

La bicatégorie cartésienne fermée des espèces de structures généralisées*

Rémy Tuyéras

14 février 2010

Table des matières

1	Introduction aux espèces de structures	2
1.1	Séries de Taylor et foncteurs analytiques	2
1.2	Espèces de structures	3
2	Généralisation des espèces de structures	4
2.1	Espèces de structures généralisées	4
2.2	Foncteurs analytiques généralisées	5
3	La bicatégorie des espèces de structures généralisées	9
3.1	Rappels sur les bicatégories	9
3.2	La bicatégorie Esp	9
4	La bicatégorie Esp cartésienne fermée	11
4.1	Rappels sur la structure cartésienne fermée pour les bicatégories	11
4.2	Structure cartésienne	12
4.3	Structure fermée	14

Résumé

Nous rappelons premièrement ce que sont les foncteurs analytiques et les espèces de structures. Puis nous procédons à leur généralisation et nous construisons une bicatégorie des objets qui en résultent. Nous montrons finalement, dans les grandes lignes, que cette bicatégorie est cartésienne fermée.

*Examen de la session 2009/2010 du cours de Paul-André Mellès de *Catégories et lambda-calcul*.

1 Introduction aux espèces de structures

1.1 Séries de Taylor et foncteurs analytiques

L'étude des *espèces de structures* est née de l'intérêt portée aux ensembles pouvant s'exprimer sous la forme de séries formelles. Un exemple bien connu est le *monoïde librement engendré* par un ensemble A , qui s'exprime en les termes de la *somme disjointe* :

$$L(A) = \sum_{n \geq 0} A^n.$$

Cette écriture, nous donnant une esquisse de ce que l'on peut entendre par « série formelle », peut être généraliser au point de trouver une forme commune aux séries formelles que l'on utilise en analyse. Cette généralisation consiste principalement à attribuer des coefficients aux monômes de nos séries. Il faut cependant garder à l'esprit que nous travaillons dans le domaine des ensembles ce qui par conséquent nous oblige à exprimer nos coefficients en des termes ensemblistes. Par exemple, pour simuler la division des monômes par un coefficient, nous utilisons une action de groupe. Une bonne illustration de cela est la série dite « exponentielle »

$$\exp(A) = \sum_{n \geq 0} A^n / \mathfrak{S}_n$$

qui définit l'usuel *monoïde commutatif libre* sur un ensemble A . Le terme A^n est quotienté par l'action de groupe $\sigma.f = f \circ \sigma^{-1}$ pour tout $f \in A^n$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. La qualification « exponentielle » vient du fait que le cardinal de \mathfrak{S}_n est égale à $n!$, ce qui nous rapproche d'un certain point de vue de la série exponentielle que l'on a l'habitude de manipuler en analyse. Enfin nous pouvons terminer la généralisation en simulant la multiplication des monômes par un coefficient à l'aide du produit cartésien avec un ensemble. Ainsi, nous obtenons une forme générale très semblable à un développement en série de Taylor

$$F(A) = \sum_{n \geq 0} (A^n \times F_n) / \mathfrak{S}_n$$

où le n -ième terme $A^n \times F_n$ de cette série est quotienté par l'action de groupe $\sigma.(f, t) = (f \circ \sigma^{-1}, \sigma.t)$ pour tout $f \in A^n$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $t \in F_n$. Cependant, une première ambiguïté semble apparaître dans l'interprétation de l'opération $\sigma.t$ que nous ne pouvons *a priori* définir sans connaître la forme de l'ensemble F_n . En fait, nous pourrions faire disparaître ce manque d'information sur les ensembles F_n lorsque nous en viendrons à la définition des espèces de structures, laquelle consistera à clarifier la construction du terme F_n de manière très générale grâce à la notion de foncteur.

C'est cette généralisation qui nous amène à vouloir étudier les séries formelles d'ensemble via le concept de *foncteurs analytiques* que nous introduisons par la suivante définition.

Définition 1.1. *Un foncteur $F : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ens}$ est analytique si pour tout $A \in \text{Obj}(\mathbf{Ens})$ il possède un développement en série de Taylor*

$$FA = \sum_{n \geq 0} A^n \times F[n]$$

où le n -ième terme $A^n \times F_n$ subit l'action de groupe $\sigma.(f, t) = (f \circ \sigma^{-1}, \sigma t)$ pour tout $f \in A^n$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $t \in F[n]$.

Une des grandes motivations de l'étude des foncteurs analytiques est qu'ils sont stables par des opérations élémentaires comme les combinaisons linéaires finies ou infinies, les produits finies, la composition et le quotient par l'action d'un groupe. Mais, comme nous l'avons déjà fait remarquer, l'obtention de ses résultats se révèle trop difficile lorsque nous ne précisons pas d'avantage la forme des coefficients $F[n]$. C'est pourquoi nous introduisons la notion d'*espèce de structures*.

1.2 Espèces de structures

Comme l'expose André Joyal dans ses articles [5] et [6], la théorie des espèces de structures est essentiellement une théorie des coefficients des foncteurs analytiques, ce qui par conséquent lui fait entretenir un lien étroit avec la théorie des séries formelles et la combinatoire.

Définition 1.2. Une espèce de structures¹ est un foncteur de $F[\cdot] : \mathbb{P} \rightarrow \mathbf{Ens}$, où \mathbb{P} est la catégorie des entiers (vus comme des ensembles) et des bijections et \mathbf{Ens} la catégorie des ensembles et des fonctions.

Ainsi, les coefficients d'un foncteur analytique F nous seront généralement donnés par l'application d'un foncteur $F[\cdot]$ sur un entier. Le fait que l'on prenne la forme d'un foncteur de $\mathbb{P} \rightarrow \mathbf{Ens}$ nous aide alors à résoudre l'ambiguïté rencontrée lors de l'action des groupes symétriques sur les coefficients des foncteurs analytiques. En effet, à toute bijection $(\sigma : n \rightarrow n) \in \mathbb{P}$ on peut maintenant associer une fonction (qui est en fait une bijection à cause des axiomes de composition et d'identité)

$$F[\sigma] : \begin{cases} F[n] \rightarrow F[n] \\ t \mapsto t' \end{cases}$$

avec laquelle on peut désormais définir l'action $\sigma.t = F[\sigma](t)$ de manière générale.

Notre but n'est cependant pas d'étudier les espèces de structures telles que nous venons de les présenter. Si le lecteur est intéressé par de plus amples développements à ce sujet, il peut se référer aux ouvrages [5], [6] et [2]. Pour notre part, nous allons nous intéresser à une généralisation des espèces de structures, au point où la forme classique de ce dernier objet s'exprimera, après généralisation, en terme de $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ -*espèce de structures généralisées*. Notre but final sera alors de montrer que la bicatégorie \mathbf{Esp} des espèces de structures généralisées est cartésienne fermée.

¹On appelle *structures* les éléments des ensembles $F[n]$ pour tout $n \in \text{Obj}(\mathbf{Ens})$.

2 Généralisation des espèces de structures

2.1 Espèces de structures généralisées

Pour des raisons de commodités, nous conviendrons désormais que l'écriture $[n]$ désigne l'entier n vu en tant qu'ensemble, c'est-à-dire que l'on a l'égalité

$$[n] = \{0, \dots, n-1\}.$$

La proposition suivante définit une catégorie $\mathbb{P}A$ où \mathbb{P} est une catégorie et A une petite catégorie. Elle peut être vue comme une généralisation de la catégorie \mathbb{P} , que l'on peut alors retrouver (à isomorphisme près) en prenant A égale à la catégorie terminale $\mathbf{1}$.

Proposition 2.1. *Soit \mathbb{P} la catégorie des entiers et des bijections et A une petite catégorie. On peut définir une catégorie $\mathbb{P}A$ telle que :*

- les objets sont les applications de la forme $[n] \rightarrow \text{Obj}(A)$ où $[n] \in \text{Obj}(\mathbb{P})$; on les désignera par l'écriture $\langle a_i \rangle_{i \in [n]}$ où pour tout $i \in [n]$ on a $a_i \in \text{Obj}(A)$;
- les morphismes de la forme $\langle a_i \rangle_{i \in [n]} \rightarrow \langle a'_j \rangle_{j \in [n]}$ dans $\mathbb{P}A$ sont définis pour toute paire $(\sigma, \langle f_i \rangle_{i \in [n]})$ où $\sigma : [n] \rightarrow [n]$ existe dans \mathbb{P} et $f_i : a_i \rightarrow a'_{\sigma(i)}$ existe dans A . Ils sont alors notés $\sigma \otimes \langle f_i \rangle_{i \in [n]}$.

Preuve : Il suffit de définir les éléments identités et l'opération de composition et de prouver qu'ils vérifient bien les axiomes de la définition d'une catégorie. Pour commencer, définissons les éléments identités pour tout élément de la forme $\langle a_i \rangle_{i \in [n]}$ avec $[n] \in \text{Obj}(\mathbb{P})$ et $a_i \in \text{Obj}(A)$. Le fait que \mathbb{P} et A sont des catégories nous donne l'existence de l'élément identité $\text{Id}_{[n]} : [n] \rightarrow [n]$ ainsi que des éléments identités $\text{Id}_{a_i} : a_i \rightarrow a_i$. On définit par conséquent l'élément identité :

$$\text{Id}_{\langle a_i \rangle_{i \in [n]}} = \text{Id}_{[n]} \otimes \langle \text{Id}_{a_i} \rangle_{i \in [n]},$$

qui est bien un morphisme de $\mathbb{P}A$ puisque $(a_i \rightarrow a_i) = (a_i \rightarrow a_{\text{Id}_{[n]}(i)})$. Ensuite, on définit l'opération de composition par l'équation :

$$(\sigma \otimes \langle f_i \rangle_{i \in [n]}) \circ (\tau \otimes \langle g_i \rangle_{i \in [n]}) = (\sigma \circ \tau \otimes \langle f_i \circ g_i \rangle_{i \in [n]}), \quad (1)$$

où $\sigma \circ \tau$ est une composition au sens de la catégorie \mathbb{P} et $f_i \circ g_i$ est une composition au sens de la catégorie A . L'élément résultant est bien dans $\mathbb{P}A$ puisque si $f_i : a'_i \rightarrow a''_{\sigma(i)}$ et $g_j : a_j \rightarrow a'_{\tau(j)}$ alors

$$f_i \circ g_i : a_i \rightarrow a'_{\tau(i)} \rightarrow a''_{\sigma(\tau(i))} = a''_{\sigma \circ \tau(i)}.$$

Nous devons finalement vérifier l'associativité de la composition et la neutralité de l'élément identité, propriétés qui découlent directement de la formule (1) et du fait que ces axiomes sont déjà vérifiés dans les catégories A et \mathbb{P} . \square

Afin d'alléger la rédaction, nous noterons un foncteur d'une catégorie \mathcal{C} vers une catégorie \mathcal{D} par $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$. Ainsi la catégorie des préfaisceaux $\mathbf{Ens}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$, avec \mathcal{C} une petite

catégorie, pourra s'écrire $[C^{\text{op}}, \mathbf{Ens}]$, mais pour plus de commodité, on conviendra toutefois de la notation $\hat{C} = [C^{\text{op}}, \mathbf{Ens}]$.

Définition 2.2. Une (A, B) -espèce de structure entre petites catégories A et B est un foncteur $\mathbb{P}A \rightarrow \hat{B}$

Par cette dernière définition nous voulons généraliser la notion d'espèces de structures, cependant il faut se rappeler que l'étude des espèces de structures est l'étude des coefficients d'un certain foncteur analytique. Ainsi dans la sous-section qui suit nous allons donner une généralisation des foncteurs analytiques afin que ces derniers aient, d'une certaine manière, pour coefficients les espèces de structures généralisées.

2.2 Foncteurs analytiques généralisés

Avant d'entamer la généralisation des foncteurs analytiques, nous devons revenir sur leur construction. La proposition qui va suivre, concernant les foncteurs analytiques classiques, va nous permettre, via la notion d'extension de Kan à gauche, de généraliser ces derniers sans crainte de contredire² la généralisation des espèces de structures faite ci-dessus.

Proposition 2.3. On considère le foncteur inclusion $K : \mathbb{P} \hookrightarrow \mathbf{Ens}$. Un foncteur $F : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ens}$ est analytique si, et seulement si, il est l'extension de Kan à gauche d'une espèce de structures $F[\cdot] : \mathbb{P} \rightarrow \mathbf{Ens}$ le long de K :

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{Ens} & \\
 & \uparrow & \swarrow \text{---} F \\
 F[\cdot] & & \\
 \uparrow & & \\
 \mathbb{P} & \xrightarrow{K} & \mathbf{Ens}
 \end{array}$$

Preuve : D'après l'écriture des extensions de Kan à gauche en terme de cofins, on a pour tout $A \in \mathbf{Ens}$

$$(\text{Lan}_K F[\cdot])A = \int^{[n] \in \mathbb{P}} \mathbf{Ens}(K([n]), A) \cdot F[n] = \int^{[n] \in \mathbb{P}} \mathbf{Ens}([n], A) \cdot F[n].$$

et puisque dans \mathbf{Ens} les copuissances existent et sont les produits cartésiens, il vient que pour tout $A \in \mathbf{Ens}$

$$(\text{Lan}_K F[\cdot])A = \int^{[n] \in \mathbb{P}} \mathbf{Ens}([n], A) \times F[n] = \int^{[n] \in \mathbb{P}} A^n \times F[n].$$

²On doit retrouver les définitions classiques introduites au tout début en évoluant à la catégorie terminal $\mathbf{1}$.

Or, la dernière cofin exprimée est définie comme la solution du problème universel suivant : $\forall(\sigma : [m] \rightarrow [n]) \in \mathbb{P}$,

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A^n \times F[n] & & \\
 & \nearrow^{A^n \times F[\sigma]} & & \searrow & \\
 A^n \times F[m] & & & & \int^d A^d \times F[d] \dashrightarrow X \\
 & \searrow_{A^\sigma \times F[m]} & & \nearrow & \\
 & & A^m \times F[m] & &
 \end{array}$$

Par conséquent, les morphismes dans \mathbb{P} étant des bijections, l'ensemble X du diagramme précédent ne s'appuie que sur des wedges de la forme :

$$\begin{array}{ccc}
 & A^n \times F[n] & \\
 & \nearrow^{A^n \times F[\sigma]} & \searrow \\
 A^n \times F[m] & & X \\
 & \searrow_{A^\sigma \times F[m]} & \nearrow \\
 & A^m \times F[m] &
 \end{array}$$

\uparrow
 $A^{\sigma^{-1}} \times F[\sigma]$

Ceci signifie en d'autres termes que tous les éléments d'une orbite de $A^n \times F[n]$, sous l'action de \mathfrak{S}_n définie par $\sigma.(f, t) = (f \circ \sigma^{-1}, F[\sigma](t))$, sont envoyés sur le même élément dans X . On peut donc factoriser le cône par quotientage :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A^n \times F[n] & & \\
 & \nearrow^{A^n \times F[\sigma]} & \uparrow & \searrow & \\
 A^n \times F[m] & & & & A^n \times F[n] / \mathfrak{S}_n \dashrightarrow X \\
 & \searrow_{A^\sigma \times F[m]} & \uparrow_{A^{\sigma^{-1}} \times F[\sigma]} & \nearrow & \\
 & & A^m \times F[m] & &
 \end{array}$$

En faisant la somme disjointe de chacun des wedges, on conserve la propriété universelle de la factorisation sur chacune des composantes et donc sur la somme elle-même, ce qui nous amène au diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 A^n \times F[n] & & \\
 & \searrow & \\
 & \sum_d (A^d \times F[d]) / \mathfrak{S}_d \dashrightarrow X & \\
 & \nearrow & \\
 A^m \times F[m] & &
 \end{array}$$

La somme du diagramme précédent est alors solution du même problème universel que la cofin dont nous avons exprimé le diagramme au début. On déduit par unicité de la solution que

$$\int^d A^d \times F[d] = \sum_d (A^d \times F[d]) / \mathfrak{S}_d$$

□

Ainsi pour définir une version généralisée des foncteurs analytiques, il nous suffit de remplacer dans la proposition précédente l'espèce de structures classique $F[\cdot] : \mathbb{P} \rightarrow \mathbf{Ens}$ par une (A, B) -espèce de structures $F[\cdot] : \mathbb{P}A \rightarrow \hat{B}$ et de généraliser l'inclusion $K : \mathbb{P} \hookrightarrow \mathbf{Ens}$ à un foncteur $K_{A,C} : \mathbb{P}A \rightarrow \hat{C}$. Le seul point à respecter est qu'il faut retrouver la forme de l'inclusion $\mathbb{P} \hookrightarrow \mathbf{Ens}$ lorsque l'on évalue $K_{A,C}$ à $A = \mathbf{1} = C$.

Si cela était fait, nous disposerions de la définition d'un foncteur analytique généralisé $F : \hat{C} \rightarrow \hat{B}$ vérifiant le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & \hat{B} & \\ & \uparrow & \nearrow F \\ F[\cdot] & & \\ \mathbb{P}A & \xrightarrow{K_{A,C}} & \hat{C} \end{array}$$

Néanmoins, les choses se révèlent plus simples lorsque nous prenons le cas particulier $C = A$. En effet, la forme de l'application $K_{A,C}$ recherchée devient après coup $\mathbb{P}A \rightarrow \hat{A}$, ce qui n'est pas loin de nous rappeler la forme de la *projection de Yoneda* $y_A : A \hookrightarrow \hat{A}$.

Proposition 2.4. *Le foncteur K_A définit à partir de la projection de Yoneda y_A tel que*

$$K_A : \begin{cases} \mathbb{P}A \rightarrow \hat{A} \\ \langle a_i \rangle_{i \in [n]} \mapsto \sum_{i \in [n]} y_A(a_i) \\ \sigma \otimes \langle f_i \rangle_{i \in [n]} \mapsto \sum_{i \in [n]} y_A(f_i) \end{cases}$$

se ramène, dans le cas où $A = \mathbf{1}$, à l'inclusion $\mathbb{P} \hookrightarrow \mathbf{Ens}$.

Preuve : La catégorie A étant prise terminale, l'objet $y_A(a_i)$ est isomorphe à l'objet a_i et *a fortiori* à l'objet $\{a_i\}$. Ainsi par définition de la somme disjointe

$$\sum_{i \in [n]} y_A(a_i) \cong \{0\} \times \{a_0\} \cup \dots \cup \{n-1\} \times \{a_{n-1}\}.$$

Or, le terme de droite est exactement la définition de l'objet $\langle a_i \rangle_{i \in [n]} : [n] \rightarrow \mathbf{Obj}(A)$ en terme de relation ensembliste³ dans $\mathbb{N}^* \times \mathbf{Obj}(A)$. Par conséquent nous obtenons la relation

$$\sum_{i \in [n]} y_A(a_i) \cong \langle a_i \rangle_{i \in [n]}.$$

³On rappelle que la catégorie A est considérée petite.

Le même raisonnement étant valable pour les morphismes, cela nous donne bien, à isomorphisme près, l'inclusion $\mathbb{P} \hookrightarrow \mathbf{Ens}$. \square

La proposition précédente nous indique que le foncteur K_A est un bon candidat pour la généralisation des foncteurs analytiques. L'utilisation de la somme disjointe va nous permettre d'utiliser K_A en tant qu'exposant un peu plus loin, ce qui nous permettra d'exprimer un foncteur analytique généralisé sous la forme d'une cofin semblable à celle trouvée à la proposition 2.3.

Définition 2.5. *Un foncteur $F : \hat{A} \rightarrow \hat{B}$ est dit analytique s'il est l'extension de Kan à gauche d'une (A, B) -espèce de structure $F[\cdot] : \mathbb{P}A \rightarrow \hat{B}$ le long de K_A :*

$$\begin{array}{ccc}
 & \hat{B} & \\
 & \uparrow & \nearrow F \\
 F[\cdot] & & \\
 & \downarrow & \searrow \\
 \mathbb{P}A & \xrightarrow{K} & \hat{A}
 \end{array}$$

D'après l'expression d'une extension de Kan à gauche en termes de cofin, nous disposons de la formulation

$$FX(-) = \int^{<a_i>_{i \in [n]} \in \mathbb{P}A} \hat{A}[K_A(<a_i>_{i \in [n]}), X] \times F[<a_i>_{i \in [n]}](-).$$

Or, il est rapide de vérifier⁴ que

$$\prod_{i \in [n]} \hat{A}[y_A(a_i), X] \cong \hat{A}[K_A(<a_i>_{i \in [n]}), X]$$

et le *lemme de Yoneda* [3] nous indique que pour tout $a_i \in A$,

$$X(a_i) \cong \hat{A}[y_A(a_i), X].$$

Ces deux isomorphismes combinés nous amènent à la relation

$$FX(-) \cong \int^{<a_i>_{i \in [n]} \in \mathbb{P}A} \prod_{i \in [n]} X(a_i) \times F[<a_i>_{i \in [n]}](-).$$

Ce qui, en posant $X^{<a_i>_{i \in [n]}} = \prod_{i \in [n]} X(a_i)$, nous redonne l'expression que nous avons trouvé à la proposition 2.3 pour les foncteurs analytiques classiques :

$$FX(-) \cong \int^{u \in \mathbb{P}A} X^u \times F[u](-).$$

⁴Plus généralement, on a l'isomorphisme $\prod_i \text{Hom}(A_i, E) \cong \text{Hom}(\sum_i A_i, E)$.

3 La bicatégorie des espèces de structures généralisées

3.1 Rappels sur les bicatégories

Dans cette sous-section nous rappelons ce que nous entendons par « bicatégorie » sans toutefois aller jusqu'à énoncer les axiomes de cohérence qui lui sont associés et pour lesquels nous référons à l'article [1] de Jean Bénabou. Ces axiomes traduisent avant tout que les choses se passent « comme il faut » au niveau de l'associativité et de l'identité de nos isomorphismes.

Définition 3.1. Une bicatégorie \mathcal{C} est la donnée :

- d'une classe d'objet $\text{Obj}(\mathcal{C})$ appelée **0-cellules** ;
- d'une famille $(\mathcal{C}[A, B])_{(A, B) \in \text{Obj}(\mathcal{C})^2}$ de catégories, dont les objets et les morphismes sont appelés respectivement **1-cellules** et **2-cellules** ;
- d'une opération de composition, donnée par une famille de foncteurs

$$(\mathcal{C}[B, C] \times \mathcal{C}[A, B] \rightarrow \mathcal{C}[A, C])_{(A, B, C) \in \text{Obj}(\mathcal{C})^3}$$

dont l'action sur une paire de **1-cellules** $(F, G) \in \mathcal{C}[B, C] \times \mathcal{C}[A, B]$ est noté $G \circ F$;

- d'éléments identités $1_A \in \mathcal{C}[A, A]$;
- de trois collections d'isomorphismes naturels α, λ et ρ exprimant les lois d'associativité

$$\alpha_{H, G, F} : (H \circ G) \circ F \rightarrow H \circ (G \circ F)$$

et d'identité

$$\lambda_F : 1_B \circ F \rightarrow F \quad \text{et} \quad \rho_F : F \rightarrow F \circ 1_A$$

et vérifiant un ensemble de trois axiomes de cohérence qui peuvent être trouvés dans l'introduction de l'article de Jean Bénabou [1] ;

Modulo la vérification des axiomes de cohérence, le point principal sur lequel nous allons nous attarder pour montrer que **Esp** est une bicatégorie est que l'on peut définir une opération de composition et des identités vérifiant les axiomes d'isomorphismes.

3.2 La bicatégorie **Esp**

Le but de cette section est de prouver la proposition qui suit :

Proposition 3.2. On peut définir une bicatégorie **Esp** pour laquelle

- les **0-cellules** dans $\text{Obj}(\mathbf{Esp})$ sont les petites catégories ;
- les **1-cellules** et **2-cellules** sont représentés respectivement par les (A, B) -espèces de structures et les transformations naturelles leurs étant associées ;

On remarque que l'énoncé est cohérent avec la définition donnée à la précédente sous-section : les objets de **Esp** sont les petites catégories et les (A, B) -espèces de structures sont indicés par un couple de petites catégories.

Le travail qui suit consiste à exhiber des morphismes d'identité pour tout objet ainsi qu'une opération de composition vérifiant les isomorphismes d'associativité et d'identité. La définition suivante donne une structure de monoïde (symétrique) strict à $\mathbb{P}A$.

Définition 3.3. On définit le produit tensoriel \oplus sur $\mathbb{P}A$ par la concaténation usuelle sur les séquences. Autrement dit on a la relation

$$\langle a_i \rangle_{i \in [m]} \oplus \langle a'_j \rangle_{j \in [n]} = \langle [a, a']_k \rangle_{k \in [m+n]}$$

où l'on considère l'opérateur

$$[a, a']_k = \begin{cases} a_k & , \text{ pour } 1 \leq k \leq m \\ a'_{k-m} & , \text{ pour } m+1 \leq k \leq m+n \end{cases}$$

Cette opération de concaténation nous permet de sommer les éléments de $\mathbb{P}A$ entre eux, ce dont on a besoin pour définir l'opération de composition, qui utilise des cofins multiples⁵.

Définition 3.4. Pour une (A, B) -espèce de structures F et une (B, C) -espèce de structures G , on définit le foncteur $G \circ F$ de $\mathbb{P}A \rightarrow \hat{C}$ par l'équation :

$$(G \circ F)[u](-) = \int^{v \in \mathbb{P}A} G[v](-) \times F^{*v}(u)$$

où

$$F^{*(b_i)_{i \in [n]}}(u) = \int^{u_1, \dots, u_n \in \mathbb{P}A} \prod_{i \in [n]} F[u_i](b_i) \times \mathbb{P}A[\oplus_{i \in [n]} u_i, u].$$

Le foncteur $G \circ F$ est alors une (A, C) -espèce de structures.

Le fait que $G \circ F$ soit bien un foncteur, dans le sens où il vérifie l'axiome de composition, découle des propriétés des cofins. Les éléments identités sont pour leur part trivialement représentés par les objets

$$I_A : \begin{cases} \mathbb{P}A \rightarrow \hat{A} \\ u \mapsto \mathbb{P}A[-, u]. \end{cases}$$

Proposition 3.5. Pour l'opération de composition définie ci-dessus, il existe des isomorphismes

$$I_B \circ F \cong F, \quad F \cong F \circ I_A, \quad (H \circ G) \circ F \cong H \circ (G \circ F).$$

Preuve : Ces trois isomorphismes demandent d'assez longs calculs de cofins. C'est la raison pour laquelle nous ne ferons que survoler la démonstration et que nous ne le ferons seulement que pour les deux premiers isomorphismes.

1 Pour le premier isomorphisme, on peut montrer que :

$$(I_B \circ F)[u](-) = \int^{v \in \mathbb{P}A} \mathbb{P}B[-, v] \times F^{*v}(u) \cong F^{*-}(u)$$

⁵D'après le théorème de Fubini, les cofins commutent avec les comilites et *a fortiori* avec les cofins elles-mêmes.

où il vient que

$$F^{*-}(u) = \int^{u_1, \dots, u_n \in \mathbb{P}A} \prod_{i \in [n]} F[u_i](-) \times \mathbb{P}A[\oplus_{i \in [n]} u_i, u] \cong F[u](-).$$

2 Pour le second isomorphisme, on peut montrer que :

$$I_A^{*\langle b_i \rangle_{i \in [n]}}(u) = \int^{u_1, \dots, u_n \in \mathbb{P}A} \prod_{i \in [n]} \mathbb{P}A[b_i, u_i] \times \mathbb{P}A[\oplus_{i \in [n]} u_i, u] \cong \mathbb{P}A[\langle b_i \rangle_{i \in [n]}, u]$$

et donc

$$(G \circ I_A)[u](-) = \int^{v \in \mathbb{P}A} G[v](-) \times \mathbb{P}A[v, u] \cong G[u](-).$$

□

Ayant désormais défini la bicatégorie **Esp**, nous allons montrer que celle-ci est cartésienne fermée au sens des bicatégories.

4 La bicatégorie Esp cartésienne fermée

4.1 Rappels sur la structure cartésienne fermée pour les bicatégories

Tout comme le concept de catégorie catésienne fermée, le concept de bicatégorie cartésienne fermée peut s'écrire à l'aide d'une certaine idée d'adjonction entre bicatégories que l'on appelle *biadjonction*. Pour définir une biadjonction, nous avons besoin de deux notions supplémentaires données par les définitions ci-dessous :

Définition 4.1. *Un pseudo-foncteur $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre deux bicatégories \mathcal{C} et \mathcal{D} est la donnée :*

- d'une fonction $\Phi : \text{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{D})$;
- d'une collection de foncteurs doublement indicés $\Phi_{A,B} : \mathcal{C}[A, B] \rightarrow \mathcal{D}[A, B]$ pour tout couple d'objets $(A, B) \in \text{Obj}(\mathcal{C})^2$;
- d'isomorphismes naturels

$$\varphi_{G,F} : \Phi(G \circ F) \rightarrow \Phi(G) \circ \Phi(F), \quad \varphi_A : \Phi(1_A) \rightarrow 1_{\Phi A}$$

vérifiant des axiomes de cohérences que le lecteur pourra consulter dans [1].

Définition 4.2. *Une pseudo-transformation naturelle $p : \Phi \rightarrow \Psi$ entre deux pseudo-foncteurs $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et $\Psi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est la donnée :*

- d'une famille de morphismes $p_A : \Phi A \rightarrow \Psi A$ pour tout objet $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$;
- d'une famille de paires de **2-cellules** $(\Phi F, \psi F)$ pour tout $F : A \rightarrow B$ vérifiant

$$\begin{array}{ccc} \Phi A & \xrightarrow{\Phi F} & \Phi B \\ p_A \downarrow & \Downarrow p_F & \downarrow p_B \\ \Psi A & \xrightarrow{\Psi F} & \Psi B \end{array}$$

ainsi que des axiomes de coherences que l'on pourra consulter dans [1].

Une biadjonction en terme de *biadjoint à droite* se définit comme suit :

Définition 4.3. Un biadjoint à droite d'un pseudo-foncteur $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} est la donnée :

- de **0-cellules** $\Psi X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ pour tout $X \in \text{Obj}(\mathcal{D})$;
- de **1-cellules** $q_X : \Phi \Psi X \rightarrow X$ pour tout $X \in \text{Obj}(\mathcal{D})$;
- d'une famille d'équivalences de catégories [3], telle que pour tout couple $(A, X) \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \times \text{Obj}(\mathcal{D})$, on ait

$$\mathcal{C}[A, \Psi X] \begin{array}{c} \xrightarrow{q_X \circ \Phi(\cdot)} \\ \xleftarrow{(\cdot)^\flat} \end{array} \mathcal{D}[\Phi A, X]$$

vérifiant des axiomes de cohérences que le lecteur pourra consulter dans [1].

Une bicatégorie \mathcal{E} est alors cartésienne si le pseudo-foncteur diagonale $\Delta_n : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^n$ a un biadjoint à droite pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dit, en outre, qu'une bicatégorie \mathcal{E} associée à un produit binaire $(\cdot) \sqcap (\cdot) : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est fermé si, pour tout $B \in \mathcal{E}$, le pseudo-foncteur $(\cdot) \sqcap B : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ a un biadjoint à droite.

4.2 Structure cartésienne

Pour établir que **Esp** est cartésienne et donc exposer une équivalence de catégorie, il nous faut procéder par un lemme élémentaire donnant un isomorphisme de catégories entre le produit de préfaisceaux et le préfaisceau de la somme de catégories associées. La définition qui suit donne les composantes de cet isomorphisme :

Définition 4.4. On définit le morphisme de catégories $[\cdot]$ par

$$[\cdot] : \left\{ \begin{array}{l} \prod_{i \in [n]} \hat{A}_i \rightarrow \widehat{\sum_{i \in [n]} A_i} \\ (X_1, \dots, X_n) \mapsto \left(\begin{array}{l} (\sum_{i \in [n]} A_i)^{op} \rightarrow \mathbf{Ens} \\ x \mapsto X_i(y^{op}) \quad \text{si } x^{op} = (i, y) \in (\{i\} \times A_i) \end{array} \right) \end{array} \right.$$

et le morphisme de catégories ι par

$$\iota : \left\{ \begin{array}{l} \widehat{\sum_{i \in [n]} A_i} \rightarrow \prod_{i \in [n]} \hat{A}_i \\ F \mapsto (F|_{\{0\} \times A_0}^{op}, \dots, F|_{\{n-1\} \times A_{n-1}}^{op}) \end{array} \right.$$

Ces deux morphismes se révèlent finalement être inverses et définissent par conséquent un isomorphisme entre les catégories $\prod_{i \in [n]} \hat{A}_i$ et $\widehat{\sum_{i \in [n]} A_i}$:

Lemme 4.5. Les foncteurs

$$\prod_{i \in [n]} \hat{A}_i \begin{array}{c} \xrightarrow{[\cdot]} \\ \xleftarrow{\iota} \end{array} \widehat{\sum_{i \in [n]} A_i}$$

forme un isomorphisme de catégories.

Preuve : Si l'on note ι_i la i ème inclusion $A_i \hookrightarrow \sum_{i \in [n]} A_i$ associées à la définition du co-produit, par définition de $[\cdot]$ et ι , nous avons les relations :

$$[X_1, \dots, X_n] \circ \iota_i^{\text{op}} = X_i \quad \text{et} \quad \iota(F) = (F \circ \iota_1^{\text{op}}, \dots, F \circ \iota_n^{\text{op}})$$

ce qui entraîne immédiatement que $\iota([X_1, \dots, X_n]) = (X_1, \dots, X_n)$ et $[\iota(F)] = F$ \square

On déduit de ce lemme la suite d'isomorphisme suivante :

$$\begin{aligned} \prod_{i \in [n]} \mathbf{Esp}[B, A_i] &= \prod_{i \in [n]} [\mathbb{P}B, \hat{A}_i] \cong [\mathbb{P}B, \prod_{i \in [n]} \hat{A}_i] \\ &\cong [\mathbb{P}B, \widehat{\sum_{i \in [n]} A_i}] \\ &= \mathbf{Esp}[B, \sum_{i \in [n]} A_i] \end{aligned}$$

ce qui nous indique en quelque sorte la manière de procéder quant à la construction de la biadjonction et ainsi montrer que la bicatégorie des espèces de structures généralisées a les produits finis.

Théorème 4.6. *La bicatégorie \mathbf{Esp} est cartésienne.*

Preuve : Tout d'abord, le calcul des isomorphismes fait précédemment nous montrent qu'il serait judicieux de prendre pour biadjoint à droite du pseudo-foncteur diagonale l'opérateur défini, pour toutes petites catégories A_i ($i \in [n]$), par

$$\prod_{i \in [n]} A_i = \sum_{i \in [n]} A_i.$$

Ensuite, on définit la pair $\langle G_1, \dots, G_n \rangle : \mathbb{P}B \rightarrow \prod_{i \in [n]} \hat{A}_i$, pour toutes énumérations d'espèces de structures $(G_i : \mathbb{P}B \rightarrow \hat{A}_i)_{i \in [n]}$, par

$$\langle G_1, \dots, G_n \rangle : \begin{cases} \mathbb{P}B \rightarrow \prod_{i \in [n]} \hat{A}_i \\ u \mapsto \left(\begin{array}{l} (\prod_{i \in [n]} A_i)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens} \\ x \mapsto G_i(u)(a^{\text{op}}) \quad \text{si } x^{\text{op}} = \iota_i(a) \text{ avec } a \in A_i \end{array} \right) \end{cases}$$

ainsi que pour tout $i \in [n]$, les projections

$$\pi_i : \begin{cases} \mathbb{P}(\prod_{i \in [n]} A_i) \rightarrow \hat{A}_i \\ u \mapsto \left(\begin{array}{l} A_i^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens} \\ a \mapsto \mathbb{P}(\sum_{i \in [n]} A_i)[\langle (\iota_i(a))_{i \in [n]}, u \rangle] \end{array} \right) \end{cases}.$$

On peut, à partir des ces données, montrer une équivalence de catégorie de la forme :

$$\mathbf{Esp}[B, \prod_{i \in [n]} A_i] \begin{array}{c} \xrightarrow{(\pi_1 \circ (\cdot), \dots, \pi_n \circ (\cdot))} \\ \perp \\ \xleftarrow{(\cdot)} \end{array} \prod_{i \in [n]} \mathbf{Esp}[B, A_i]$$

Pour vérifier ceci, on a besoin d'exhiber un isomorphisme naturel pour l'unité et la counité de l'adjonction. La composante de l'unité pour $F : \mathbb{P}B \rightarrow \prod_{i \in [n]} A_i$ est donné par un isomorphisme naturel

$$\eta_F : F \xrightarrow{\cong} (\pi_1 \circ F, \dots, \pi_n \circ F)$$

qui exprime la η -expansion pour des produits. La composante de la counité pour une énumération d'espèces de structures $(G_i : \mathbb{P}B \rightarrow \hat{A}_i)_{i \in [n]}$, consiste en les isomorphismes naturels

$$\epsilon_{G_i} : \pi_i \circ (G_1, \dots, G_n) \xrightarrow{\cong} G_i$$

qui exprime la β -reduction pour les produits. Les définitions explicites de ces isomorphismes peuvent s'obtenir par des manipulations de cofins que nous omettons. \square

4.3 Structure fermée

Tout au long de cet article, nous avons souvent confondu les éléments des ensembles de la forme $\mathbb{P}A$ à des mots dans l'alphabet $\text{Obj}(A)$. C'est cette idée que nous allons exploiter ici, en utilisant la concaténation \oplus , pour montrer que **Esp** admet les puissances pour tous ses éléments. Ainsi, en utilisant le fait que la concaténation de deux mots peut aussi être interprété comme un mot de mots, il n'est pas difficile de voir que nous disposons du diagramme

$$\begin{array}{ccc} A + B & \xrightarrow{P_{A+B}} & \mathbb{P}(A + B) \\ & \searrow S & \downarrow S^\# \\ & & \mathbb{P}A \times \mathbb{P}B \end{array}$$

où l'on a défini

$$S : \begin{cases} A + B \rightarrow \mathbb{P}A \times \mathbb{P}B \\ x \mapsto (\langle y \rangle, \langle \rangle) & \text{si } x = \iota_1(y) \\ x \mapsto (\langle \rangle, \langle y \rangle) & \text{si } x = \iota_2(y) \end{cases} \quad P_A : \begin{cases} A \rightarrow \mathbb{P}A \\ a \mapsto \langle a \rangle \\ f \mapsto Id_{[1]} \times f \end{cases}$$

ainsi que du foncteur

$$\mathbb{P}A \times \mathbb{P}B \xrightarrow{P(\iota_1) \times P(\iota_2)} \mathbb{P}(A + B) \times \mathbb{P}(A + B) \xrightarrow{\oplus} \mathbb{P}(A + B).$$

De ces diagrammes résulte finalement l'isomorphisme suivant :

Lemme 4.7. *Les foncteurs*

$$\mathbb{P}(A + B) \begin{array}{c} \xrightarrow{S^\#} \\ \xleftarrow{\oplus(P(\iota_1) \times P(\iota_2))} \end{array} \mathbb{P}A \times \mathbb{P}B$$

forme une équivalence de catégories.

Ce lemme, tout comme nous procédons dans la dernière sous-section, nous amène à une suite d'isomorphismes qui nous indique de manière explicite comment procéder pour la construction du biadjoint à droite des produits.

$$\begin{aligned} \mathbf{Esp}[A \sqcap B, C] &= [\mathbb{P}(A + B), \hat{C}] \cong [\mathbb{P}A \times \mathbb{P}B, \hat{C}] \\ &\cong [\mathbb{P}A, \mathbb{P}(\widehat{B^{\text{op}}}) \times C] \quad (\mathbf{Cat} \text{ est fermé pour } \times) \\ &= \mathbf{Esp}[A, \mathbb{P}(B^{\text{op}}) \times C] \end{aligned}$$

Ainsi, en reprenant en détail la série d'isomorphismes exposée ci-dessus, on peut montrer le théorème [4] :

Théorème 4.8. *La bicatégorie cartésienne \mathbf{Esp} est fermée.*

Références

- [1] J. Bénabou, *Introduction to bicategories*, dans *Reports of the Midwest Category Seminar*, volume 47 de *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, pages 1-77, 1967.
- [2] F. Bergeron et P. Leroux Gilbert Labelle, *Combinatorial species and tree-like structures*, volume 67 de *Encyclopedia of mathematics and its Applications*, Cambridge University Press, 1997.
- [3] P.-L. Curien, *Category theory, a programming-language introduction*, cours de l'École Normale Supérieure, pages 3-29 et 87-94, 2008
- [4] M. Fiore, N. Gambino, M. Hyland, et G. Winskel, *The cartesian closed bicategory of generalised species of structures*, dans *J. London Math. Soc.*, pages 1-9 et 13-16, 2008.
- [5] A. Joyal, *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Volume 42 de *Advances in Mathematics*, pages 1-82, 1981.
- [6] A. Joyal, *Foncteurs analytiques et espèces de structures*, dans *Combinatoire Enumérative*, volume 1234 de *Lectures Notes in Mathematics*, pages 126-159, Springer Verlag, 1986.
- [7] C. Tasson, *Foncteurs analytiques et logique linéaire*, rapport de stage de M2, sous la direction de Pierre-Louis Curien et Thomas Ehrhard, MPRI, 2006.