS n'est pas garantie
- L'existence n'implique pas l'**unicité** d'une DQS
- L'unicité n'implique pas l'**attraction de toutes les distributions initiales**
- L'attraction de toutes les distributions initiales n'implique pas la **convergence uniforme**

→ Comment garantir les propriétés ci-dessus ?

2. Méthodes de couplage pour les distributions quasi-stationnaires

a. Convergence uniforme par couplage

b. Convergence non-uniforme par couplage et critère de Lyapunov

Soit X évoluant dans $E \cup \{\partial\}$ absorbé en ∂ .

→ Hypothèse A1 (condition de Doeblin)

Il existe une mesure de probabilité ν et $c_1 > 0$ telle que

$$\mathbb{P}_x(X_1 \in \cdot | 1 < \tau_\partial) \geq c_1 \nu(\cdot), \quad \forall x \in E.$$

→ Hypothèse A2 (inégalité de Harnack faible)

$$\frac{\mathbb{P}_\nu(t < \tau_\partial)}{\mathbb{P}_x(t < \tau_\partial)} > c_2 > 0, \quad \forall x \in E, t \geq 0.$$

Théorème (Champagnat, V. 2016)

A1 et A2 \Leftrightarrow il existe $C > 0$, $\gamma > 0$ et ν_{qs} tels que

$$\|\mathbb{P}_\mu(X_t \in \cdot | t < \tau_\partial) - \nu_{qs}\|_{TV} \leq Ce^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq 0, \mu \text{ proba sur } E.$$

Soit X évoluant dans $E \cup \{\partial\}$ absorbé en ∂ .

→ Hypothèse A1 (condition de Doeblin)

Il existe une mesure de probabilité ν et $c_1 > 0$ telle que

$$\mathbb{P}_x(X_1 \in \cdot | 1 < \tau_\partial) \geq c_1 \nu(\cdot), \quad \forall x \in E.$$

→ Hypothèse A2 (inégalité de Harnack faible)

$$\frac{\mathbb{P}_\nu(t < \tau_\partial)}{\mathbb{P}_x(t < \tau_\partial)} > c_2 > 0, \quad \forall x \in E, t \geq 0.$$

Théorème (Champagnat, V. 2016)

A1 et A2 \Leftrightarrow il existe $C > 0$, $\gamma > 0$ et ν_{qs} tels que

$$\|\mathbb{P}_\mu(X_t \in \cdot | t < \tau_\partial) - \nu_{qs}\|_{TV} \leq Ce^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq 0, \mu \text{ proba sur } E.$$

Soit X évoluant dans $E \cup \{\partial\}$ absorbé en ∂ .

→ Hypothèse A1 (condition de Doeblin)

Il existe une mesure de probabilité ν et $c_1 > 0$ telle que

$$\mathbb{P}_x(X_1 \in \cdot | 1 < \tau_\partial) \geq c_1 \nu(\cdot), \quad \forall x \in E.$$

→ Hypothèse A2 (inégalité de Harnack faible)

$$\frac{\mathbb{P}_\nu(t < \tau_\partial)}{\mathbb{P}_x(t < \tau_\partial)} > c_2 > 0, \quad \forall x \in E, t \geq 0.$$

Théorème (Champagnat, V. 2016)

A1 et A2 \Leftrightarrow il existe $C > 0$, $\gamma > 0$ et ν_{qs} tels que

$$\|\mathbb{P}_\mu(X_t \in \cdot | t < \tau_\partial) - \nu_{qs}\|_{TV} \leq C e^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq 0, \mu \text{ proba sur } E.$$

Soit X évoluant dans $E \cup \{\partial\}$ absorbé en ∂ .

→ Hypothèse A1 (condition de Doeblin)

Il existe une mesure de probabilité ν et $c_1 > 0$ telle que

$$\mathbb{P}_x(X_1 \in \cdot | 1 < \tau_\partial) \geq c_1 \nu(\cdot), \quad \forall x \in E.$$

→ Hypothèse A2 (inégalité de Harnack faible)

$$\frac{\mathbb{P}_\nu(t < \tau_\partial)}{\mathbb{P}_x(t < \tau_\partial)} > c_2 > 0, \quad \forall x \in E, t \geq 0.$$

Théorème (Champagnat, V. 2016)

A1 et A2 \Leftrightarrow il existe $C > 0$, $\gamma > 0$ et ν_{qs} tels que

$$\|\mathbb{P}_\mu(X_t \in \cdot | t < \tau_\partial) - \nu_{qs}\|_{TV} \leq Ce^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq 0, \mu \text{ proba sur } E.$$

Dans ce cas, on peut choisir $Ce^{-\gamma t} = 2(1 - c_1 c_2)^{\lfloor t \rfloor}$.

Idées principales de la preuve (\Rightarrow)

$\forall T \geq 1$, soit $(Y_t^T)_{0 \leq t \leq T}$ distribué suivant $\text{Loi}((X_t)_{0 \leq t \leq T} \mid T < \tau_\partial)$.

Idées principales de la preuve (\Rightarrow)

$\forall T \geq 1$, soit $(Y_t^T)_{0 \leq t \leq T}$ distribué suivant $\text{Loi}((X_t)_{0 \leq t \leq T} \mid T < \tau_\partial)$.

$\rightarrow Y^T$ est un processus markovien inhomogène en temps vérifiant

$$\mathbb{E}_x(f(Y_t^T)) = \frac{\mathbb{E}_x(f(X_t) \mathbf{1}_{t < \tau_\partial} \mathbb{P}_{X_t}(T - t < \tau_\partial))}{\mathbb{P}_x(T < \tau_\partial)}, \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

Idées principales de la preuve (\Rightarrow)

$\forall T \geq 1$, soit $(Y_t^T)_{0 \leq t \leq T}$ distribué suivant $\text{Loi}((X_t)_{0 \leq t \leq T} \mid T < \tau_\partial)$.

$\rightarrow Y^T$ est un processus markovien inhomogène en temps vérifiant

$$\mathbb{E}_x(f(Y_t^T)) = \frac{\mathbb{E}_x(f(X_t) \mathbf{1}_{t < \tau_\partial} \mathbb{P}_{X_t}(T - t < \tau_\partial))}{\mathbb{P}_x(T < \tau_\partial)}, \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

\rightarrow D'après les hypothèses A1 et A2, on obtient

$$\mathbb{E}_x(f(Y_1^T)) \geq \frac{c_1 v(f) \mathbb{P}_v(T - 1 < \tau_\partial) \mathbb{P}_x(1 < \tau_\partial)}{\mathbb{P}_x(T < \tau_\partial)} \geq c_1 c_2 v'(f).$$

Idées principales de la preuve (\Rightarrow)

$\forall T \geq 1$, soit $(Y_t^T)_{0 \leq t \leq T}$ distribué suivant $\text{Loi}((X_t)_{0 \leq t \leq T} \mid T < \tau_\partial)$.

$\rightarrow Y^T$ est un processus markovien inhomogène en temps vérifiant

$$\mathbb{E}_x(f(Y_t^T)) = \frac{\mathbb{E}_x(f(X_t) \mathbf{1}_{t < \tau_\partial} \mathbb{P}_{X_t}(T - t < \tau_\partial))}{\mathbb{P}_x(T < \tau_\partial)}, \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

\rightarrow D'après les hypothèses A1 et A2, on obtient

$$\mathbb{E}_x(f(Y_1^T)) \geq \frac{c_1 v(f) \mathbb{P}_v(T - 1 < \tau_\partial) \mathbb{P}_x(1 < \tau_\partial)}{\mathbb{P}_x(T < \tau_\partial)} \geq c_1 c_2 v'(f).$$

\rightarrow Cette propriété de Doeblin en temps inhomogène implique que

$$\|\mathbb{P}_x(Y_T^T \in \cdot) - \mathbb{P}_y(Y_T^T \in \cdot)\|_{TV} \leq 2(1 - c_1 c_2)^{\lfloor T \rfloor}, \quad \forall x, y \in E.$$

Idées principales de la preuve (\Rightarrow)

$\forall T \geq 1$, soit $(Y_t^T)_{0 \leq t \leq T}$ distribué suivant $\text{Loi}((X_t)_{0 \leq t \leq T} \mid T < \tau_\partial)$.

→ Y^T est un processus markovien inhomogène en temps vérifiant

$$\mathbb{E}_x(f(Y_t^T)) = \frac{\mathbb{E}_x(f(X_t) \mathbf{1}_{t < \tau_\partial} \mathbb{P}_{X_t}(T - t < \tau_\partial))}{\mathbb{P}_x(T < \tau_\partial)}, \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

→ D'après les hypothèses A1 et A2, on obtient

$$\mathbb{E}_x(f(Y_1^T)) \geq \frac{c_1 v(f) \mathbb{P}_v(T - 1 < \tau_\partial) \mathbb{P}_x(1 < \tau_\partial)}{\mathbb{P}_x(T < \tau_\partial)} \geq c_1 c_2 v'(f).$$

→ Cette propriété de Doeblin en temps inhomogène implique que

$$\|\mathbb{P}_x(Y_T^T \in \cdot) - \mathbb{P}_y(Y_T^T \in \cdot)\|_{TV} \leq 2(1 - c_1 c_2)^{\lfloor T \rfloor}, \quad \forall x, y \in E.$$

→ Or $\mathbb{P}_x(Y_T^T \in \cdot) = \mathbb{P}_x(X_T \in \cdot \mid T < \tau_\partial)$, ce qui conclut la preuve.

- A1 et A2 utilisées/étendues dans de nombreuses situations
 - PNM (Martínez, San Martín, V. 2013, Champagnat, V. 2016)
 - diffusions multi-d (Del Moral, V., 2018, Coulibaly-Pasquier, Champagnat, V. 2017)
 - NTE (Champagnat, V. 2016, Cox, Horton, Kyprianou, V. 2019)
 - algorithmes distribués (Champagnat, Schott, V. 2019)
 - processus renforcés (Benaïm, Cloez, Panloup 2016, Benaïm, Champagnat, V. 2019)
 - limite d'échelles (Chazotte, Collet, Méléard 2017)

- A1 et A2 utilisées/étendues dans de nombreuses situations
 - PNM (Martínez, San Martín, V. 2013, Champagnat, V. 2016)
 - diffusions multi-d (Del Moral, V., 2018, Coulibaly-Pasquier, Champagnat, V. 2017)
 - NTE (Champagnat, V. 2016, Cox, Horton, Kyprianou, V. 2019)
 - algorithmes distribués (Champagnat, Schott, V. 2019)
 - processus renforcés (Benaïm, Cloez, Panloup 2016, Benaïm, Champagnat, V. 2019)
 - limite d'échelles (Chazotte, Collet, Méléard 2017)
- Ce type de preuve et/ou de condition apparaît déjà dans
 - les travaux de Birkhoff (1951)
 - les travaux de Del Moral (2004, 2013)
 - Ferrari, Marić (2008)
 - Knobloch, Partzsch (2010)

- A1 et A2 utilisées/étendues dans de nombreuses situations
 - PNM (Martínez, San Martín, V. 2013, Champagnat, V. 2016)
 - diffusions multi-d (Del Moral, V., 2018, Coulibaly-Pasquier, Champagnat, V. 2017)
 - NTE (Champagnat, V. 2016, Cox, Horton, Kyprianou, V. 2019)
 - algorithmes distribués (Champagnat, Schott, V. 2019)
 - processus renforcés (Benaïm, Cloez, Panloup 2016, Benaïm, Champagnat, V. 2019)
 - limite d'échelles (Chazotte, Collet, Méléard 2017)
- Ce type de preuve et/ou de condition apparaît déjà dans
 - les travaux de Birkhoff (1951)
 - les travaux de Del Moral (2004, 2013)
 - Ferrari, Marić (2008)
 - Knobloch, Partzsch (2010)
- Limitations intrinsèques car convergence uniforme et unicité
 - espace d'états "*compact*"
 - non adapté à l'étude de nombreux modèles classiques
 - information sur le spectre réduite, au contraire de l'approche spectrale → Van Doorn 1991, Collet, Martínez, San Martín 1995, Cattiaux, Collet, Lambert, Martínez, Méléard, San Martín 2010, Kolb, Steinsaltz 2012

2. Méthodes de couplage pour les distributions quasi-stationnaires

- a. Convergence uniforme par couplage
- b. Convergence non-uniforme par couplage et critère de Lyapunov

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus apériodique évoluant dans $E \cup \{\partial\}$.

Hypothèse E. $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \theta_1, \theta_2, c_1, c_2, c_3 > 0, \varphi_1, \varphi_2 : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ et une mesure de probabilité ν sur $K \subset E$ tels que

→ (A1-A2 local) $\forall x \in K,$

$$\mathbb{P}_x(X_{n_1} \in \cdot) \geq c_1 \nu(\cdot \cap K) \quad \text{et} \quad \frac{\mathbb{P}_\nu(n < \tau_\partial)}{\mathbb{P}_x(n < \tau_\partial)} \geq c_2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus apériodique évoluant dans $E \cup \{\partial\}$.

Hypothèse E. $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \theta_1, \theta_2, c_1, c_2, c_3 > 0, \varphi_1, \varphi_2 : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ et une mesure de probabilité ν sur $K \subset E$ tels que

→ (A1-A2 local) $\forall x \in K,$

$$\mathbb{P}_x(X_{n_1} \in \cdot) \geq c_1 \nu(\cdot \cap K) \quad \text{et} \quad \frac{\mathbb{P}_\nu(n < \tau_\partial)}{\mathbb{P}_x(n < \tau_\partial)} \geq c_2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

→ (Lyapunov) $\theta_1 < \theta_2, \varphi_1 \geq 1, \sup_K \varphi_1 < \infty, \inf_K \varphi_2 > 0, \varphi_2 \leq 1,$

$$\mathbb{E}(\varphi_1(X_1)) \leq \theta_1 \varphi_1(x) + c_2 \mathbf{1}_K(x), \quad \forall x \in E$$

$$\mathbb{E}(\varphi_2(X_1)) \geq \theta_2 \varphi_2(x), \quad \forall x \in E.$$

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus apériodique évoluant dans $E \cup \{\partial\}$.

Hypothèse E. $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \theta_1, \theta_2, c_1, c_2, c_3 > 0, \varphi_1, \varphi_2 : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ et une mesure de probabilité ν sur $K \subset E$ tels que

→ (A1-A2 local) $\forall x \in K,$

$$\mathbb{P}_x(X_{n_1} \in \cdot) \geq c_1 \nu(\cdot \cap K) \quad \text{et} \quad \frac{\mathbb{P}_\nu(n < \tau_\partial)}{\mathbb{P}_x(n < \tau_\partial)} \geq c_2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

→ (Lyapunov) $\theta_1 < \theta_2, \varphi_1 \geq 1, \sup_K \varphi_1 < \infty, \inf_K \varphi_2 > 0, \varphi_2 \leq 1,$

$$\mathbb{E}(\varphi_1(X_1)) \leq \theta_1 \varphi_1(x) + c_2 \mathbf{1}_K(x), \quad \forall x \in E$$

$$\mathbb{E}(\varphi_2(X_1)) \geq \theta_2 \varphi_2(x), \quad \forall x \in E.$$

Similarités et proximités :

- Meyn et Tweedie 1990', Hairer, Mattingly 2010
- Collet, Martínez, Méléard, San Martín 2010
- Ionescu Tulcea, Marinescu 1950, Hennion, Hervé 2001

Théorème (Champagnat, V. 2019+)

Si l'hypothèse E est satisfaite, alors $\exists v_{qs}, \alpha \in (0,1), C > 0$ tels que

$$|\mathbb{E}_\mu [f(X_n) \mid n < \tau_\partial] - v_{qs}(f)| \leq C\alpha^n \frac{\mu(\varphi_1)}{\mu(\varphi_2)}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pour toutes μ et f telles que $\mu(\varphi_1)/\mu(\varphi_2) < +\infty$ et $|f| \leq \varphi_1$.

Théorème (Champagnat, V. 2019+)

Si l'hypothèse E est satisfaite, alors $\exists v_{qs}, \alpha \in (0,1), C > 0$ tels que

$$|\mathbb{E}_\mu [f(X_n) \mid n < \tau_\partial] - v_{qs}(f)| \leq C\alpha^n \frac{\mu(\varphi_1)}{\mu(\varphi_2)}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pour toutes μ et f telles que $\mu(\varphi_1)/\mu(\varphi_2) < +\infty$ et $|f| \leq \varphi_1$.

De plus, $\exists \eta : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $\theta_0 \geq \theta_2$ tels que

$$|\theta_0^{-n} \mathbb{E}_x[f(X_n)] - \eta(x)v_{qs}(f)| \leq C\alpha^n \varphi_1(x), \quad \forall n \geq 0,$$

Théorème (Champagnat, V. 2019+)

Si l'hypothèse E est satisfaite, alors $\exists v_{qs}, \alpha \in (0,1), C > 0$ tels que

$$|\mathbb{E}_\mu [f(X_n) \mid n < \tau_\partial] - v_{qs}(f)| \leq C\alpha^n \frac{\mu(\varphi_1)}{\mu(\varphi_2)}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pour toutes μ et f telles que $\mu(\varphi_1)/\mu(\varphi_2) < +\infty$ et $|f| \leq \varphi_1$.

De plus, $\exists \eta : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $\theta_0 \geq \theta_2$ tels que

$$|\theta_0^{-n} \mathbb{E}_x[f(X_n)] - \eta(x)v_{qs}(f)| \leq C\alpha^n \varphi_1(x), \quad \forall n \geq 0,$$

→ Extensions

- temps continu
- temps inhomogène (en cours avec Oçafraïn et Champagnat)
- aux semi-groupes non-bornés par h -transformée (Bansaye, Cloez, Gabriel, Marguet 2019, Champagnat, V. 2019+)
- aux produits de noyaux aléatoires (en cours)

Application aux diffusions multi-dimensionnelles

Soit X une diffusion évoluant dans un domaine borné $D \subset \mathbb{R}^d$ et absorbé à sa frontière ∂D , solution de l'EDS

$$dX_t = \sigma(X_t) dB_t + b(X_t) dt, \quad X_0 \in D,$$

où σ et b sont Hölder et uniformément elliptiques sur \mathbb{R}^d .

Application aux diffusions multi-dimensionnelles

Soit X une diffusion évoluant dans un domaine borné $D \subset \mathbb{R}^d$ et absorbé à sa frontière ∂D , solution de l'EDS

$$dX_t = \sigma(X_t) dB_t + b(X_t) dt, \quad X_0 \in D,$$

où σ et b sont Hölder et uniformément elliptiques sur \mathbb{R}^d .

Théorème

L'hypothèse E est satisfaite avec $\varphi_1 = 1$ et φ_2 strictement positive.

Application aux diffusions multi-dimensionnelles

Soit X une diffusion évoluant dans un domaine borné $D \subset \mathbb{R}^d$ et absorbé à sa frontière ∂D , solution de l'EDS

$$dX_t = \sigma(X_t) dB_t + b(X_t) dt, \quad X_0 \in D,$$

où σ et b sont Hölder et uniformément elliptiques sur \mathbb{R}^d .

Théorème

L'hypothèse E est satisfaite avec $\varphi_1 = 1$ et φ_2 strictement positive. En particulier, il existe une unique distribution quasi-stationnaire, qui attire toutes les mesures de probabilités sur D .

Application aux diffusions multi-dimensionnelles

Soit X une diffusion évoluant dans un domaine borné $D \subset \mathbb{R}^d$ et absorbé à sa frontière ∂D , solution de l'EDS

$$dX_t = \sigma(X_t) dB_t + b(X_t) dt, \quad X_0 \in D,$$

où σ et b sont Hölder et uniformément elliptiques sur \mathbb{R}^d .

Théorème

L'hypothèse E est satisfaite avec $\varphi_1 = 1$ et φ_2 strictement positive. En particulier, il existe une unique distribution quasi-stationnaire, qui attire toutes les mesures de probabilités sur D .

Comme corollaire, nous obtenons l'existence d'une unique fonction positive η de classe C^2 telle que

$$-\lambda_0 \eta = \frac{\sigma \sigma^*}{2} \Delta \eta + b \cdot \nabla \eta$$

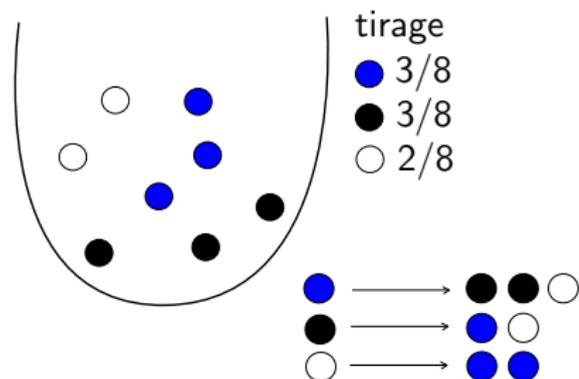
pour un certain $\lambda_0 > 0$, sans condition de régularité sur ∂D .

3. Urnes de Pólya généralisées

- a. Urnes de Pólya usuelles
- b. Urnes de Pólya à valeurs mesure

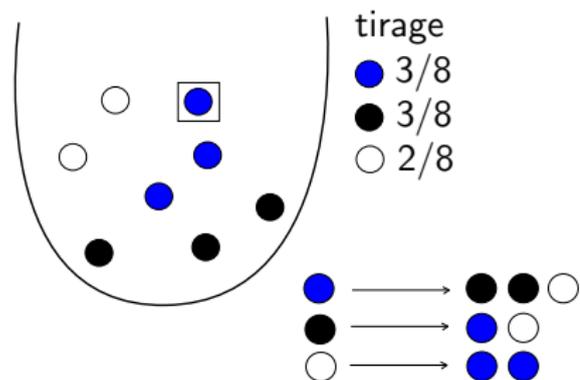
Urnes de Pólya usuelles

État de l'urne au temps n



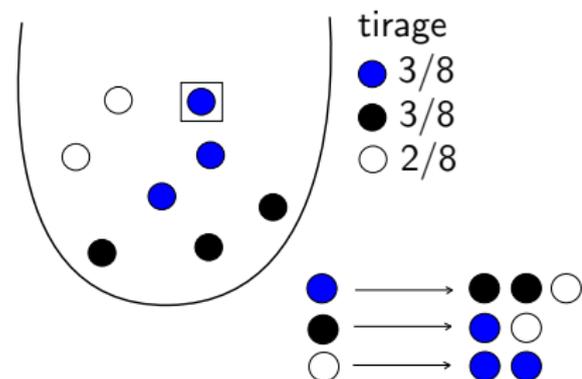
Urnes de Pólya usuelles

État de l'urne au temps n

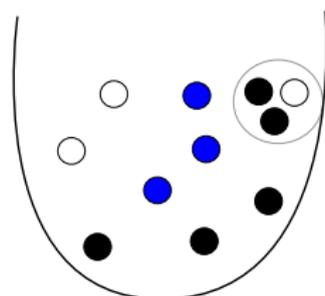


Urnes de Pólya usuelles

État de l'urne au temps n

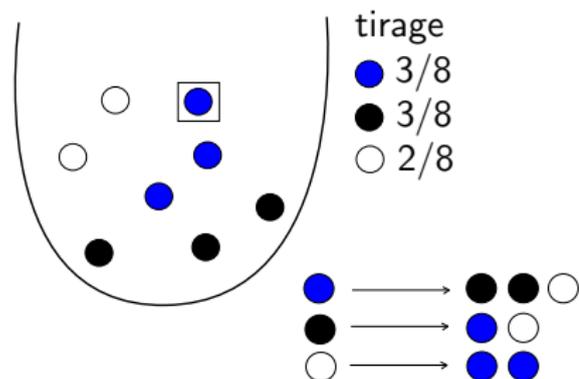


État de l'urne au temps $n+1$

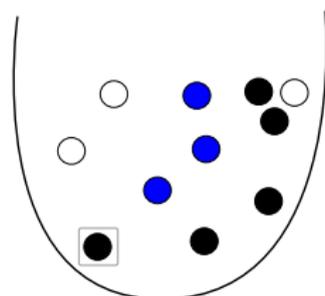


Urnes de Pólya usuelles

État de l'urne au temps n

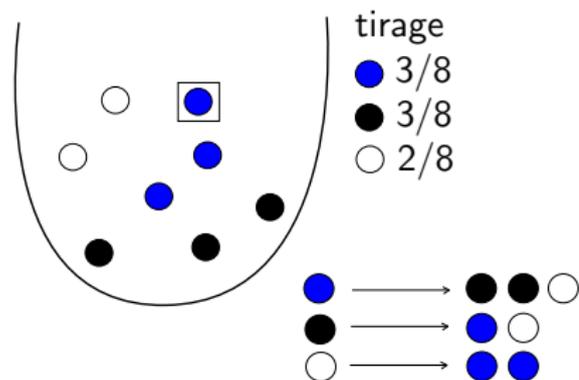


État de l'urne au temps $n+1$

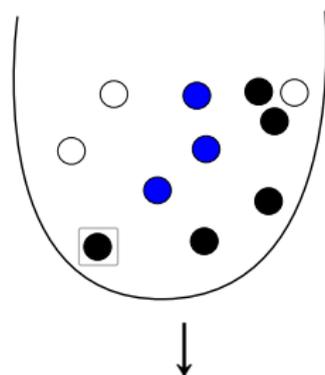


Urnes de Pólya usuelles

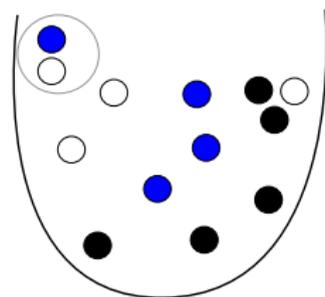
État de l'urne au temps n



État de l'urne au temps $n+1$

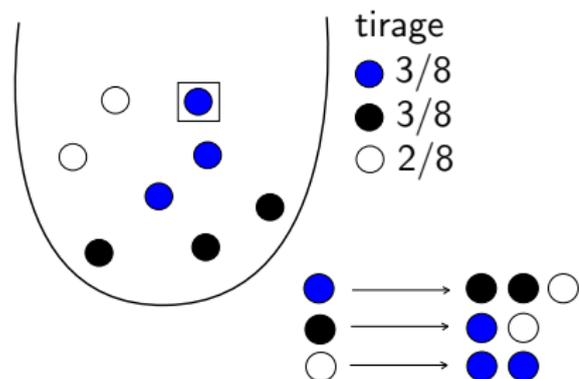


État de l'urne au temps $n+2$

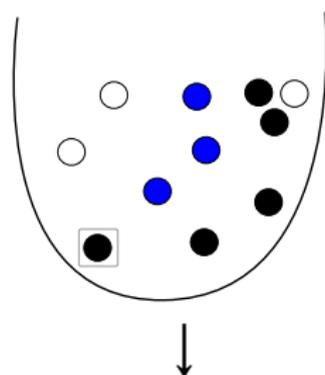


Urnes de Pólya usuelles

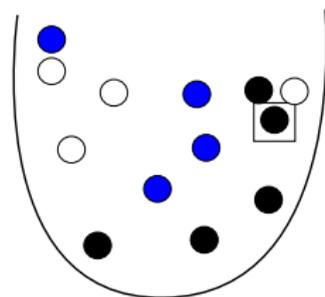
État de l'urne au temps n



État de l'urne au temps $n+1$

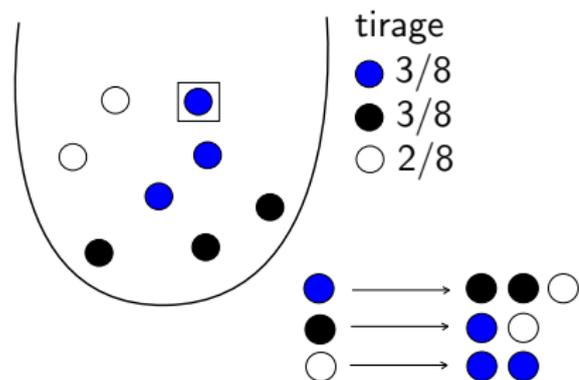


État de l'urne au temps $n+2$

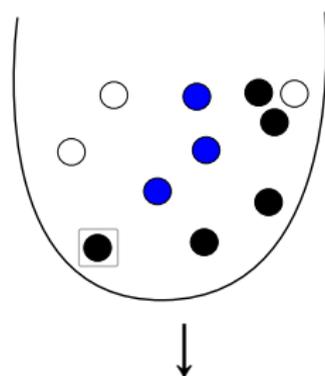


Urnes de Pólya usuelles

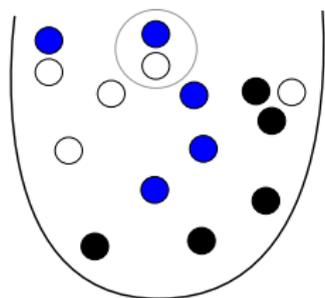
État de l'urne au temps n



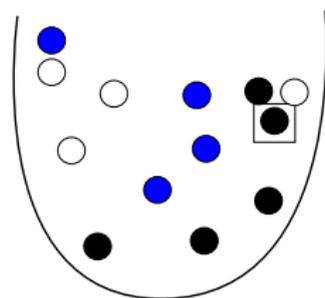
État de l'urne au temps $n+1$



État de l'urne au temps $n+3$



État de l'urne au temps $n+2$



État de l'urne au temps n

$$m_n = 3\delta_{\text{bleu}} + 3\delta_{\text{noir}} + 2\delta_{\text{blanc}}.$$

État de l'urne au temps n

$$m_n = 3\delta_{\text{bleu}} + 3\delta_{\text{noir}} + 2\delta_{\text{blanc}}.$$

Tirage d'une couleur $Y_{n+1} \in E := \{\text{bleu}, \text{noir}, \text{blanc}\}$, avec probabilité

$$Y_{n+1} \sim \frac{m_n}{m_n(E)} = \frac{3}{8}\delta_{\text{bleu}} + \frac{3}{8}\delta_{\text{noir}} + \frac{2}{8}\delta_{\text{blanc}}.$$

État de l'urne au temps n

$$m_n = 3\delta_{\text{bleu}} + 3\delta_{\text{noir}} + 2\delta_{\text{blanc}}.$$

Tirage d'une couleur $Y_{n+1} \in E := \{\text{bleu}, \text{noir}, \text{blanc}\}$, avec probabilité

$$Y_{n+1} \sim \frac{m_n}{m_n(E)} = \frac{3}{8}\delta_{\text{bleu}} + \frac{3}{8}\delta_{\text{noir}} + \frac{2}{8}\delta_{\text{blanc}}.$$

On obtient alors l'état de l'urne au temps $n+1$ via

$$m_{n+1} = m_n + \delta_{Y_{n+1}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

État de l'urne au temps n

$$m_n = 3\delta_{\text{bleu}} + 3\delta_{\text{noir}} + 2\delta_{\text{blanc}}.$$

Tirage d'une couleur $Y_{n+1} \in E := \{\text{bleu}, \text{noir}, \text{blanc}\}$, avec probabilité

$$Y_{n+1} \sim \frac{m_n}{m_n(E)} = \frac{3}{8}\delta_{\text{bleu}} + \frac{3}{8}\delta_{\text{noir}} + \frac{2}{8}\delta_{\text{blanc}}.$$

On obtient alors l'état de l'urne au temps $n+1$ via

$$m_{n+1} = m_n + \delta_{Y_{n+1}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Par exemple, si $Y_{n+1} = \text{bleu}$, alors

$$m_{n+1} = 3\delta_{\text{bleu}} + 5\delta_{\text{noir}} + 3\delta_{\text{blanc}}.$$

- Aldous, Flannery, Palacios 1988, Janson 2004, Pemantle 2007
- Bandyopadhyay, Thacker 2017, Mailler, Marckert 2017

3. Urnes de Pólya généralisées

- a. Urnes de Pólya usuelles
- b. Urnes de Pólya à valeurs mesures

Soient E un espace polonais, \mathcal{M}_+ les mesures positives sur E et

- $m_0 \in \mathcal{M}_+$ l'urne initiale,
- R un noyau sur E .

Supposons m_n défini, on choisit et pose

$$Y_{n+1} \sim \frac{m_n}{m_n(E)} \quad \text{et} \quad m_{n+1} = m_n + \delta_{Y_{n+1}} R.$$

Soient E un espace polonais, \mathcal{M}_+ les mesures positives sur E et

- $m_0 \in \mathcal{M}_+$ l'urne initiale,
- R un noyau sur E .

Supposons m_n défini, on choisit et pose

$$Y_{n+1} \sim \frac{m_n}{m_n(E)} \quad \text{et} \quad m_{n+1} = m_n + \delta_{Y_{n+1}} R.$$

Rafinements possibles : R aléatoire + tirage suivant $m_n P / m_n P(E)$

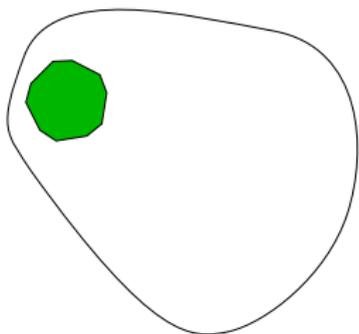
Soient E un espace polonais, \mathcal{M}_+ les mesures positives sur E et

- $m_0 \in \mathcal{M}_+$ l'urne initiale,
- R un noyau sur E .

Supposons m_n défini, on choisit et pose

$$Y_{n+1} \sim \frac{m_n}{m_n(E)} \quad \text{et} \quad m_{n+1} = m_n + \delta_{Y_{n+1}} R.$$

Rafinements possibles : R aléatoire + tirage suivant $m_n P / m_n P(E)$



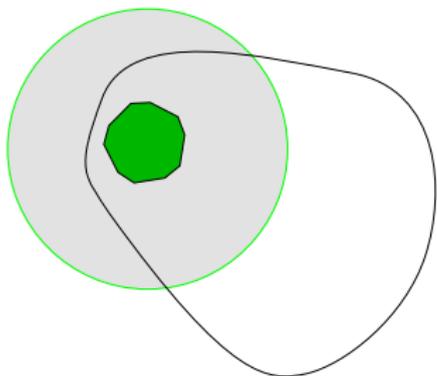
Soient E un espace polonais, \mathcal{M}_+ les mesures positives sur E et

- $m_0 \in \mathcal{M}_+$ l'urne initiale,
- R un noyau sur E .

Supposons m_n défini, on choisit et pose

$$Y_{n+1} \sim \frac{m_n}{m_n(E)} \quad \text{et} \quad m_{n+1} = m_n + \delta_{Y_{n+1}} R.$$

Rafinements possibles : R aléatoire + tirage suivant $m_n P / m_n P(E)$



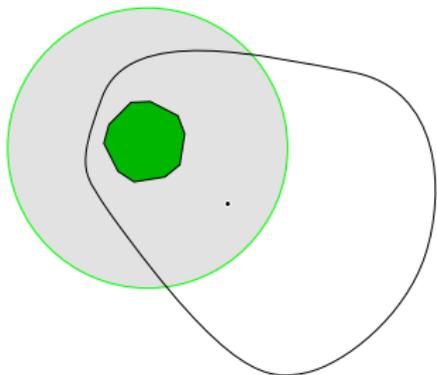
Soient E un espace polonais, \mathcal{M}_+ les mesures positives sur E et

- $m_0 \in \mathcal{M}_+$ l'urne initiale,
- R un noyau sur E .

Supposons m_n défini, on choisit et pose

$$Y_{n+1} \sim \frac{m_n}{m_n(E)} \quad \text{et} \quad m_{n+1} = m_n + \delta_{Y_{n+1}} R.$$

Rafinements possibles : R aléatoire + tirage suivant $m_n P / m_n P(E)$



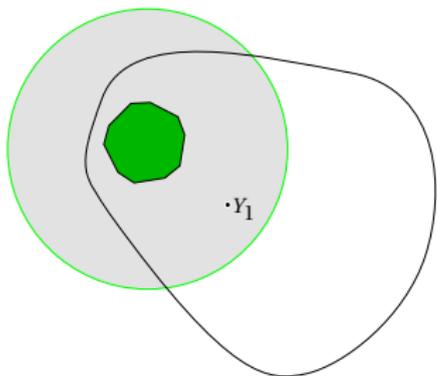
Soient E un espace polonais, \mathcal{M}_+ les mesures positives sur E et

- $m_0 \in \mathcal{M}_+$ l'urne initiale,
- R un noyau sur E .

Supposons m_n défini, on choisit et pose

$$Y_{n+1} \sim \frac{m_n}{m_n(E)} \quad \text{et} \quad m_{n+1} = m_n + \delta_{Y_{n+1}} R.$$

Rafinements possibles : R aléatoire + tirage suivant $m_n P / m_n P(E)$



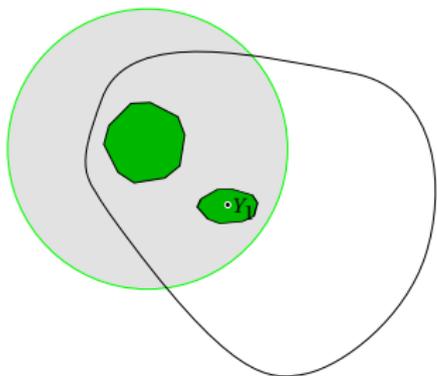
Soient E un espace polonais, \mathcal{M}_+ les mesures positives sur E et

- $m_0 \in \mathcal{M}_+$ l'urne initiale,
- R un noyau sur E .

Supposons m_n défini, on choisit et pose

$$Y_{n+1} \sim \frac{m_n}{m_n(E)} \quad \text{et} \quad m_{n+1} = m_n + \delta_{Y_{n+1}} R.$$

Rafinements possibles : R aléatoire + tirage suivant $m_n P / m_n P(E)$



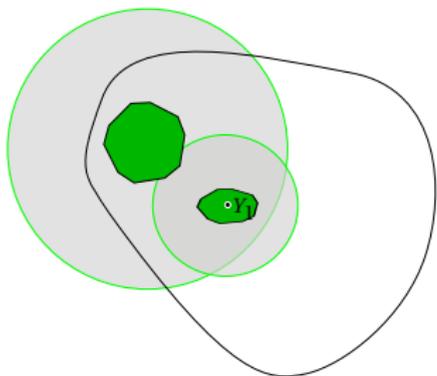
Soient E un espace polonais, \mathcal{M}_+ les mesures positives sur E et

- $m_0 \in \mathcal{M}_+$ l'urne initiale,
- R un noyau sur E .

Supposons m_n défini, on choisit et pose

$$Y_{n+1} \sim \frac{m_n}{m_n(E)} \quad \text{et} \quad m_{n+1} = m_n + \delta_{Y_{n+1}} R.$$

Rafinements possibles : R aléatoire + tirage suivant $m_n P / m_n P(E)$



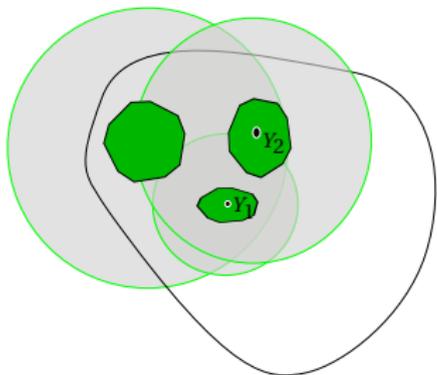
Soient E un espace polonais, \mathcal{M}_+ les mesures positives sur E et

- $m_0 \in \mathcal{M}_+$ l'urne initiale,
- R un noyau sur E .

Supposons m_n défini, on choisit et pose

$$Y_{n+1} \sim \frac{m_n}{m_n(E)} \quad \text{et} \quad m_{n+1} = m_n + \delta_{Y_{n+1}} R.$$

Rafinements possibles : R aléatoire + tirage suivant $m_n P / m_n P(E)$



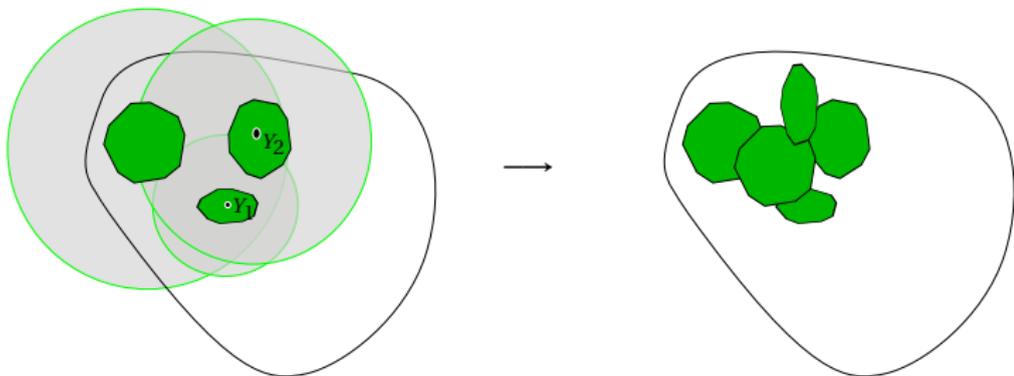
Soient E un espace polonais, \mathcal{M}_+ les mesures positives sur E et

- $m_0 \in \mathcal{M}_+$ l'urne initiale,
- R un noyau sur E .

Supposons m_n défini, on choisit et pose

$$Y_{n+1} \sim \frac{m_n}{m_n(E)} \quad \text{et} \quad m_{n+1} = m_n + \delta_{Y_{n+1}} R.$$

Rafinements possibles : R aléatoire + tirage suivant $m_n P / m_n P(E)$



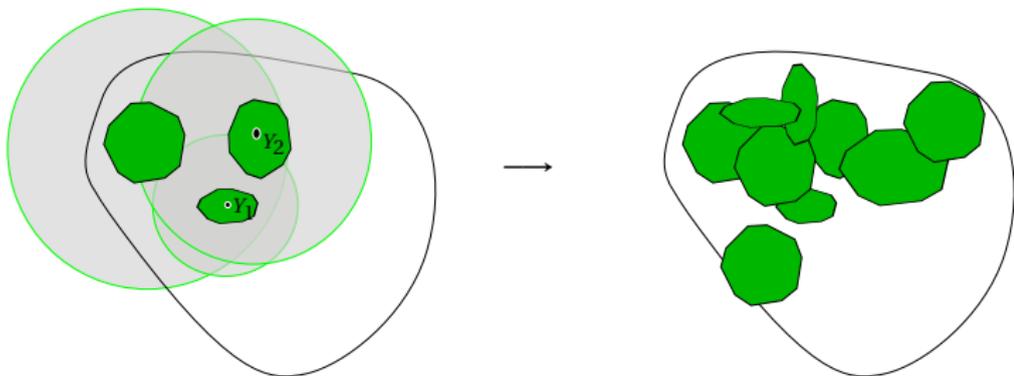
Soient E un espace polonais, \mathcal{M}_+ les mesures positives sur E et

- $m_0 \in \mathcal{M}_+$ l'urne initiale,
- R un noyau sur E .

Supposons m_n défini, on choisit et pose

$$Y_{n+1} \sim \frac{m_n}{m_n(E)} \quad \text{et} \quad m_{n+1} = m_n + \delta_{Y_{n+1}} R.$$

Rafinements possibles : R aléatoire + tirage suivant $m_n P / m_n P(E)$



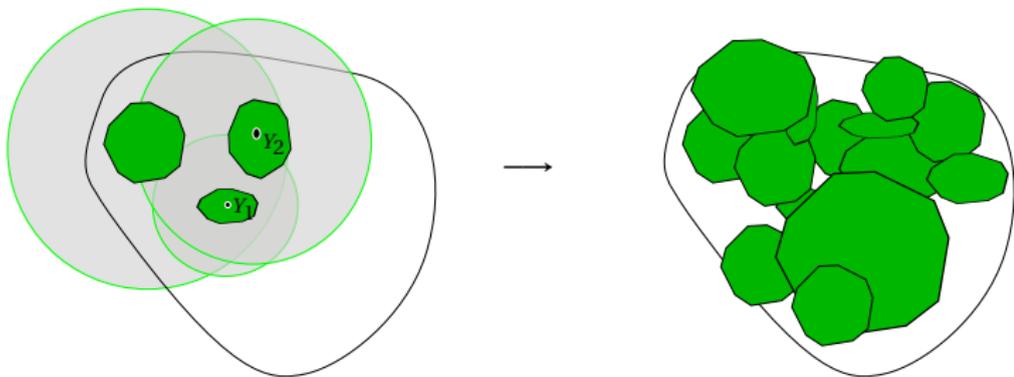
Soient E un espace polonais, \mathcal{M}_+ les mesures positives sur E et

- $m_0 \in \mathcal{M}_+$ l'urne initiale,
- R un noyau sur E .

Supposons m_n défini, on choisit et pose

$$Y_{n+1} \sim \frac{m_n}{m_n(E)} \quad \text{et} \quad m_{n+1} = m_n + \delta_{Y_{n+1}} R.$$

Rafinements possibles : R aléatoire + tirage suivant $m_n P / m_n P(E)$



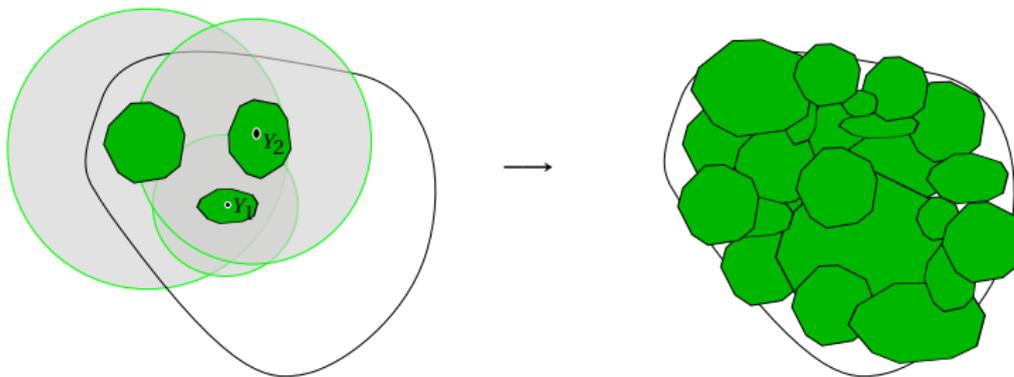
Soient E un espace polonais, \mathcal{M}_+ les mesures positives sur E et

- $m_0 \in \mathcal{M}_+$ l'urne initiale,
- R un noyau sur E .

Supposons m_n défini, on choisit et pose

$$Y_{n+1} \sim \frac{m_n}{m_n(E)} \quad \text{et} \quad m_{n+1} = m_n + \delta_{Y_{n+1}} R.$$

Rafinements possibles : R aléatoire + tirage suivant $m_n P / m_n P(E)$



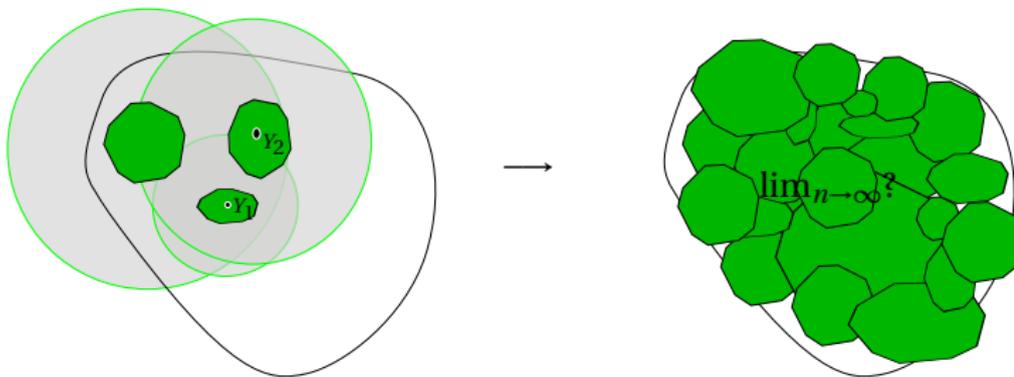
Soient E un espace polonais, \mathcal{M}_+ les mesures positives sur E et

- $m_0 \in \mathcal{M}_+$ l'urne initiale,
- R un noyau sur E .

Supposons m_n défini, on choisit et pose

$$Y_{n+1} \sim \frac{m_n}{m_n(E)} \quad \text{et} \quad m_{n+1} = m_n + \delta_{Y_{n+1}} R.$$

Rafinements possibles : R aléatoire + tirage suivant $m_n P / m_n P(E)$



Hypothèse C. Il existe $c_1, c_2, \theta > 0$ et une fonction V localement bornée à ensembles de niveau compacts tels que

- $0 < c_1 \leq \inf_{x \in E} R_x(E) \leq \sup_{x \in E} R_x(E) \leq 1$

Hypothèse C. Il existe $c_1, c_2, \theta > 0$ et une fonction V localement bornée à ensembles de niveau compacts tels que

- $0 < c_1 \leq \inf_{x \in E} R_x(E) \leq \sup_{x \in E} R_x(E) \leq 1$
- $\theta \in (0, c_1)$ et

$$R_x \cdot V \leq \theta V(x) + c_2, \quad \forall x \in E.$$

Hypothèse C. Il existe $c_1, c_2, \theta > 0$ et une fonction V localement bornée à ensembles de niveau compacts tels que

- $0 < c_1 \leq \inf_{x \in E} R_x(E) \leq \sup_{x \in E} R_x(E) \leq 1$
- $\theta \in (0, c_1)$ et

$$R_x \cdot V \leq \theta V(x) + c_2, \quad \forall x \in E.$$

- le noyau de saut sous-Markovien $R-I$ admet une distribution quasi-stationnaire ν_{qs} . De plus, la convergence vers la DQS a lieu uniformément en variation totale sur les ensembles du type $\{\alpha \in \mathcal{M}_1(E) \mid \alpha \cdot V^{1/q} \leq C\}$, $C > 0$ pour un certain $q > 1$.

Hypothèse C. Il existe $c_1, c_2, \theta > 0$ et une fonction V localement bornée à ensembles de niveau compacts tels que

- $0 < c_1 \leq \inf_{x \in E} R_x(E) \leq \sup_{x \in E} R_x(E) \leq 1$
- $\theta \in (0, c_1)$ et

$$R_x \cdot V \leq \theta V(x) + c_2, \quad \forall x \in E.$$

- le noyau de saut sous-Markovien $R-I$ admet une distribution quasi-stationnaire ν_{qs} . De plus, la convergence vers la DQS a lieu uniformément en variation totale sur les ensembles du type $\{\alpha \in \mathcal{M}_1(E) \mid \alpha \cdot V^{1/q} \leq C\}$, $C > 0$ pour un certain $q > 1$.
- enfin, $x \in E \mapsto R_x f$ est continu.

Hypothèse C. Il existe $c_1, c_2, \theta > 0$ et une fonction V localement bornée à ensembles de niveau compacts tels que

- $0 < c_1 \leq \inf_{x \in E} R_x(E) \leq \sup_{x \in E} R_x(E) \leq 1$
- $\theta \in (0, c_1)$ et

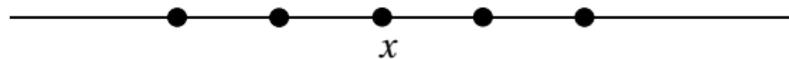
$$R_x \cdot V \leq \theta V(x) + c_2, \quad \forall x \in E.$$

- le noyau de saut sous-Markovien $R-I$ admet une distribution quasi-stationnaire ν_{qs} . De plus, la convergence vers la DQS a lieu uniformément en variation totale sur les ensembles du type $\{\alpha \in \mathcal{M}_1(E) \mid \alpha \cdot V^{1/q} \leq C\}$, $C > 0$ pour un certain $q > 1$.
- enfin, $x \in E \mapsto R_x f$ est continu.

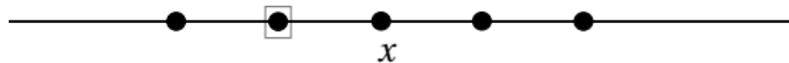
Théorème (Mailler, V. 2019)

Si $m_0 \cdot V < \infty$, alors la suite de mesures aléatoires $(m_n / m_n(E))_{n \geq 0}$ converge presque sûrement faiblement vers ν_{qs} .

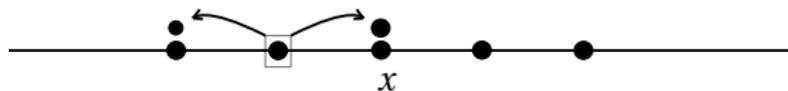
Application 1 : noyau quasi-ergodique



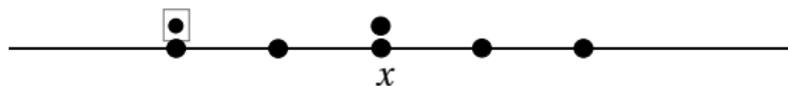
Application 1 : noyau quasi-ergodique



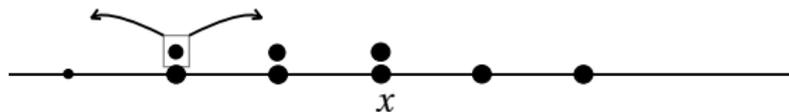
Application 1 : noyau quasi-ergodique



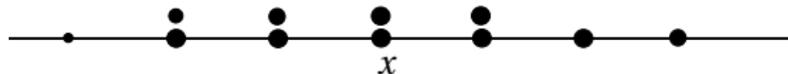
Application 1 : noyau quasi-ergodique



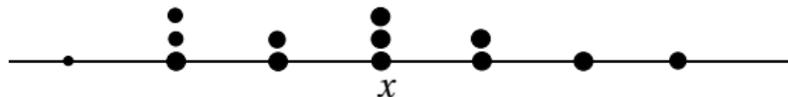
Application 1 : noyau quasi-ergodique



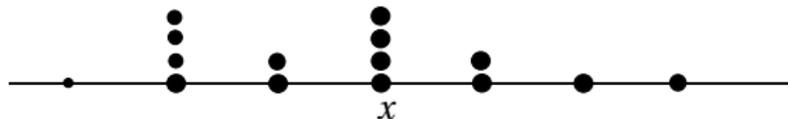
Application 1 : noyau quasi-ergodique



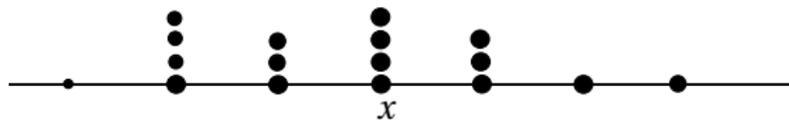
Application 1 : noyau quasi-ergodique



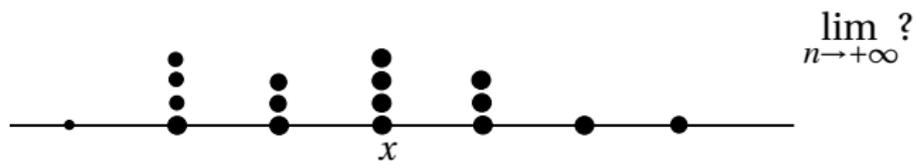
Application 1 : noyau quasi-ergodique



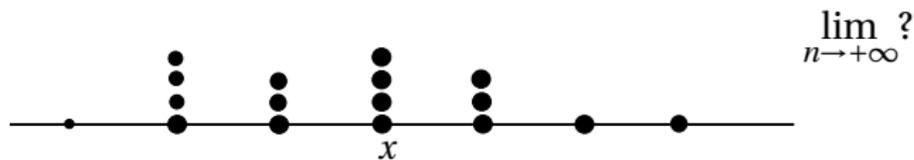
Application 1 : noyau quasi-ergodique



Application 1 : noyau quasi-ergodique



Application 1 : noyau quasi-ergodique

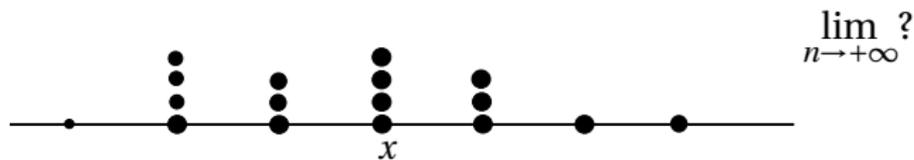


Dans cet exemple, $E = \mathbb{Z}$ et, pour tout $x \in \mathbb{Z}$,

$$R_x = \lambda_x \delta_{x+1} + \mu_x \delta_{x-1},$$

où $\lambda_x, \mu_x > 0$, $\inf_{x \geq 1} \mu_x > 0$, $\sup_{x \geq 1} \mu_x = 1$ et $\lambda_x = +\infty o(\mu_x)$,
 $\inf_{x \leq -1} \lambda_x > 0$, $\sup_{x \leq -1} \lambda_x = 1$ et $\mu_x = -\infty o(\lambda_x)$

Application 1 : noyau quasi-ergodique



Dans cet exemple, $E = \mathbb{Z}$ et, pour tout $x \in \mathbb{Z}$,

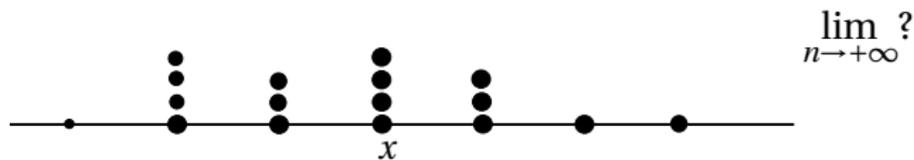
$$R_x = \lambda_x \delta_{x+1} + \mu_x \delta_{x-1},$$

où $\lambda_x, \mu_x > 0$, $\inf_{x \geq 1} \mu_x > 0$, $\sup_{x \geq 1} \mu_x = 1$ et $\lambda_x = +\infty o(\mu_x)$,
 $\inf_{x \leq -1} \lambda_x > 0$, $\sup_{x \leq -1} \lambda_x = 1$ et $\mu_x = -\infty o(\lambda_x)$

Alors

- $0 < \inf_{x \in E} \lambda_x + \mu_x = \inf_{x \in E} R_x(E) \leq \sup_{x \in E} R_x(E) = 1$,
- en posant $V(x) = e^{a|x|}$, $a \gg 1$, $R_x V \leq \frac{\inf_{x \in E} \lambda_x + \mu_x}{2} V(x) + C$,
- le processus de générateur $R - Id$ satisfait l'hypothèse E,
- la continuité de R_x est immédiate.

Application 1 : noyau quasi-ergodique



Dans cet exemple, $E = \mathbb{Z}$ et, pour tout $x \in \mathbb{Z}$,

$$R_x = \lambda_x \delta_{x+1} + \mu_x \delta_{x-1},$$

où $\lambda_x, \mu_x > 0$, $\inf_{x \geq 1} \mu_x > 0$, $\sup_{x \geq 1} \mu_x = 1$ et $\lambda_x = +\infty o(\mu_x)$,
 $\inf_{x \leq -1} \lambda_x > 0$, $\sup_{x \leq -1} \lambda_x = 1$ et $\mu_x = -\infty o(\lambda_x)$

Proposition

L'urne de Pólya générée par R converge presque sûrement vers l'unique DQS ν_{qs} associée à R et telle que $\nu_{qs}(V) < +\infty$.

Application 2 : degré extérieur d'une forêt aléatoire

Definition

Le *degré extérieur* d'un nœud est le nombre de ses enfants.

Le *profile des degrés extérieurs* d'un arbre \mathcal{T} est

$$\text{Out}(\mathcal{T}) = \sum_{n \in \mathcal{T}} \delta_{\text{degré extérieur de } n}$$

Application 2 : degré extérieur d'une forêt aléatoire

Definition

Le *degré extérieur* d'un nœud est le nombre de ses enfants.

Le *profile des degrés extérieurs* d'un arbre \mathcal{T} est

$$\text{Out}(\mathcal{T}) = \sum_{n \in \mathcal{T}} \delta_{\text{degré extérieur de } n}$$

Construction de l'arbre aléatoire récursif.

- RRT_1 a un nœud (la racine)
- $RRT_{n+1} = RRT_n +$ un enfant ajouté uniformément

Application 2 : degré extérieur d'une forêt aléatoire

Definition

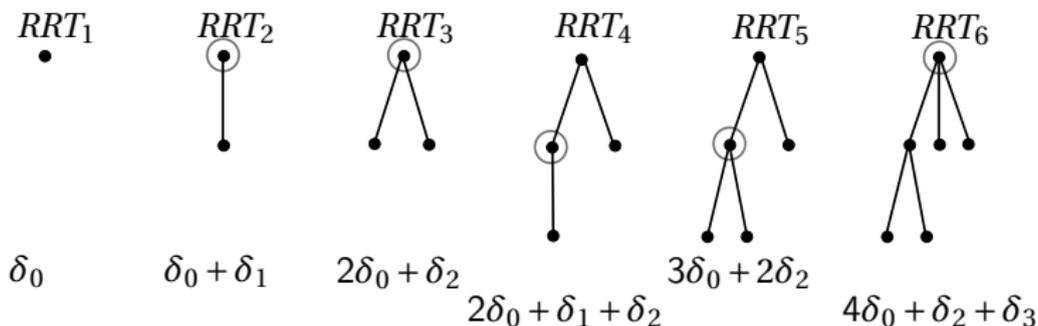
Le *degré extérieur* d'un nœud est le nombre de ses enfants.

Le *profile des degrés extérieurs* d'un arbre \mathcal{T} est

$$\text{Out}(\mathcal{T}) = \sum_{n \in \mathcal{T}} \delta_{\text{degré extérieur de } n}$$

Construction de l'arbre aléatoire récursif.

- RRT_1 a un nœud (la racine)
- $RRT_{n+1} = RRT_n +$ un enfant ajouté uniformément



Construction d'une forêt aléatoire récursive.

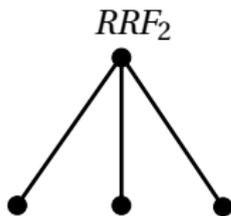
- RRF_1 a un noeud
- RRF_{n+1} : un nœud n de RRF_n est choisi uniformément, puis
 - si n est une feuille, on lui ajoute $X \sim \sum_{k \geq 0} \alpha_k \delta_k$ enfants ;
 - sinon, on lui ajoute/supprime $X \sim \sum_{k \geq -1} \beta_k \alpha_k$ enfants,où $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ et $(\beta_k)_{k \geq -1}$ sont des mesures de probabilités.

RRF_1



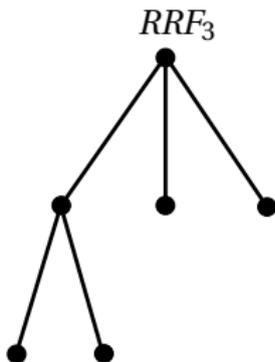
Construction d'une forêt aléatoire récursive.

- RRF_1 a un noeud
- RRF_{n+1} : un nœud n de RRF_n est choisi uniformément, puis
 - si n est une feuille, on lui ajoute $X \sim \sum_{k \geq 0} \alpha_k \delta_k$ enfants ;
 - sinon, on lui ajoute/supprime $X \sim \sum_{k \geq -1} \beta_k \alpha_k$ enfants,où $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ et $(\beta_k)_{k \geq -1}$ sont des mesures de probabilités.



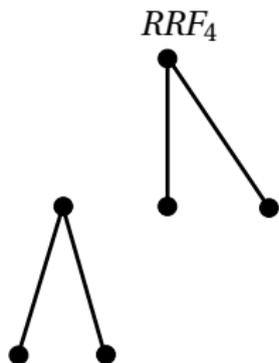
Construction d'une forêt aléatoire récursive.

- RRF_1 a un noeud
- RRF_{n+1} : un nœud n de RRF_n est choisi uniformément, puis
 - si n est une feuille, on lui ajoute $X \sim \sum_{k \geq 0} \alpha_k \delta_k$ enfants ;
 - sinon, on lui ajoute/supprime $X \sim \sum_{k \geq -1} \beta_k \alpha_k$ enfants,où $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ et $(\beta_k)_{k \geq -1}$ sont des mesures de probabilités.



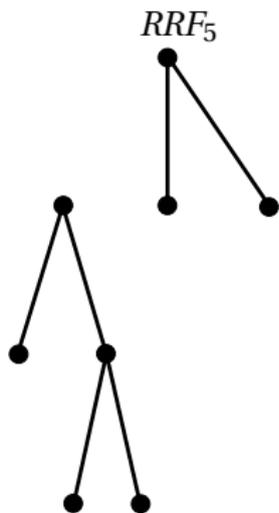
Construction d'une forêt aléatoire récursive.

- RRF_1 a un noeud
- RRF_{n+1} : un nœud n de RRF_n est choisi uniformément, puis
 - si n est une feuille, on lui ajoute $X \sim \sum_{k \geq 0} \alpha_k \delta_k$ enfants ;
 - sinon, on lui ajoute/supprime $X \sim \sum_{k \geq -1} \beta_k \alpha_k$ enfants,où $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ et $(\beta_k)_{k \geq -1}$ sont des mesures de probabilités.



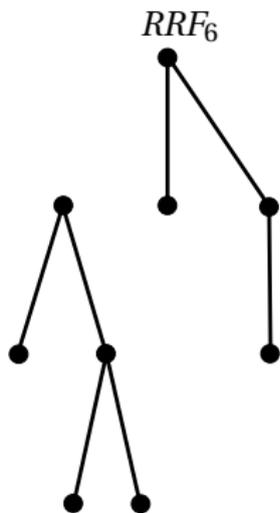
Construction d'une forêt aléatoire récursive.

- RRF_1 a un noeud
- RRF_{n+1} : un nœud n de RRF_n est choisi uniformément, puis
 - si n est une feuille, on lui ajoute $X \sim \sum_{k \geq 0} \alpha_k \delta_k$ enfants ;
 - sinon, on lui ajoute/supprime $X \sim \sum_{k \geq -1} \beta_k \alpha_k$ enfants,où $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ et $(\beta_k)_{k \geq -1}$ sont des mesures de probabilités.



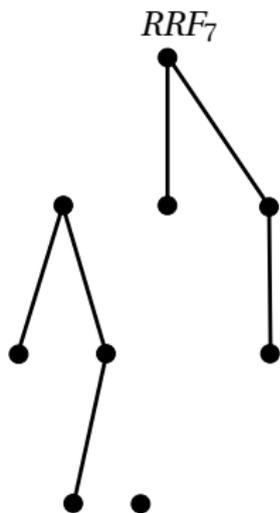
Construction d'une forêt aléatoire récursive.

- RRF_1 a un noeud
- RRF_{n+1} : un nœud n de RRF_n est choisi uniformément, puis
 - si n est une feuille, on lui ajoute $X \sim \sum_{k \geq 0} \alpha_k \delta_k$ enfants ;
 - sinon, on lui ajoute/supprime $X \sim \sum_{k \geq -1} \beta_k \alpha_k$ enfants,où $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ et $(\beta_k)_{k \geq -1}$ sont des mesures de probabilités.



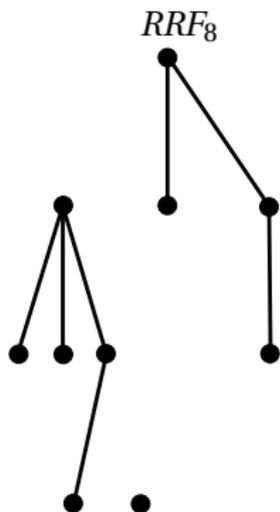
Construction d'une forêt aléatoire récursive.

- RRF_1 a un noeud
- RRF_{n+1} : un nœud n de RRF_n est choisi uniformément, puis
 - si n est une feuille, on lui ajoute $X \sim \sum_{k \geq 0} \alpha_k \delta_k$ enfants ;
 - sinon, on lui ajoute/supprime $X \sim \sum_{k \geq -1} \beta_k \alpha_k$ enfants,où $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ et $(\beta_k)_{k \geq -1}$ sont des mesures de probabilités.



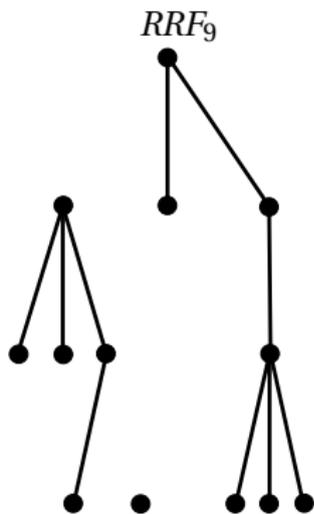
Construction d'une forêt aléatoire récursive.

- RRF_1 a un noeud
- RRF_{n+1} : un nœud n de RRF_n est choisi uniformément, puis
 - si n est une feuille, on lui ajoute $X \sim \sum_{k \geq 0} \alpha_k \delta_k$ enfants ;
 - sinon, on lui ajoute/supprime $X \sim \sum_{k \geq -1} \beta_k \alpha_k$ enfants,où $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ et $(\beta_k)_{k \geq -1}$ sont des mesures de probabilités.



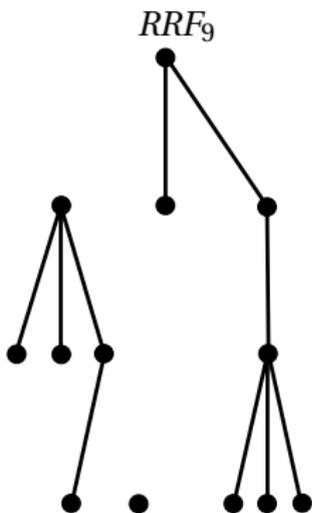
Construction d'une forêt aléatoire récursive.

- RRF_1 a un noeud
- RRF_{n+1} : un nœud n de RRF_n est choisi uniformément, puis
 - si n est une feuille, on lui ajoute $X \sim \sum_{k \geq 0} \alpha_k \delta_k$ enfants ;
 - sinon, on lui ajoute/supprime $X \sim \sum_{k \geq -1} \beta_k \alpha_k$ enfants,où $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ et $(\beta_k)_{k \geq -1}$ sont des mesures de probabilités.



Construction d'une forêt aléatoire récursive.

- RRF_1 a un noeud
- RRF_{n+1} : un noeud n de RRF_n est choisi uniformément, puis
 - si n est une feuille, on lui ajoute $X \sim \sum_{k \geq 0} \alpha_k \delta_k$ enfants ;
 - sinon, on lui ajoute/supprime $X \sim \sum_{k \geq -1} \beta_k \alpha_k$ enfants,où $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ et $(\beta_k)_{k \geq -1}$ sont des mesures de probabilités.



Proposition

Si α et β admettent un moment exponentiel, alors le profil renormalisé des degrés extérieurs de RRF_n converge presque sûrement vers une mesure de probabilité ν_{qs} .

Application 3 : processus auto-renforcé

Soit $(Y_t)_{t \geq 0}$ évoluant dans \mathbb{R}^d comme suit :

→ Y évolue suivant l'EDS

$$dY_t = dB_t + b(Y_t) dt, Y_0 \in \mathbb{R}^d \quad (1)$$

→ et, à taux $\kappa(Y_t) \geq 1$, le processus saute suivant sa mesure d'occupation $\frac{1}{t} \int_0^t \delta_{Y_s} ds$.

Application 3 : processus auto-renforcé

Soit $(Y_t)_{t \geq 0}$ évoluant dans \mathbb{R}^d comme suit :

→ Y évolue suivant l'EDS

$$dY_t = dB_t + b(Y_t) dt, \quad Y_0 \in \mathbb{R}^d \quad (1)$$

→ et, à taux $\kappa(Y_t) \geq 1$, le processus saute suivant sa mesure d'occupation $\frac{1}{t} \int_0^t \delta_{Y_s} ds$.

Théorème

Supposons que $\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\langle b(x), x \rangle}{|x|} < -\frac{3}{2} \|\kappa\|_\infty^{1/2}$. Alors

- la solution à (1) admet une unique DQS ν_{qs} avec un moment exponentiel d'ordre $\|\kappa\|_\infty^{1/2}$

Application 3 : processus auto-renforcé

Soit $(Y_t)_{t \geq 0}$ évoluant dans \mathbb{R}^d comme suit :

→ Y évolue suivant l'EDS

$$dY_t = dB_t + b(Y_t) dt, \quad Y_0 \in \mathbb{R}^d \quad (1)$$

→ et, à taux $\kappa(Y_t) \geq 1$, le processus saute suivant sa mesure d'occupation $\frac{1}{t} \int_0^t \delta_{Y_s} ds$.

Théorème

Supposons que $\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\langle b(x), x \rangle}{|x|} < -\frac{3}{2} \|\kappa\|_\infty^{1/2}$. Alors

- la solution à (1) admet une unique DQS ν_{qs} avec un moment exponentiel d'ordre $\|\kappa\|_\infty^{1/2}$
- presque sûrement,

$$\frac{1}{t} \int_0^t \delta_{Y_s} ds \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{faible} \nu_{qs}.$$

- Étude de la longueur des télomères
 - Albuisson, Benetos, Fritsch, Gégout-Petit, Horton, Toupance
- Simulation des diffusions uni-dimensionnelles
 - Anagnostakis, Le Jay
- Étude des processus de branchement
 - Coudray, Fritsch, Horton, Lenotre
- Travaux sur les DQS
 - Champagnat, Lelièvre, Oçafrain, Strickler
- Algorithmes de simulation d'événements rares
 - Cox, Kyprianou, Horton
- Courbure de Ricci grossière