Sur certaines déformations non commutatives (d'après V. Paskunas)

Stefano Morra

Abstract

On se propose de donner un résumé des chapitres 2 et 3 (précisement jusqu'au §3.1) de l'article de Paskunas [6] dans le cadre du Groupe de Travail. Il s'agit d'une version alpha, donc **fortement instable et risquant d'avoir beaucoup d'imprécisions**, qui sont toutes dûes à l'extenseur de ces notes (i.e. moi). Je tiens à remercier Tony Ly qui a lu des premières versions de ces notes. Ses remarques et ses expliquations concernant mes doutes sur les arguments utilisés dans [6] ont été incontournables et m'ont permis d'en comprendre quelque chose.

1. Préliminaires: Notations et quelques rapples d'algèbre (non commutative)

Soit p un nombre premier, et G un groupe analytique p-adique. On ne s'intéresse pas à la définition précise d'un groupe analytique p-adique; par contre on dispose d'une caractérisation assez efficace, qui est resumée dans le résultat suivant:

Theorem 1.1. *Soit G un groupe topologique.*

Alors G est un groupe analytique p-adique ssi G possède un sous-groupe ouvert H qui soit un pro-p-groupe de rang fini. De même, G est un groupe analytique p-adique compact ssi G est un groupe profini ayant un sous-groupe ouvert H qui soit un pro-p-groupe de rang fini.

Proof. Omissis. Voir [2], corollary 8.33, 8.34. □

Dans la suite on sera concerné de manière cruciale par la théorie des anneaux et modules pseudo-compacts: il s'agit d'une notion qui géneralise celle là des anneaux et modules profinis. De manière précise:

Definition 1.2. *Un anneau pseudo-compact à gauche est la donnée d'un anneau A, muni d'une structure d'anneau topologique séparé et complet et tel qu'il possède un filtre de voisinages de zéro constitué par des idéaux à gauche de A-co-longueur finie.*

On remarque que dans la définition on a tacitement supposé que l'anneau est unitaire et que l'ensemble sous-jacent de A appartient à un univers de Grothendieck $\mathfrak{U}$ fixé au début. Dans la suite, on supporra toujours que les anneaux sont unitaires et on ne discutera plus de problèmes fondationels concernant l'univers d'appartenances des objets étudiés (cf. [4], §IV,n.3).

Si A est un anneau pseudo-compact à gauche, la notion de module pseudo-compact à gauche est similaire et laissée au lecteur (il s'agit de remplacer "anneau" et "idéal" dans la definition 1.2 avec "module" et "sous-module").

Les morphismes entre anneaux/modules pseudocompacts ne sont rien d'autre que les morphismes continues entre anneaux/modules.

2000 Mathematics Subject Classification ????

Dorénavant, lorsque l'on travaille avec des modules pseudo-compacts M, ne se préoccupera plus de spécifier le côté de l'action de l'anneau A, cela étant supposé fixé ou clair. La remarque suivante est élémentaire:

Remark 1.3. *Tout anneau profini A est en particulier un anneau pseudo-compact.*

Tout A-module profini M est en particuler un A-module pseudo-compact.

La catégorie des modules pseudo-compacts sur un anneau pseudo-compact A sera notée par $A\text{-}Mod^{pc}$.

Soit M un A-module topologique, muni d'un filtre de voisinages ouverts de zéro constitué par des A-sous-modules de co-longueur finie. L'on pourra définir de la manière évidente la *complétion pseudo-compacte* de M, qui sera notée $\widehat{M}$, munie d'une morphisme continu à image dense: il s'agit donc d'un représentant du foncteur

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}^{\mathscr{C}^0}(M,\bullet):A\text{-}Mod^{pc}&\to \mathrm{Sets}\\ T&\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}^{\mathscr{C}^0}(M,T).\end{aligned}$$

Le résultat suivant est élémentaire

Lemma 1.4. *Supposons que A soit compact pour sa topologie naturelle. Soit S un ensemble et considérons la somme directe (dans la catégorie des A-modules topologiques) $A^{(S)}$.*

Alors, l'on pourra considerer la complétion pseudo-compacte de $A^{(S)}$ et l'on a

$$\widehat{A^{(S)}}\cong A^S$$

(i.e. la complétion pseudo-compacte de $A^{(S)}$ est le produit direct de A dans $A\text{-}Mod^{pc}$)

Proof. C'est clair qu'un sous A-module N de $A^{(S)}$ de co-longueur finie est de la forme $\prod_{j\in F} I_j\times A^{(S\setminus F)}$ où $F\subset S$ est fini et I_j sont des idéaux (à gauche) de A de A co-longueur finie. Pourtant, on a des épimorphismes naturels *continus* $A^S\twoheadrightarrow A^{(S)}/N$, de telle sorte que l'on a un morphisme naturel continu à image dense

$$A^S\to\widehat{A^{(S)}}.$$

Comme A est séparé, l'on vérifie aisement que le morphisme est injectif. Par la proprieté universelle de la complétion pseudo-compacte, l'on a un morphisme naturel $\widehat{A^{(S)}}\to A^S$; on voit que la composée

$$\widehat{A^{(S)}}\to A^S\to\widehat{A^{(S)}}$$

n'est rien d'autre que le morphisme identique, car se restreint sur $A^{(S)}$ au morphisme naturel $A^{(S)}\widehat{A^{(S)}}$. Cela entraîne aussi que l'isomorphisme est topologique. □

En particulier on a

Corollary 1.5. *Soit M un A-module pseudo-compact et J un ensemble. Alors l'on a un isomorphisme A-linéaire*

$$\mathrm{Hom}(A^J,M)\cong M^J$$

(les Hom*-ensembles étant pris dans la catégorie $A\text{-}Mod^{pc}$).*

On a

Theorem 1.6. *Soit A un anneau pseudo-compact. La catégorie $A\text{-}Mod^{pc}$ est abélienne, munie de genérateurs et de limites projectives exactes.*

Proof. Omissis. Voir [4], §IV, n.3, théorème 3. □

Les anneaux et modules pseudo-compacts géneralisent la notion d'anneaux et modules profinis au sens suivant:

Proposition 1.7. *Soit A un aneau pseudo-compact et M un A-module pseudocompact. Soit $\{M_j\}_{j\in J}$ un filtre de voisinages ouverts de zéro constitué par des sous-A-modules de co-longueur finie.*

Le morphisme canonique $M \to \varprojlim_{j\in J} \frac{M}{M_i}$ est un isomorphisme (où chaque $\frac{M}{M_i}$ est muni de la topologie quotient induite par le morphisme canonique $M \twoheadrightarrow \frac{M}{M_i}$, i.e. de la topologie discrète)

Proof. Omissis. Voir [4], §IV, n.3, proposition 10. □

Soit maintenant $\mathscr{O}$ un anneau pseudo-compact commutatif, A une $\mathscr{O}$-algèbre pseudo-compacte (i.e. la donnée d'un anneau pseudo-compact A et d'un morphisme "structural" $\mathscr{O} \to A$ d'anneau pseudo-compact, dont l'image est contenue dans le centre de A). *On supposera de plus l'une des hypothèses suivantes:*

i) A est naturellement un $\mathscr{O}$-module fini;

ii) $A/\mathrm{Rad}(A)$ admet une structure naturelle de $\mathscr{O}/(\varpi)$-espace vectoriel de dimension finie.

Soient M, N deux A-modules pseudo-compacts, à droite et à gauche respectivement.

On définit le produit tensoriel complété $M\hat{\otimes}_A N$ comme un représentant du foncteur

$$\begin{aligned} \mathrm{Bil}(M\times N,\bullet) : \mathscr{O}-Mod^{pc} &\to \mathscr{O}-Mod \\ T &\mapsto A-\mathrm{Bil}(M\times N,T) \end{aligned}$$

où $\mathrm{Bil}(M\times N,T)$ désigne l'$\mathscr{O}$-module des applications A-balancées continues du produit $M\times N$ vers T.

Afin de définir le produit tensoriel complété l'on aurait pu, bien évidemment, considérer la restriction du foncteur $\mathrm{Bil}(M\times N,\bullet)$ à la catégorie des $\mathscr{O}$-modules abstraits de $\mathscr{O}$-longueur finie (d'après la proposition 1.7).

La construction, ainsi que les propriétés fondamentales, du produit tensoriel complété sont résumées dans le théorème suivant

Theorem 1.8. *Soit A une $\mathscr{O}$-algèbre pseudo-compacte, M, N deux A-modules pseudo-compacts (à droite et à gauche resp.).*

Alors le produit tensoriel complété existe et est donné comme la limite projective

$$M\hat{\otimes}_A N \cong \varprojlim_{i,j} M/M_i \otimes_A N/N_j$$

où M_i, N_j parcourent une famille fixée de voisinages de zéro de sous-modules ouverts de co-longueur finie et chaque quotient M/M_i, N/N_j est muni de la topologie discrète. En d'autres termes, $M\hat{\otimes}_A N$ est l séparé complété du produit tensoriel abstrait $M\otimes_A N$ par rapport à la topologie linéaire définie par les noyaux des applications canoniques $M\otimes_A N \twoheadrightarrow M/M_i\otimes_A N/N_j$.

Le produit tensoriel complété jouit des propriétés suivantes:

i) *Si $M = A$ (resp. $N = A$) alors $M\hat{\otimes}_A N \cong N$ (resp. $M\hat{\otimes}_A N \cong M$). En particulier si M ou N est de présentation finie alors $M\hat{\otimes}_A N \cong M\otimes_A N$.*

ii) *Le produit tensoriel complété est un bi-foncteur exact à droite, qui commute aux limites projectives filtrantes.*

iii) *Si I est un idéal à gauche, fermé de A alors $M\hat{\otimes}_A A/I$ s'idéntifie au quotient $M/\overline{MI}$ (dans la catégorie des $\mathscr{O}$-modules pseudocompacts) où $\overline{MI}$ désigne la fermeture de MI dans M.*

Proof. Omissis. Il s'agit d'adapter les arguments de [7], exposé VII_B, §0.3 (où l'on travaille avec des anneaux pseudo-compacts commutatifs). Notons d'ailleurs que les hypothèses $i)$ ou $ii)$ sur A entraînent que tout A-module irreductible est de longueur finie sur $\mathscr{O}$. Pourtant les modules M, N sont naturellement des modules pseudo-compacts sur l'anneau commutatif pseudo-compact $\mathscr{O}$. □

En particulier, on déduit le lemme de Nakayama

Lemma 1.9. *Soit A un anneau pseudo-compact, I un idéal fermé à gauche, que l'on supposera contenu dans le radical de Jacobson* $\mathrm{Rad}(A)$ *de A. L'égalité $\overline{MI} = M$ entraîne que M est le A-module nul.*

Proof. Omissis. Voir [7], exposé VII_B, §0.3. □

1.0.1 ***Le cas profini.*** Soit $\mathscr{O}$ un anneau profini commutatif, R une $\mathscr{O}$-algèbre profinie et G un groupe profini. Les résultats qui suivent sont bien connus

Proposition 1.10. *Soit M un R-module abstrait à gauche (resp. à droite). Supposons que le groupe abélien sous-jacent à M est profini.*

Les assertions suivantes sont équivalentes

- $i)$ *M est un R-module topologique;*
- $ii)$ *M est un R-module profini;*
- $iii)$ *la topologie sur M est R-linéaire (i.e. la famille des R-sous-modules ouverts de M fournit un filtre de voisinages de 0 dans M).*

Proof. Omissis. Voir [9], proposition 7.2.1. □

Proposition 1.11. *Supposons que M soit un $\mathscr{O}$-module profini, muni d'une action continue et $\mathscr{O}$-linéaire de G.*

Alors M possède une (unique) structure de $\mathscr{O}[[G]]$-module profini de telle sorte que l'action de l'algèbre du groupe complétée $\mathscr{O}[[G]]$ prolonge l'action donnée de $\mathscr{O}[G]$. Dans cette structure, les sous $\mathscr{O}[[G]]$-modules fermés coïncident avec les sous $\mathscr{O}$-modules G-stables de M.

Proof. Omissis. Cf. [9], proposition 7.2.4 □

Finalement, on rappelle un résultat concernant le cas où les objets sont *pro-p*:

Proposition 1.12. *L'algèbre du groupe complétée $\mathscr{O}[[G]]$ est un anneau local ssi il existe un nombre premier p tel que $\mathscr{O}$ soit un pro-p-anneau local et G un pro-p-groupe. Dans ce cas, l'idéal maximal est donnée par la fermature, dans $\mathscr{O}[[G]]$, de l'idéal engendré par les élements $g-1$ (avec $g \in G$) et par $\mathfrak{m}$ (l'idéal maximal de $\mathscr{O}$).*

Proof. Omissis. Voir [9] proposition 7.5.3: la dernière affirmation sur l'idéal maximal se déduit de la preuve *ibid.* □

1.0.2 ***Socle, co-socle, enveloppes injectives, recouvrements projectifs.*** On rappelle dans cette section l'abc des notions de socle, cosocle, enveloppes injectives et projectives. Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne. On désigne par $\mathbf{S}(\mathscr{A})$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{A}$ constituée par les objets semi-simples de $\mathscr{A}$. Étant donne un objet $A \in \mathscr{A}$ une *suite de sous-quotients de A* est la donnée d'une suite d'objets $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathscr{A}$ de telle sorte que

- $i)$ A_n est un sous objet ou un quotient de A_{n-1}, pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$;
- ii $A_0 = A$.

Un *sous-quotient* de A désigne un élement A_n d'une suite de sous-quotients de A au sens précédent.

Si $M \in \mathscr{A}$, on définit le socle de M comme un représentant du foncteur

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\bullet, M) : \mathbf{S}(\mathscr{A}) \to \mathrm{Sets}.$$

Notons que si $N \xrightarrow{f} M$ est un morphisme dans $\mathscr{A}$ et N est semisimple alors $\mathrm{Im}(f)$ est semi-simple: pourtant, le socle de M n'est rien d'autre que le sous-objet semisimple maximal de M (muni de l'inclusion canonique).

On définit de manière duale la notion de co-socle pour un objet $M \in \mathscr{A}$. On rappelle le résultat suivant:

LEMMA 1.13. *Si $\mathscr{A}$ est la catégorie abélienne des modules (à gauche) sur un anneau A alors $\mathrm{cosoc}(M)$ est donné par $M/\mathrm{Rad}(A)M$.*

Proof. Omissis. C'est bien connu (voir par exemple [1]). ☐

Soit $M \in \mathscr{A}$ un objet de $\mathscr{A}$ et $N \leqslant M$ un sous-objet. On dit que N est essentiel (resp. inessentiel) si pour tout sous-objet $T \leqslant M$ la condition

$$\ker(M \to M/N \prod M/T) = 0, \qquad \text{(resp. } \mathrm{coker}(N \coprod T \to M) = 0)$$

entraîne que $T = 0$ (resp. $T = M$).

Un monomorphisme $I \hookrightarrow M$ est dit essentiel si son image définit un sous-objet essentiel de M. Respectivement, un épimorphisme $M \twoheadrightarrow P$ est dit inessentiel si son noyau définit un sous-module inessentiel de M. On a évidemment

LEMMA 1.14. *Soit $M \twoheadrightarrow P$ un épimorphisme inessentiel. Si $T \to M$ est un morphisme dans $\mathscr{A}$ tel que la composée $T \to M \to P$ soit un épimorphisme alors $T \to M$ est un épimorphisme.*

Proof. Triviale. Notons que la réciproque est aussi trivialement vraie. ☐

Finalement, si $M \in \mathscr{A}$ une enveloppe injective de M est la donné d'une couple (I, ι) où $I \in \mathscr{A}$ est un objet injectif et ι est un isomorphisme de M sur un sous-objet essentiel de I. La notion de recouvrement projectif est duale et laissée au lecteur. On a

PROPOSITION 1.15. *Si (ι_1, I_1), (ι_2, I_2) sont deux enveloppes injectives de M alors il existe un ismorphisme $I_1 \cong I_2$ dans $\mathscr{A}$, compatible (au sens évident) aux isomorphismes ι_1, ι_2.*

Proof. Omissis. C'est bien connu (cf. [5], theorem 23.2). ☐

On a, dualement, un résultats analogue concenant les recouvrements projectifs.

Les enveloppes injectives sont additives au sens suivant:

LEMMA 1.16. *Soient M_1, M_2 deux objets de $\mathscr{A}$, et soient (ι_1, I_1) (ι_2, I_2) des enveloppes injectives de M_1, M_2 respectivement. Alors $(\iota_1 \oplus \iota_2, I_1 \oplus I_2)$ est une enveloppe injective de $M_1 \oplus M_2$.*

On a un résultat analogue concernant les recouvrement projectifs.

On dira que $\mathscr{A}$ *admet des enveloppe injectives* (resp. recouvrements projectifs) si tout objet $M \in \mathscr{A}$ admet une enveloppe injective (resp. recouvrement projectif).

1.1 Les catégories en jeu.

Soit L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, $\mathscr{O}$ son anneau des entiers (qui est un pro-p anneau). Fixons une uniformisante $\varpi \in \mathscr{O}$ et soit $k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathscr{O}/(\varpi)$ le corps résiduel (fini).

On définit la catégorie $\mathfrak{A}$ comme la sous catégorie pleine de la catégorie des $\mathscr{O}$-algèbres locales dont les objets $(A, \mathfrak{m}_A)$ tels que

i) A est une $\mathscr{O}$-algèbre finie;
ii) A est artinienne;
iii) le morphisme residuel $k \hookrightarrow A/\mathfrak{m}_A$ est un isomorphisme.

Notons que

Lemma 1.17. *Soit $(A, \mathfrak{m}_A) \in \mathfrak{A}$. Alors $\mathfrak{m}_A$ est nilpotent et la structure additive de A est décrite par un p-groupe abélien fini.*

Proof. L'anneau étant local on a que $\mathrm{Rad}(A) = \mathfrak{m}_A$. D'autre part la condition que A soit artinien implique que $\mathrm{Rad}(A) = \mathrm{Nil}(A)$ (où $\mathrm{Nil}(A)$ est l'idéal nil de A) et que $\mathrm{Nil}(A)$ est nilpotent (voir [5], theorem 5.3 et lemma 5.11). Comme le morphisme structural $\mathscr{O} \to A$ est locale, il est continu si l'on munit A de la topologie discrète. Pourtant, A étant un $\mathscr{O}$-module fini, la définition de la catégorie $\mathscr{A}$ entraîne que l'on a un morphisme $\mathscr{O}$-linéaire continu surjectif $\mathscr{O}^n \to A$, ce qui permet de déduire la dernière affirmation du lemme. $\square$

On définit la catégorie $\widehat{\mathfrak{A}}$ comme la sous-catégorie pleine de la catégorie des $\mathscr{O}$-algèbres locales dont les objets $(R, \mathfrak{m}_R)$ sont tels que le morphisme naturel

$$R \to \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} R/\mathfrak{m}_R^n$$

soit un isomorphisme (de $\mathscr{O}$-algèbres locales) et chaque quotient $R/\mathfrak{m}_R^n$ soit un objet de $\mathfrak{A}$. Notons qu'alors

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathfrak{A}}}(R, S) = \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathfrak{A}}}(R, S/\mathfrak{m}_S^n) = \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(R/\mathfrak{m}_R^n, S/\mathfrak{m}_S^n).$$

Soit maintenant $(A, \mathfrak{m}_A)$ une $\mathscr{O}$-algèbre locale noethérienne complète, de corps résiduel k (par exemple, on pourra prendre $(A, \mathfrak{m}_A) \in \mathfrak{A}$). Notons que $A/\mathfrak{m}_A$ étant fini et A noethérien, un dévissage immédiat entraîne que A est en particulier un aneau profini.

L'on définit la catégorie $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro\,aug}}(A)$ de la manière suivante.

i) Un objet $M \in \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro\,aug}}(A)$ est la donnée d'un A-module (disons à gauche) M, muni d'une action abstraite A-linéaire de G et d'une structure de $A[[H]]$-module profini pour un sous-groupe compact ouvert H de G de telle sorte que les actions induites de $A[H]$ via les deux morphismes naturels $A[H] \to A[[H]]$ et $A[H] \to A[G]$ coïncident.
ii) Un morphisme $M \xrightarrow{\phi} N$ dans $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro\,aug}}(A)$ est la donné d'un morphisme A-linéaire, G-équivariant et continu par rapport à la topologie profinie définie sur M et N.

On remarquera qu'il s'agit d'une bonne définition au sens suivante

Lemma 1.18. *Soient $M \in \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro\,aug}}(A)$, $H \leqslant G$ comme dans i).*
Si $H_1 \leqslant G$ est un sous-groupe compact ouvert de G alors M est muni d'une structure (unique) de $A[[H_1]]$-module profini, qui étend l'action abstraite de $A[H_1]$.

En d'autre termes, on pourrait substituer, dans *i*), l'écriture "pour un sous-groupe compact ouvert" avec "pour chaque sous-groupe compact ouvert".

Proof. Comme $H \cap H_1$ est un sous-groupe compact ouvert soit de H que de H_1 il suffit de voir que si H_2 est un sous-groupe compact ouvert de G contenant H alors l'action de $A[[H]]$ s'étend (de manière unique) à une action de $A[[H_2]]$.

Pour cela on remarquera l'isomorphisme de $A[H]$-algèbres:

$$A[H_2] \cong \prod_{\text{finie}} A[H].$$

En prenant la limite projective par rapport à un filtre de voisinages de sous-groupes co-finis de H (ce qui donne trivialement un filtre de voisinages co-finis de H_2) on obtient un isomorphisme d'anneaux topologiques (profinis)

$$A[[H_2]] \cong \prod_{\text{finie}} A[[H]].$$

On peut maintenant munir M d'une action continue de $\prod_{\text{finie}} A[[H]]$, qui vérifie les axiomes requis. $\square$

Notons aussi que

LEMMA 1.19. *Tout objet de* $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro\,aug}}(A)$ *est en particulier un* $\mathscr{O}$*-module profini, soit, plus précisement, l'on dispose du foncteur oubli*

$$\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro\,aug}}(A) \to Mod^{\mathrm{Profini}}(\mathscr{O}).$$

Proof. En fait, si $M \in \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro\,aug}}(A)$ est un $A[[H]]$-module profini (avec $H \leqslant G$ compact ouvert) alors M est en particulier un $\mathscr{O}$-module topologique, et on utilise 1.10. $\square$

On sera concerné principalement par la catégorie $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ des G-représentations lisses à coefficients dans A. On rappelle qu'une G représentation (abstraite) V à coefficients dans A est dite lisse si l'on dispose de l'égalité

$$V = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \bigcup_{H \overset{\circ}{\leqslant} G} V^H[\mathfrak{m}_A^n]$$

où $V[\mathfrak{m}_A^n]$ désigne le sous-A-module de V dont les éléments $v \in V$ vérifient $\mathrm{Ann}(v) \supseteq \mathfrak{m}_a^m$; notons que $V[\mathfrak{m}_A^n]$ est G-stable et que $V^H[\mathfrak{m}_A^n] = (V[\mathfrak{m}_A^n])^H$.

On désigne par $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l\,fin}}(A)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ dont les objets $V \in \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ sont localement de longueur finie, i.e. tels que pour tout $v \in V$ la sous-G-représentation $\langle A[G] \cdot v\rangle$ de V engendrée par v est de longueur finie.

C'est immédiat de voir que

LEMMA 1.20. *Les sous-catégories abéliennes* $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ *et* $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l\,fin}}(A)$ *de* $\mathrm{Mod}_G(A)$ *sont stables par formation de sous-objets et somme directes (arbitraires). En particuliers, ils sont stables par la formation de limites inductives.*

Proof. Triviale. Rappellons que si une catégorie $\mathscr{C}$ admet co-noyaux et co-produits alors elle admet co-limites (cf. [8] ??!!). $\square$

Les objets de la catégorie $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l\,fin}}(A)$ jouit d'une propriété importante:

LEMMA 1.21. *Soit* $V \in \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l\,fin}}(A)$. *Alors l'on a un isomorphisme naturel*

$$V \cong \varinjlim_{i\in I} V_i$$

où $\{V_i\}_{i\in I}$ *désigne l'ensemble inductif filtrant des sous-objets de* V *de longueur finie.*

De plus, l'on dispose du

LEMMA 1.22. *Soit* $V \in \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l\,fin}}(A)$ *et supposons que l'on ait*

$$\mathrm{Hom}_G(\pi, V) = 0$$

pour tout objet irréductible $\pi \in \mathrm{Mod}_G(A)$. *Alors* $V = 0$.

Si V est un objet de $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ (resp. de $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro\,aug}}(A)$), l'on définit

$$V^\vee \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}^{\mathscr{C}^0}(V, L/\mathscr{O})$$

où $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}^{\mathscr{C}^0}(\bullet,\bullet)$ désigne l'ensemble des morphismes $\mathscr{O}$-linéaires continus de V, muni de la topologie discrète (resp. profinie), vers $L/\mathscr{O}$, muni de la topologie discrète.

Si l'on munit $V^\vee$ de la topologie des compacts-ouverts et de l'action de G donnée par le contragradient l'on démontre que $V^\vee \in \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro\,aug}}(A)$ (resp. $V^\vee \in \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$) et qu'en fait l'on dispose d'une anti-équivalence exacte et involutive de catégories

$$\begin{aligned} \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro\,aug}}(A) \\ V &\mapsto V^\vee \end{aligned}$$

Cela est décrit de manière complète dans [3], lemme 2.2.7. On remarque aussi la rédaction de Wilson, [9]§6.4, où on presente des résultats similaires avec des modules à coefficients dans $\mathbf{Z}$ (en lieu de $\mathscr{O}$) et des morphismes à valeur dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ en lieu de $L/\mathscr{O}$.

Si $\mathscr{C}$ est une catégorie, un objet $T \in \mathscr{C}$ est dit *générateur* si, étant donné n'importe quel couple d'objets $A, B \in \mathscr{C}$, le morphisme naturel

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) &\to \prod_{h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T,A)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T,B) \\ f &\mapsto (f \circ h)_{h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T,A)} \end{aligned}$$

est injectif. On laisse au lecteur le soin de définir, de manière similaire, la notion de *famille d'objets géneratrice.*

On peut maintenant énoncer le résultat principal de l'introduction

Proposition 1.23. *La catégorie* $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ *(resp.* $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l\,fin}}(A)$*) admet un génerateur (resp. admet une famille génératrice d'objets de longueur finie) et des limites inductives exactes.*

En particulier, les catégories $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$, $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l\,fin}}(A)$ *admettent des enveloppes injectives et la catégorie* $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l\,fin}}(A)$ *est localement finie.*

Proof. On réfère le lecteur aux lemmes 2.2, 2.4 et corollaire 2.3 dans [6]. Dans les notations *ibid.* on note que l'on pourra prendre, comme famille génératrice de $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l\,fin}}(A)$ la famille $\mathcal{F}$ des *sous-quotients* de X de longueur finie.

Une fois que l'on a montré l'existence des génerateurs et limites inductives, le reste se déduit des résultats dans [4] et précisement

i) l'exactitude des limites inductives de [4], Chapitre I-§6, proposition 6-*b*);

ii) l'existence des enveloppe injectives de [4], Chaptre II-§6, théorème 2.

Rappelons enfin qu'une catégorie abélienne $\mathscr{A}$ est dite *localement finie* si elle admet des limites inductives exactes et une famille génératrice d'objets de longueur finie. □

2. Le formalisme, première partie

Fixons $(A, \mathfrak{m}_A)$ une $\mathscr{O}$-algèbre locale noethérienne complète pour la topologie $\mathfrak{m}_A$-adique, de telle sorte que le morphisme entre les corps résiduels soit un isomorphisme.

Soit $\mathrm{Mod}_G^{?}(A)$ une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l\,fin}}(A)$, qui soit abélienne, stable par formation de coproduits (arbitraires) et sous-quotients. On déduit facilement que

Lemma 2.1. *La catégorie* $\mathrm{Mod}_G^{?}(A)$ *jouit des propriétés suivantes:*

i) *elle admet des limites inductives exactes;*

ii) *elle admet une famille génératrice d'objets de longueur finie;*

iii) *elle admet des enveloppes injectives;*

iv) *si* V *est un objet de* $\mathrm{Mod}_G^?(A)$ *et si* $\{V_i\}_{i\in I}$ *désigne la famille des sous-objets de* V *de longueur finie alors le morphisme naturel* $\varinjlim_i V_i \to V$ *est un isomorphisme.*

Proof. Les hypothèses entraînent que la catégorie $\mathrm{Mod}_G^?(A)$ admet des limites inductives (qui sont trivialement exactes car c'est le cas pour $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l\,fin}}(A)$). Comme famille géneratrice, l'on pourra prendre la sous-famille des objets de $\mathcal{F}$ qui appartiennent à $\mathrm{Mod}_G^?(A)$. Le reste est clair. □

On désigne par $\mathfrak{C}(A)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro\,aug}}(A)$ qui est anti-equivalente à $\mathrm{Mod}_G^?(A)$ par dualité de Pontryagin; on a donc un énoncé dual à 2.1, qu'on laisse au lecteur le soin d'écrire.

Fixons une famille finie d'objets irréductibles $S_1, \ldots, S_n$ de $\mathfrak{C}(A)$ tel que l'on ait $S_j \ncong S_i$ si $i \neq j$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on fixe un recouvrement projectif (P_i, π_i) de S_i (de telle sorte que $P \overset{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_{i=1}^n P_i$, $\pi \overset{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_{i=1}^n \pi_i$ soit un recouvrement projectif de $S \overset{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_{i=1}^n$).

On définit
$$E \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(A)}(P, P)$$
qui est muni d'une structure naturelle de $\mathscr{O}$-algèbre abstraite.

La suite de cette séction est consacrée à l'étude des premières propriétés de l'anneau E.

2.0.1 ***Propriétés topologiques.*** Soit $P \xrightarrow{q} M$ un épimorphisme. L'ensemble
$$\mathfrak{r}(M, q) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\phi \in E \text{ t.q. } \phi \text{ se factorise à travers } \ker(q) \hookrightarrow P\}$$
définit, de manière évidente, un idéal à droite de E. Grâce à Gabriel [4], Chapitre IV,§4 proposition 13, on a

i) la famille $\mathfrak{r}(M, q)$, pour M de longueur finie, fournit un filtre de voisinages ouverts de zéro;

ii) l'anneau E, muni de la topologie définie au *i*), est un anneau pseudocompact.

De plus, la proposition 12 (ainsi que sa préuve) dans [4], Ch.IV, §4, montre que $\mathfrak{m} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathfrak{r}(S, \pi)$ est l'idéal de Jacobson de E et que
$$E/\mathfrak{m} \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(A)}(S, S) (\cong \prod_{i=1}^n \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(A)}(S_i, S_i)).$$
Bien évidemment, chaque $k_i \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(A)}(S_i, S_i)$ (qui est muni d'une structure de $A/\mathfrak{m}_A \cong k$-module) est un corps.

On supposera dans la suite que k_i *est de dimension finie sur* k: on déduit que k_i est un corps commutatif fini et que tout E-module (à droite ou à gauche) irreductible (ou, plus géneralement de longueur finie) est *fini*. Pourtant, E est un anneau *profini*.

Notons que l'hypothèse de finitude de k_i est vraie lorsque $S_i^\vee$ est admissible: voir [3], lemme 2.3.10.

On remarque le fait suivant dans le cas où S est irréductible

LEMMA 2.2. *Si* S *est irréductible alors* E *est un anneau local.*

Proof. Omissis. Voir [6], lemme 2.5. □

Notons que $P \in \mathfrak{C}(A)$ est muni d'une structure naturelle de E-module à gauche. Cette action respecte les topologies naturelles sur E et P:

Proposition 2.3. *L'action naturelle de E fait de P un E-module pseudo-compact.*

Proof. Omissis. Voir [6], lemme 2.7, en notant que dans la preuve le E-module $\bigcap_{i=1}^{m} \phi_i^{\leftarrow}(M)$ est co-fini, donc, en particulier, est de E co-longueur finie (on rappellera que P est en particulier un $\mathscr{O}$-module profini).

Remarquons seulement que P/M étant de (ϖ^n)-torsion pour un $n \in \mathbf{N}$ convenable, l'on a $(P/M)^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(P/M, \varpi^{-n}\mathscr{O}/\mathscr{O})$ qui est un groupe fini. Étant $P^\vee$ localement de longueur finie, l'on déduit que τ est bien une G-représentation sur A de longueure finie.

Notons que, une fois que l'on démontre la continuité de l'action de E sur P, on peut déduire la E-linéarité de la topologie sur P aussi à travers la proposition 1.10, dès que E, comme l'on a remarqué, est profini. □

2.0.2 ***Étude du produit tensoriel complété sur*** *E.* On va résumer ici quelques propriétés de l'idéal de Jacobson $\mathfrak{m}$ de E. Soit M un E-module à droite, pseudo-compact; grâce à la proposition 2.3 et au fait que $E/\mathfrak{m}$ est muni d'une structure naturelle de k-espace vectoriel de dimension finie l'on pourra considérer $M\widehat{\otimes}_E P$, qui est un $\mathscr{O}$-module pseudocompact, ainsi que les résultats du théorème 1.8.

Lemma 2.4. *Le poduit tensoriel complété $M\widehat{\otimes}_E P$ est muni d'une structure naturelle d'objet de $\mathfrak{C}(A)$.*

Proof. Omissis. Voir [6], lemme 2.8 (c'est une conséquence formelle du théorème 1.8, à partir du cas où M est topologiquement libre sur E). □

Comme l'épimorphisme $P_i \stackrel{\pi_i}{\to} S_i$ est inessentiel, l'on déduit que le morphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(A)}(S_i, S_i) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(A)}(P_i, S_i)$$

est bijectif; de plus, l'irreducibilité de S_i entraîne aussi que

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(A)}(P_i, \widetilde{S}) = 0$$

si $\widetilde{S} \in \mathfrak{C}(A)$ est irréductible et $\widetilde{S} \ncong S_i$.

En particulier si $\widetilde{S} \in \mathfrak{C}(A)$ est irréductible, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(A)}(P, \widetilde{S})$ est muni d'une structure naturelle de $\mathscr{O}$-module de longueur finie, de telle sorte que l'exactitude du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(A)}(P, \bullet)$ puisse entraîner

Lemma 2.5. *Si $M \in \mathfrak{C}(A)$ est de longueur finie alors $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(A)}(P, M)$ est un E-module à droite de longueur finie et l'action de E est continue si l'on munit de la topologie discrète.*

En particulier, si $M \in \mathfrak{C}(A)$, l'action à droite de E fait de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(A)}(P, M)$ un E-module pseudocompact.

On déduit du lemme ci-dessous le fait suivant:

Lemma 2.6. *Soit M un E-module pseudo-compact. Le morphisme naturel*

$$\begin{aligned} M &\to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(A)}(P, M\widehat{\otimes}_E P) \\ m &\mapsto [p \mapsto m\widehat{\otimes} p] \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Proof. D'après les lemmes 2.4 et 2.5 on pourra considérer le foncteur (exact à droite)

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(A)}(P, \bullet\widehat{\otimes}_E P) : \mathrm{Mod}^{\mathrm{pc}}(E) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{pc}}(E).$$

Comme ce foncteur commute aux produits dans $\mathfrak{C}(A)$, l'enoncé est valable lorsque M est topologiquement libre; le cas géneral se déduit par une présentation de M. □

On en déduit

Lemma 2.7. *Soit $M \in \mathfrak{C}(A)$ et supposons que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(A)}(M, \widetilde{S}) = 0$ pour tout objet irréductible $\widetilde{S} \in \mathfrak{C}(A)$ tel que $\widetilde{S} \not\cong S_i$ avec $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Alors le morphisme naturel de $\mathscr{O}$-modules (pseudo-)compacts

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(A)}(P, M)\widehat{\otimes}_E P \to M$$

est un isomorphisme.

Proof. Omissis. La preuve est déttaillée dans [6], lemme 2.10. □

On va se spécialiser au cas où $A = \mathscr{O}/(\varpi^n)$ pour $n \in \mathbf{N}$. On va supposer aussi que

Remark 2.8. *Pour tout $n \in \mathbf{N}$ la catégorie $\mathfrak{C}(\mathscr{O}/(\varpi^n)$ s'identifie à la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{C}(\mathscr{O})$ constituée des objets de ϖ^n-torsion.*

Dans ce cadre, l'on a

Lemma 2.9. *Soit $M \in \mathfrak{C}(\mathfrak{C}(\mathscr{O}/(\varpi))$ et soit $\widetilde{P} \twoheadrightarrow M$ un recouvrement projectif de M dans $\mathfrak{C}(\mathscr{O})$.*

Pour tout $n \in \mathbf{N}$ le morphisme naturel induit $\widetilde{P}/\varpi^n\widetilde{P} \twoheadrightarrow M$ définit un recouvrement projectif de M dans $\mathfrak{C}(\mathscr{O}/(\varpi^n)$.

Proof. Omissis. C'est détaillé dans [6], lemme 2.11 □

3. Le formalisme, deuxième partie

On poursuit l'étude que l'on a commencé au §précédent.

D'abord, on fixe une sous-catégorie pleine $\mathfrak{C}$ de $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro\,aug}}(\mathscr{O})$, de telle sorte que l'on ait

i) $\mathfrak{C}$ est abélienne;

ii) $\mathfrak{C}$ est stable par formation de produits et sous-objets; en particulier $\mathfrak{C}$ est stable par formation des limites inverses;

iii) si $M \in \mathfrak{C}$ et $\{M_i\}_i$ désigne la famille *filtrante* des quotients de M de longueur finie alors le morphisme naturel $M \to \varprojlim_i M_i$ est un isomorphisme. En particulier $M^\vee$ est localement de longueur finie.

On voit qu'alors les propriétés formelles de la catégorie $\mathfrak{C}$ permettent d'utiliser le formalisme du §2.

On écrit $\mathrm{Irr}(\mathfrak{C})$ la famille des classes d'isomorphisme d'objets irréductibles de $\mathfrak{C}$. Notons que

Lemma 3.1. *Soit $M \in \mathfrak{C}$ tel que l'on ait*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M, S) = 0$$

pour tout représentant S d'une classe de $\mathrm{Irr}(\mathfrak{C})$.

Alors $M = 0$.

On remarque la trivialité suivante:

Remark 3.2. *Si $S \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{C})$ alors $\varpi S = 0$*

En fait, l'irréductibilité de S entraîne que lorsque $\varpi S = S$ la multiplication par ϖ induit un automorphisme (dans $\mathfrak{C}$) de S, donc, par dualité de Pontriagyn, la multiplication par ϖ induit un automorphisme de S^{vee}. Mais cela entraîne que $S^\vee[(\varpi)^n] = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}_>$, d'où $S^\vee = 0$, i.e. $S = 0$.

Dans la suite l'on fixe un objet irréductible $S \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{C})$ et on supposera que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(S, S)$ soit naturellement isomorphe à $\mathscr{O}/(\varpi)$. *On supposera l'existence d'un objet* $Q \in \mathfrak{C}$ de longueur finie qui vérifie les hypothèses suivantes

(H1) $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Q, S') = 0$ pour tout $S' \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{C})$, $S \ncong S'$;

(H2) la multiplicité de S comme facteur de Jordan Hölder de Q est 1;

(H3) $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{C}}(Q, S') = 0$ pour tout $S' \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{C})$, $S \ncong S'$;

(H4) $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{C}}(Q, S)$ est de dimension finie sur $\mathscr{O}/(\varpi)$;

(H5) $\mathrm{Ext}^2_{\mathfrak{C}}(Q, R) = 0$ si $R \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Rad}(Q)$.

On déduit de manière immediate

Lemma 3.3. *Soit Q comme ci-dessous et soit $Q \stackrel{\phi}{\twoheadrightarrow} S$ un morphisme non nul. Alors*

i) le morphisme naturel $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(S, S) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Q, S)$ *est un isomorphisme;*

ii) Q admet un sous module maximal et un seul;

iii) tout morphisme non nul $Q \twoheadrightarrow S$ est un epimorphisme inessential.

Proof. Les hypothèses (H1) et (H2) entraînent que $\mathrm{cosoc}(Q) \cong S$ et donc que $R = \mathrm{Rad}(Q)$ est maximal. Ceci entraîne le *ii*) et, par conséquent, le *i*). Comme tout sous-module propre de Q est contenu dans R, l'on déduit le *iii*). ☐

En particulier, l'on dispose d'une suite exacte dans $\mathfrak{C}$:

$$0 \to R \to Q \stackrel{\phi}{\to} S \to 0. \tag{1}$$

Lemma 3.4. *La suite 1 induit:*

i) un isomorphisme $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{C}}(Q, Q) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{C}}(Q, S)$;

ii) un monomorphisme $\mathrm{Ext}^2_{\mathfrak{C}}(Q, Q) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathfrak{C}}(Q, S)$.

Proof. Omissis. Voir [6], lemme 3.1 ☐

Fixons un recouvrement projectif $P \stackrel{\kappa}{\twoheadrightarrow} S$ de S dans $\mathfrak{C}$. Comme le morphisme κ est inessentiel c'est immédiat de voir que le morphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(S, S) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P, S)$$

est bijectif et que

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P, \widetilde{S}) = 0$$

si $\widetilde{S} \in \mathrm{Irr}\mathfrak{C}$ vérifie $\widetilde{S} \ncong S$. En particulier, l'exactitude de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P, \bullet)$ entraîne que

Lemma 3.5. *Soit $T \in \mathfrak{C}$ de longueur finie et soit m la multiplicité de S dans T.*
Alors $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P, T)$ *est un groupe abélien d'ordre* $(\mathrm{Card}(k))^m$.

La suite de cette section est consacrée à l'étude des propriétés formelles de l'anneau $E \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P, P)$ et du E-module P. En particulier, on verra que E est muni d'un structure naturelle de $\mathscr{O}$-algèbre profinie et P de E-module profini et topologiquement libre.

La nature profinie de l'anneau E est reliée de manière cruciale, à la nature d'une certaine filtration de P. Cette filtration sera décrite à l'aide d'un certain nombre de lemmes techniques, que l'on a decidé d'inclure ici et dont les preuves sont soigneusement décrites dans [6].

On rappelle l'anneau E que l'on avait introduit au §précédent:

$$E \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P, P).$$

Comme on l'avait remarqué, les résultats du §2 restent valables. Notons que l'on a, par définition de $\mathfrak{m}$, une suite exacte de E-modules pseudocompacts:

$$0 \to \mathfrak{m} \to E \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P, S) \to 0.$$

Aussi, tout élément de $\phi \in E$ s'écrit comme $\phi = [\lambda] id_P + m$ avec $m \in \mathfrak{m}$ et $\lambda \in k$, ce qui permet de vérifier que

Lemma 3.6. *Les idéaux $\mathfrak{m}^n$ sont bilatères.*

3.0.3 ***La filtration sur*** P. On commence par le lemme technique suivant

Lemma 3.7. *Soit $T \in \mathfrak{C}$ de longueur finie et supposons que T admet une filtration $\{T_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ de telle sorte que $T_0 = T$ et $T_i/T_{i+1} \cong Q^{n_i}$ (avec $n_i \in \mathbf{N}$).*

Alors la suite (1) induit un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{C}}(T, Q) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{C}}(T, S)$$

et l'on a $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{C}}(T, S') = 0$ pour tout $S' \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{C})$, $S' \ncong S$.

Proof. Omissis. Voir [6], lemme 3.2. □

On regroupe des observation élémentaires dans les remarques suivantes

Remark 3.8. *Si $Q \xrightarrow{\psi} Q$ est un morphisme non nul alors ψ est un isomorphisme.*

Proof. Comme Q est de longueur finie, il suffit de voir que ψ est un épimorphisme. Cela est d'ailleurs immédiat car, sinon, l'on a un morphisme non nul à conoyau non nul $Q/\ker(\psi) \hookrightarrow Q$ ce qui entraîne que S aurait multiplicité > 1. □

Remark 3.9. *L'objet Q est de ϖ-torsion.*

Proof. En fait, sinon, la multiplication par ϖ^n induit un automorphisme de Q, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Par dualité de Pontryagin, la multiplication par ϖ^n induit un automorphisme de $Q^\vee$, ce qui entraîne que $Q^\vee = 0$ car $Q^\vee$ est un $\mathscr{O}$-module de torsion. □

Remark 3.10. *Comme $P \xrightarrow{\kappa} S$ est un recouvrement projectif, l'on dispose d'un épimorphisme $P \overset{\theta}{\twoheadrightarrow} Q$ tel que $\phi \circ \theta = \kappa$.*

Remark 3.11. *D'après ce qui précède (en particulier le lemme 3.5 et l'hypothèse (H2)) les flèches du diagramme naturel sont toutes des isomorphismes*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(S,S) \arrow[rr, hook] \arrow[d, hook] & & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P,S) \\
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Q,S) & & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P,Q) \arrow[u, two heads] \\
& \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Q,Q). \arrow[ul] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

À l'aide des remarques précédents, l'on introduit une filtration exhaustive et séparée sur P:

Proposition 3.12. *Il existe une et une seule filtration $\{P_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ sur P par des sous-objets fermés $P_n \leqslant P$ de telle sorte que l'on ait*

i) $P_0 = P$;

ii) $P_n/P_{n+1} \cong Q^{d_n}$ *avec* $d_n \geqslant 1$;

iii) le morphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P_n/P_{n+1}, Q) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P_n, Q)$$

est bijectif.

De plus l'on a $P_{n+1} \leqslant \mathrm{Rad}(P_n)$, $P_n/\mathrm{Rad}(P_n) \cong \oplus S^{d_n}$, $\overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{C}}(P/P_n, S) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P_n, S)$ *et le morphisme naturel*

$$P \to \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} P/P_n$$

est un isomorphisme.

Proof. L'unicité est claire à partir des propriétés *ii)* et *iii)*: en fait

$$P_{n+1} = \bigcap_{j=1}^{d_n} \ker(P_n \twoheadrightarrow P_n/P_{n+1} \cong Q^{d_n} \overset{pr_j}{\to} Q).$$

Quant à l'existence, il s'agit d'une récurrence sur n: on pourra utiliser le lemme 3.7 sur P/P_n pour arriver à construire un diagramme commutatif dans $\mathfrak{C}$:

$$\begin{tikzcd} & Q^{d_n} \arrow[d, two heads] \\ P_n \arrow[ur, "\theta_n"] \arrow[r, two heads] & P_n/\mathrm{Rad}(P_n) \end{tikzcd}$$

et l'on vérifie que $P_{n+1} \overset{\mathrm{def}}{=} \ker(\theta_n)$ convient.

Pour l'isomorphisme avec la limite projective l'on démontre que la filtration $\{P_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ définit un système cofinal dans la famille des quotients de longueur finie de P. $\square$

La relation entre la filtration P_n ainsi obtenue et les sous E-modules $\mathfrak{m}^n P$ permetteront de comprendre la nature profinie de E ainsi que le fait que P est topologiquement libre. Tout cela s'appuie sur le résultats crucial qui suit.

Proposition 3.13. *Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a*

i) $\mathfrak{m}^n P = P_n$;

ii) l'idéal $\mathfrak{m}$ est de type fini sur E;

iii) la flèche tautologique

$$\mathfrak{m}^n \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P, \mathfrak{m}^n P)$$

est bijective. De plus, l'on a $d_n = \dim \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ et il existe un épimorphisme $P^{d_n} \twoheadrightarrow \mathfrak{m}^n P$ de telle sorte que la famille d'éléments de E définie par

$$X_i : P \overset{\iota_i}{\to} P^{d_n} \twoheadrightarrow \mathfrak{m}^n P \hookrightarrow P$$

soit un relévement d'une base de $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$.

Proof. Tout d'abord, l'on montre, par récurrence sur n, que $\mathfrak{m}^n P \subseteq P_n$ pour tout n.

Le reste peut aussi être démontré par récurrence en supposant le résultat vrai pour n. Tout d'abord, le fait que $P_n/\mathrm{Rad}(P_n) \cong S^{d_n}$ permet de déduire un épimorphisme $P^{d_n} \twoheadrightarrow P_n = \mathfrak{m}^n P$, d'où les éléments X_i. On déduit de iii) une factorisation

$$\begin{tikzcd} P^{d_n} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathfrak{m}^n P/\mathfrak{m}^{n+1}P \\ (P/\mathfrak{m}P)^{d_n} \arrow[ur, two heads, "\exists!", "f_1"'] & \end{tikzcd}$$

et, de $\mathfrak{m}^{n+1}P \subseteq P_{n+1}$, une flèche surjective

$$\mathfrak{m}^n P/\mathfrak{m}^{n+1}P \overset{f_2}{\twoheadrightarrow} P_n/P_{n+1}.$$

Ainsi, l'on dispose d'une surjection entre des objets de même longueur (finie)

$$(P/\mathfrak{m}P)^{d_n} \twoheadrightarrow \mathfrak{m}^n P/\mathfrak{m}^{n+1}P \twoheadrightarrow P_n/P_{n+1}$$

ce qui donne la première partie.

Pour la déuxième, l'on applique le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P, \bullet)$ à l'épimorphisme $P^{d_n} \twoheadrightarrow \mathfrak{m}^n P$: ceci donne le ii). En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P, \bullet)$ à l'épimorphisme $\mathfrak{m}^n P \twoheadrightarrow \mathfrak{m}^n P \mathfrak{m}^{n+1} P$, des manipulations formelles nous permettent de conlure. $\square$

Notons en particulier que le ii) entraîne que

Lemma 3.14. *Les idéaux $\mathfrak{m}^n$ de E sont fermés.*

En fait, on a vu la donnée d'un morphisme E-linéaire continu $E^{d_n} \to E$ d'image $\mathfrak{m}^n$ et E est compact (cf. 2.0.1) et séparé.

Le fait que $\mathfrak{m}^n$ soit un idéal bilatère entraîne une factorisation du morphisme naturel

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P, P/\mathfrak{m}^n P) \\ & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P/\mathfrak{m}^n P, P/\mathfrak{m}^n P) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

On pourra être plus précis

Lemma 3.15. *La flèche naturelle*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P/\mathfrak{m}^n P, P/\mathfrak{m}^n P) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P, P/\mathfrak{m}^n P)$$

est bijective et $\mathfrak{m}^n$ est le noyau de la flèche naturelle

$$E \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P/\mathfrak{m}^n P, P/\mathfrak{m}^n P)$$

(qui, de manière explicite associe à $\phi \in E$ l'unique morphisme $\overline{\phi} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P/\mathfrak{m}^n P, P/\mathfrak{m}^n P)$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, two heads] & P \arrow[d, two heads] \\ P/\mathfrak{m}^n P \arrow[r, "\overline{\phi}"] & P/\mathfrak{m}^n P \end{tikzcd}$$

soit commutatif).

Proof. C'est une conséquence formelle de la proposition 3.13, en appliquant $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P, \bullet)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\bullet, P/\mathfrak{m}^n P)$ à la suite

$$0 \to \mathfrak{m}^n P \to P \to P/\mathfrak{m}^n P \to 0.$$

$\square$

Notons que

Remark 3.16. *L'ensemble* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P/\mathfrak{m}^n P, P/\mathfrak{m}^n P)$ *est fini. Par conséquent l'idéal* $\mathfrak{m}^n$ *est ouvert.*

En effet, cela suit immédiatement du fait que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P, Q)$ soit fini, ce qui implique aisément la finitude de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P, P/\mathfrak{m}^n P)$.

Pourtant, l'on dispose des morphismes surjectifs continus $E \twoheadrightarrow E/\mathfrak{m}^n$ et l'on déduit:

Lemma 3.17. *Le morphisme naturel de E-modules pseudocompacts*

$$E \to \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} E/\mathfrak{m}^n$$

est un isomorphisme.

Proof. On démontre dans [6] corollaire 3.11 que le morphisme naturel de E-modules pseudocompacts est bijectif. Il est un homéomorphisme car le morphisme est à image dense, E est compact et la limite projective séparé. □

La structure de P. On se propose de démontrer que P, qui est un E-module pseudo-compact (cf.proposition 2.3), est en fait topologiquement libre sur E, i.e. $P \cong \prod_{i\in I} E$ (isomorphisme de E-modules pseudocompacts) pour un certain ensemble d'indices I.

C'est clair que $P/\mathfrak{m}^n P$ est un module pseudo-compact sur l'anneau pseudo-compact $E/\mathfrak{m}^n$. En fait l'on avait remarqué que $\mathfrak{m}^n P$ et $\mathfrak{m}^n$ sont des sous-modules fermés, donc pseudo-compacts, de P et E respectivement et la catégorie des E-modules pseudocompacts est abélienne.

On dispose du résultat suivant

Proposition 3.18. *Il existe un ensemble d'indices I tel que l'on ait un isomorphisme de E-modules pseudocompacts*

$$P/\mathfrak{m}^n P \cong \prod_{i\in I} E/\mathfrak{m}^n$$

(l'on rappelle que la topologie naturelle sur le E-module pseudocompact $E/\mathfrak{m}^n$ est la topologie discrète).

Proof. C'est une récurrence sur n. Pour $n = 1$ on remarque que $P/\mathfrak{m}P$ est un $E/\mathfrak{m}$-module topologique séparé et complet, et l'on démontre que l'on a un isomorphisme topologique $E/\mathfrak{m}$-linéaire

$$\psi_1 : \prod_{i\in I} E/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} P/\mathfrak{m}P.$$

Le cas géneral se déduit par récurrence de la manière suivante. Supposons que l'on ait, par hypothèse de récurrence, une famille d'isomorphismes $\psi_j : \prod_{i\in I} E/\mathfrak{m}^j \to P/\mathfrak{m}^{n-1}P$ tel que l'on ait $\psi_j \widehat{\otimes}_E E/\mathfrak{m}^{j-1} = \psi_{j-1}$. On notera que $\prod_{i\in I} E/\mathfrak{m}^n$ est un objet projectif dans la catégorie des E-modules pseudo-compacts (tout simplement étant un répresentant du foncteur, évidemment exact, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}((E/\mathfrak{m}^n)^{(I)}, \bullet)$ sur $\mathrm{Mod}^{pc}(E)$).

Pourtant, il existe un morphisme (continu) ψ_n qui complète le diagramme suivant de manière commutative

$$\begin{tikzcd} \prod_{i\in I} E/\mathfrak{m}^n \arrow[r, two heads] \arrow[d, dashed, "\psi_n"] & \prod_{i\in I} E/\mathfrak{m}^{n-1} \arrow[d, "\psi_{n-1}", "\sim"'] \\ P/\mathfrak{m}^n P \arrow[r, two heads] & P/\mathfrak{m}^{n-1}P \end{tikzcd}$$

et l'on se propose de démontrer que ψ_n est un isomorphisme (notons que la condition de bi-continuité serait alors automatique dès que $\prod_{i\in I} E/\mathfrak{m}^n$ est compact et $P/\mathfrak{m}^n P$ séparé. Notons que $P/\mathfrak{m}^n P\widehat{\otimes}_E E/\mathfrak{m}^{n-1} = P/\mathfrak{m}^{n-1}P$ (on rémarque que $\mathfrak{m}^{n-1}$ est de type fini sur E) ce qui montre donne $\psi_n\widehat{\otimes}_E E/\mathfrak{m}^{n-1} = \psi_{n-1}$.

Pour la surjectivité, il suffit de remarquer que le fait que $\psi_1 = \psi_n\widehat{\otimes}_E E/\mathfrak{m}$ soit surjectif entraîne $\operatorname{coker}(\psi_n)\widehat{\otimes}_E E/\mathfrak{m} = 0$ (par exactitude à droite du produit tensoriel complété). Ceci donne (comme $\mathfrak{m}$ est de type fini) $\mathfrak{m}\operatorname{coker}(\psi_n) = \operatorname{coker}(\psi_n)$ d'où $\operatorname{coker}(\psi_n) = 0$ étant lui annulé par $\mathfrak{m}^n$.

La preuve de l'injectivité est détaillée dans [6], corollaire 3.12. On a envie de remarquer la chose suivante: on a démontré qu'une base pour $\mathfrak{m}^{n-1}/\mathfrak{m}^n$ est donnée par l'image, modulo $\mathfrak{m}^n$ des fonctions $X_i \in E$. Via l'isomorphisme du lemme 3.15 on trouve une base $\{x_i\}_{i\in\{1,\dots,d_n\}}$ de $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(P/\mathfrak{m}^n P, P/\mathfrak{m}^n P)$ de telle sorte que l'on a un diagramme commutatif de la forme suivante:

$$\begin{tikzcd} P/\mathfrak{m}^n P \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[d, two heads] & (P/\mathfrak{m}^n P)^{d_n} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathfrak{m}^{n-1}P/\mathfrak{m}^n P \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & P/\mathfrak{m}^n P \arrow[d, equal] \\ P/\mathfrak{m}P \arrow[r, dotted, "\exists!"] & (P/\mathfrak{m}P)^{d_n} \arrow[r, "\sim"] & \mathfrak{m}^{n-1}P/\mathfrak{m}^n P \arrow[r, hook] & P/\mathfrak{m}^n P \end{tikzcd}$$

(l'on pourra utiliser la factorisation donnée dans la preuve de la proposition 3.15 pour disposer du carré central du diagramme). À l'aide du diagramme commutatif précedent, l'on déduit l'injectivité de ψ_n, voir la preuve dans [6], corollaire 3.12. □

On déduit finalement

Corollary 3.19. *L'on a un isomorphisme de E-modules pseudo-compacts*

$$P \cong \prod_{i\in I} E$$

pour un ensemble convenable d'indices I.

Proof. Comme $\mathfrak{m}^n$ est un idéal bilatère et de type fini sur E, les morphismes canoniques $P \to P/\mathfrak{m}^n P$ dans $\mathfrak{C}$ sont des morphismes de E-modules pseudo-compacts. Pourtant, l'isomorphisme de la proposition 3.12 est E-linéaire (bicontinu). La conclusion est alors immédiate à partir de la proposition 3.18 □

Comme P est topologiquement libre, on obtient immédiatement

Remark 3.20. *Soit $E \xrightarrow{\phi} A$ un morphisme fini*[1] *d'anneaux pseudo-compacts (de telle sorte que ϕ puisse munir A d'une structure de E-module pseudo-compact).*

Alors le produit tensoriel complété $A\widehat{\otimes}_E P$ possède une structure naturelle de A module plat pseudo-compact.

[1] Comme Paskunas a remarqué, l'enoncé du corollaire 3.14 [6] nécessite d'une hypothèse supplementaire: l'on a besoin que le morphisme ϕ munisse A d'une structure d' E-module pseudo-compact. Paskunas sugère de supposer que tout A-module irreductible soit de longueur finie comme E-module: cela est bien verifié dans les application de [6] car A serait toujours un anneau local ayant le même corps residuel de E.

Proof. Du corollaire 3.19 on déduit un isomorphisme de E-modules pseudocompacts

$$A\widehat{\otimes}_E P \cong \prod_{i\in I} A$$

ce qui montre le résultat (d'après la proposition 0.3.6 dans [7], exposé VII_B). $\square$

Remark 3.21. *Soit M un E-module pseudo-compact et supposons que M soit sans $\mathscr{O}$-torsion. Alors $M\widehat{\otimes}_E P$ est sans $\mathscr{O}$-torsion.*

Proof. Comme $\mathscr{O}$ est principal, M est algébriquement plat sur $\mathscr{O}$. D'après [7], Exposé VII_B 0.3.8, $M\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}}\bullet$ est exact si sa restriction à la sous-catégorie des objets noethériens de $\mathrm{Mod}^{pc}(\mathscr{O})$ est exact. Comme $M\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}}N = M\otimes_{\mathscr{O}} N$ si N est un objet noethérien, l'on conclut que M est topologiquement plat, ce qui permet (*ibid.*) de déduire que M est topologiquement libre. Cela permet de conclure à l'aide du corollaire 3.19. $\square$

4. Déformations

Le but de cette section est de démontrer l'existence d'un analogue "non commutatif" du théorème d'existence des anneaux de déformations universels.

4.0.4 ***Les définitions des objets et des déformations.*** Soit $\mathfrak{C}(\mathscr{O})$ une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro\,aug}}(\mathscr{O})$ vérifiant les $i)$, $ii)$ et $iii)$ du §3. Notons que si l'on écrit $\mathfrak{C}(k)$ pour dèsigner la sous catégorie pleine de $\mathfrak{C}(\mathscr{O})$ constituée par les objets de ϖ-torsion, alors $\mathfrak{C}(k)$ vérifie aussi les $i)$, $ii)$, $iii)$ ci-dessus.

On spécialise d'abord les constructions de la section §3 au cas où $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(k)$: on écrit donc S, Q, P, E, etc... En particulier, l'on supposera que Q vérifie les conditions (H1),...,(H5). Notons que cela n'implique *pas* que Q, vu comme objet de $\mathfrak{C}(\mathscr{O})$, vérifie ces propriétés.

Fixons maintenant $\widetilde{P} \xrightarrow{\widetilde{\kappa}} S$ un recouvrement projectif de S *dans* $\mathfrak{C}(\mathscr{O})$. Posons également $\widetilde{E} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathscr{O})}(\widetilde{P},\widetilde{P})$, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$.

Notons tout d'abord que

Remark 4.1. *On a* $\mathrm{Irr}(\mathfrak{C}(k)) = \mathrm{Irr}(\mathfrak{C}(\mathscr{O}))$.

En fait, tout $\widetilde{S}\in\mathrm{Irr}(\mathfrak{C}(\mathscr{O}))$ est en particulier un $\mathscr{O}$-module profini, de telle sorte que la condition $\varpi\widetilde{S} = \widetilde{S}$ implique, par le lemme de Nakayama topologique étant $\varpi\widetilde{S}$ un sous-objet fermé, que $\widetilde{S} = 0$ (voir par exemple [7], VII_B, 0.3.3).

Dans le paragraphe qui suit, on détermine une condition technique afin que Q puisse vérifier les condition (H1),...,(H5) en tant qu'objet de $\mathfrak{C}(\mathscr{O})$.

Une condition technique. On commence par deux remarques

Remark 4.2. *Le morphisme naturel $\widetilde{P}/\varpi\widetilde{P}\to S$ induit par $\widetilde{P}\xrightarrow{\widetilde{\kappa}} S$ fait de $\widetilde{P}/\varpi\widetilde{P}$ un recouvrement projectif de S dans $\mathfrak{C}(k)$.*

En particulier, $\widetilde{P}/\varpi\widetilde{P}\cong P$ (pas canoniquement) et comme $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathscr{O})}(M,T) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(k)}(M/\varpi M, T)$ si $M\in\mathfrak{C}(\mathscr{O})$, $T\in\mathfrak{C}(k)$, l'on dispose des suites exactes

$$0\to\widetilde{P}[\varpi]\to\widetilde{P}\to\widetilde{P}\to P\to 0$$
$$0\to\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathscr{O})}(\widetilde{P},\widetilde{P}[\varpi])\to\widetilde{E}\to\widetilde{E}\to E\to 0.$$

Remark 4.3. *Pour tous objets $A, B \in \mathfrak{C}(k)$ on dispose d'une suite exacte naturelle*

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{C}(k)}(A, B) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{C}(\mathscr{O})}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(k)}(A, B).$$

En fait, la troisième flèche associe à une (classe d'isomorphisme de) suite exacte, le morphisme de connexion déterminé par le lemme du serpent à partir de l'endomorphisme de suites exactes induit par la multiplication par ϖ.

D'abord, notons que la remarque 4.1 implique que Q est de longueur finie comme objet de $\mathfrak{C}(\mathscr{O})$. Les propriétées (H1) et (H2) pour $\mathfrak{C}(k)$ impliquent trivialement les propriétés correspondantes pour $\mathfrak{C}(\mathscr{O})$. De plus, la remarque 4.3 et le propriétés (H1), (H3) et (H4) pour $\mathfrak{C}(\mathscr{O})$ impliquent les (H3) et (H4) pour $\mathfrak{C}(\mathscr{O})$.

Enfin

Proposition 4.4. *Supposons que Q vérifie*

(H0) $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathscr{O})}(\widetilde{P}[\varpi], \mathrm{Rad}(Q))$.

Alors la propriété (H5) pour $\mathfrak{C}(k)$ implique (H5) pour $\mathfrak{C}(\mathscr{O})$.

Proof. Omissis. Voir [6], proposition 3.17. □

Dorénavant, on supposera que Q vérifie les propriétées (H1),...,(H5) pour $\mathfrak{C}(k)$, ainsi que la propriété (H0). Les résultats du §2 et du §3 s'appliquent ainsi aux anneaux E et $\widetilde{E}$.

Definition 4.5. *On désigne par $\mathfrak{A}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des $\mathscr{O}$-algèbres locales dont les objets $(A, \mathfrak{m}_A)$ vérifient les conditions suivantes*

i) *A est munie d'une structure d'$\mathscr{O}$-algèbre finie;*

ii) *A est artinienne;*

iii) *le morphisme résiduel induit par le morphisme donnant la structure de $\mathscr{O}$-algèbre sur A est bijectif.*

On note par $\mathfrak{A}^{ab}$ la sous catégorie pleine de $\mathfrak{A}$ constituée par les algèbres commutatives.

Notons d'abord que

Remark 4.6. *Tout objet de $\mathfrak{A}$ est fini. En particulier, A est noethérien et pseudocompact (pour la topologie discrète).*

En fait, l'on rappelle que pour un anneau local artinien l'idéal maximal est nilpotent (voir [5], lemme 5.3 et proposition 5.11). Comme le morphisme structural $\mathscr{O} \to A$ est local et fait de A un $\mathscr{O}$-module de type fini, l'on conclut d'après la pro-finitude de $\mathscr{O}$.

Cela entraîne donc

Remark 4.7. *Si M, N sont deux A-modules pseudocompacts (à droite et à gauche respectivement) dont l'un de type fini sur A alors:*

$$M \widehat{\otimes}_A N \cong M \otimes_A N.$$

On notera par $\widehat{\mathfrak{A}}$ la sous catégorie pleine des $\mathscr{O}$-algèbres locales dont les objets $(R, \mathfrak{m}_R)$ vérifient les propriétés suivantes

i) pour tout $n \in \mathbf{N}_>$ l'algèbre $R/\mathfrak{m}_R^n$ est un objet de $\mathfrak{A}$;

ii) le morphisme naturel d'$\mathscr{O}$-algèbres locales

$$R \to \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} R/\mathfrak{m}_R^n$$

est bijectif.

Notons que les morphismes étant locaux, l'on dispose, pour tout objet $R, S \in \widehat{\mathfrak{A}}$, des isomorphismes naturels suivants entre les Hom-ensembles

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathfrak{A}}}(R,S) \cong \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathfrak{A}}}(R, S/\mathfrak{m}_S^n) \cong \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathfrak{A}}}(R/\mathfrak{m}_R^n, S/\mathfrak{m}_S^n).$$

On est finalement prêt pour introduire la notion de déformation

Definition 4.8. *Soit $(A,\mathfrak{m}_A) \in \mathfrak{A}$ et définissons $\mathfrak{C}(A)$ comme la sous catégorie pleine de $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro\,aug}}(A)$ dont les objets sont donnés par l'anti-image essentielle de $\mathfrak{C}(\mathscr{O})$ par le foncteur d'oubli $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro\,aug}}(A) \to \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro\,aug}}(\mathscr{O})$.*

Une déformation de Q à A est la donnée d'une couple (M,α) où $M \in \mathfrak{C}(A)$ soit plat sur A et α réalise un isomorphisme $M/\mathfrak{m}_A M \xrightarrow{\sim} Q$ dans $\mathfrak{C}(k)$.

On définit de la manière évidente la notion de morphisme de déformations.

Comme $\mathfrak{m}_A$ est de type fini sur A, l'on remarque que $\mathfrak{m}_A M$ est un sous-objet fermé de M; la catégorie $\mathfrak{C}(\mathscr{O})$ étant stable par sous-quotient et le foncteur d'oubli exact cela entraîne que $M/\mathfrak{m}_A M$ est bien un objet de $\mathfrak{C}(A)$.

Remark 4.9. *Si l'on munit $\mathfrak{m}_A^i/\mathfrak{m}_A^{i+1}$ de la structure évidente d'objet de $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro\,aug}}(A)$, alors $\mathfrak{m}_A^i/\mathfrak{m}_A^{i+1}\widehat{\otimes}_A M$ est muni d'une structure naturelle d'objet de $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro\,aug}}(\mathscr{O})$.*

En particulier, l'isomorphisme d'$\mathscr{O}$-modules augmentés

$$\mathfrak{m}_A^i M/\mathfrak{m}_A^{i+1} M \cong \mathfrak{m}_A^i/\mathfrak{m}_A^{i+1}\widehat{\otimes}_A M$$

entraîne que $\mathfrak{m}_A^i/\mathfrak{m}_A^{i+1}\widehat{\otimes}_A M \in \mathfrak{C}(\mathscr{O})$.

Comme d'habitude, l'on désigne par $\mathrm{Def}_Q(A)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des déformations de Q à A. Si $A_1 \xrightarrow{\phi} A_2$ est un morphisme dans $\mathfrak{A}$, l'on définit une fonction

$$\mathrm{Def}_Q(A_1) \to \mathrm{Def}_A(A_2)$$

qui associe à une (classe de) déformation (M,α) sur A_1, la déformation $(A_2\widehat{\otimes}_{\phi,A_1} M, id_{A_2}\widehat{\otimes}_{\phi,A_1}\alpha)$ (il s'agit d'une bonne définition).

4.1 Anneaux de déformations universels

On maintient les notations et conventions du §précédent. On se propose de démontrer que le foncteur des déformations $\mathrm{Def}_Q(\bullet)$ est, dans un certain sens, pro-représentable. Pour cela l'on a besoin d'un certain nombre de résultats techniques, qui seront résumés dans les lemmes suivants.

Lemma 4.10. *Pour tout $i \in \{0,\dots,n\}$ l'on a des isomorphismes dans $\mathfrak{C}(k)$:*

$$\mathfrak{m}_A^i/\mathfrak{m}_A^{i+1}\widehat{\otimes}_A M \cong \mathfrak{m}_A^i M/\mathfrak{m}_A^{i+1} M \cong Q^{l_i}$$

où $l_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dim_k(\mathfrak{m}_A^i/\mathfrak{m}_A^{i+1})$.

Proof. L'on dispose d'un isomorphisme A-linéaire $\mathfrak{m}_A^i/\mathfrak{m}_A^{i+1} \cong (A/\mathfrak{m}_A)^{l_i}$, (qui est en fait un morphisme dans $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro\,aug}}(A)$ si l'on munit les deux objets de l'action triviale de G) de telle sorte que l'on dispose des isomorphismes naturels

$$\mathfrak{m}_A^i/\mathfrak{m}_A^{i+1}\widehat{\otimes}_A M \cong (A/\mathfrak{m}_A)^{l_i}\widehat{\otimes}_A M \cong (A/\mathfrak{m}_A\widehat{\otimes}_A M)^{l_i}$$

qui respectent les structures naturelles évidentes d'$\mathscr{O}$-modules augmentés. Ceci permet de conclure. □

On déduit du lemme 4.10:

LEMMA 4.11. *Écrivons $\ell_{\mathscr{O}}(T)$ pour dèsigner la longueur d'un $\mathscr{O}$-module. On a alors*

$$\ell_{\mathscr{O}}(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathscr{O})}(\widetilde{P}, M)) = \ell_{\mathscr{O}}(A).$$

LEMMA 4.12. *Le morphisme naturel*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathscr{O})}(\widetilde{P}, M)\widehat{\otimes}_{\widetilde{E}}\widetilde{P} \to M$$

est un isomorphisme dans $\mathfrak{C}(\mathscr{O})$ et respecte l'action naturelle (à gauche) de A.

Proof. Grâce aux lemmes 2.4 et 2.5 l'on a un foncteur

$$\begin{aligned} F : \mathfrak{C}(\mathscr{O}) &\to \mathfrak{C}(\mathscr{O}) \\ T &\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathscr{O})}(\widetilde{P}, T)\widehat{\otimes}_{\widetilde{E}}\widetilde{P} \end{aligned}$$

qui est d'ailleurs *exact* dès que $\widetilde{P}$ est un objet projectif dans $\mathfrak{C}(\mathscr{O})$ et $\widetilde{E}$-plat. Grâce au lemme 4.10, on déduit des isomorphismes dans $\mathfrak{C}(\mathscr{O})$

$$\begin{aligned} F(\mathfrak{m}_A^i M/\mathfrak{m}_A^{i+1} M) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathscr{O})}(\widetilde{P}, Q^{l_i})\widehat{\otimes}_{\widetilde{E}}\widetilde{P} \\ &\cong (\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathscr{O})}(\widetilde{P}, Q)\widehat{\otimes}_{\widetilde{E}}\widetilde{P})^{l_i} \\ &\cong (\widetilde{E}/\widetilde{\mathfrak{m}} \otimes \widetilde{P})^{l_i} \\ &\cong Q^{l_i} \\ &\cong \mathfrak{m}_A^i M/\mathfrak{m}_A^{i+1} M \end{aligned} \tag{2}$$

(où l'on rappelle que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathscr{O})}(\widetilde{P}, Q) \cong \widetilde{E}/\widetilde{\mathfrak{m}}$ et que $\widetilde{E}/\widetilde{\mathfrak{m}}\widehat{\otimes}_{\widetilde{E}}\widetilde{P} \cong \widetilde{P}/\widetilde{\mathfrak{m}}\widetilde{P} \cong Q$ puisque $\widetilde{E}/\widetilde{\mathfrak{m}}$ est de type fini sur E: voir aussi les propositions 3.12, 3.13 et 3.15). En particulier, les objets $F(\mathfrak{m}_A^i M/\mathfrak{m}_A^{i+1} M)$, $\mathfrak{m}_A^i M/\mathfrak{m}_A^{i+1} M$ ont même $\mathscr{O}$ longueur (finie).

Notons que le morphisme naturel

$$F(\mathfrak{m}_A^i M/\mathfrak{m}_A^{i+1} M) \xrightarrow{\iota_i} \mathfrak{m}_A^i M/\mathfrak{m}_A^{i+1} M$$

est surjectif: $\widetilde{P}$ est un recouvrement projectif de S et on dispose d'un (au moins) épimorphisme $\mathfrak{m}_A^i M/\mathfrak{m}_A^{i+1} M \twoheadrightarrow S$ par le lemme 4.10. L'on déduit par raison de longueur, à l'aide des isomorphismes (2), que le morphisme ι_i est en fait un isomorphisme.

La transformation naturelle des foncteurs exacts

$$F \Rightarrow id_{\mathfrak{C}(\mathscr{O})}$$

entraîne donc, par dévissage sur la filtration $\{\mathfrak{m}_A^i M/\mathfrak{m}_A^{i+1}\}_i$, le résultat annoncé. □

Rappellons que $\widetilde{P}$ est muni d'une structure naturelle de $\widetilde{E}$-module pseudo-compact et que l'on dispose d'un isomorphisme (dans $\mathfrak{C}(\mathscr{O})$)

$$\widetilde{P}/\widetilde{\mathfrak{m}}_{\widetilde{E}}\widetilde{P} \overset{\alpha^{univ}}{\to} Q$$

(voir les propositions 3.12, 3.13).

On se propose de démontrer que la couple $(\widetilde{P}, \alpha^{univ})$ est la "déformation universelle" pour Q.

Rappelons que tout $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\widetilde{E}, A)$ munit A d'une structure de $\widetilde{E}$-module pseudo-compact; de plus A est naturellement un objet de $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro\,aug}}(A)$ et $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro\,aug}}(\mathscr{O})$. Plus précisement, on remarquera le fait suivant

Remark 4.13. *Le produit tensoriel complété $A\widehat{\otimes}_{\widetilde{E}}\widetilde{P}$ est muni d'une structure de A-module augmenté qui en fait un objet de $\mathfrak{C}(A)$.*

Proof. Comme $\mathfrak{C}(A)$ est stable par conoyaux, il suffit de démontrer que $A\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}}\widetilde{P}$ est un objet de $\mathfrak{C}(A)$puisqu'on a la surjection naturelle (de $\mathscr{O}$-modules profinis)

$$A\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}}\widetilde{P} \twoheadrightarrow A\widehat{\otimes}_{\widetilde{E}}\widetilde{P}.$$

L'action induite de $A[G]$ sur $A\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}}\widetilde{P}$ est évidente. Soit $H \leqslant G$ compact ouvert de telle sorte que $\widetilde{P}$ soit un $\mathscr{O}[[H]]$-module profini, de manière compatible à l'action de $\mathscr{O}[G]$. D'après [9], lemma 7.7.2, l'on voit que $A\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}}\widetilde{P}$ est muni d'une action topologique de $A\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}}\mathscr{O}[[H]] \cong A[[H]]$ et donc d'une structure de $A[[H]]$-module profini. Par construction, cette action est compatible à l'action de $A[G]$ sur $A[H]$. $\square$

Le lemme qui suit sera crucial

Lemma 4.14. *Il existe un morphisme $\phi \in \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathfrak{A}}}(\widetilde{E}, A)$ et un isomorphisme $\iota : M \xrightarrow{\sim} A\widehat{\otimes}_{\phi,\widetilde{E}}\widetilde{P}$ dans $\mathfrak{C}(A)$ de telle sorte que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} A/\mathfrak{m}_A\widehat{\otimes}_A M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "id\otimes\iota", "\cong"'] & Q \\ A/\mathfrak{m}_A\widehat{\otimes}_A A\widehat{\otimes}_{\phi,\widetilde{E}}\widetilde{P} \arrow[r, equal] & \widetilde{E}/\widetilde{\mathfrak{m}}\widehat{\otimes}_{\widetilde{E}}\widetilde{P} \arrow[u, "\alpha^{univ}"'] \end{tikzcd}$$

soit commutatif (l'égalité en deuxième ligne étant donnée par l'isomorphisme résiduel $\widetilde{E}/\widetilde{\mathfrak{m}} \to A/\mathfrak{m}_A$).

Proof. Comme $\widetilde{P} \in \mathfrak{C}(\mathscr{O})$ est projectif, l'on a un diagramme commutatif dans $\mathfrak{C}(\mathscr{O})$

$$\begin{tikzcd} \widetilde{P} \arrow[r, two heads] \arrow[d, dotted, "\psi"', "\exists"] & Q \\ M \arrow[r, two heads] & A/\mathfrak{m}_A\widehat{\otimes}_A M \arrow[u, "\alpha"'] \end{tikzcd} \tag{3}$$

On affirme que

Claim : Le morphisme naturel A-linéaire (continu) défini par

$$\begin{aligned} A &\to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathscr{O})}(\widetilde{P}, M) \\ a &\mapsto [p \mapsto a\psi(p)] \end{aligned}$$

est un homéomorphisme (pour la topologie naturelle de $\widetilde{E}$-modules pseudo-compacts de A sur $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathscr{O})}(\widetilde{P}, M)$).

Notons d'abord que le morphisme est trivialement continu (car A est discret) et fermé (car A est compact et $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathscr{O})}(\widetilde{P}, M)$ est séparé). De plus, d'après le lemme 4.11, il suffira de prouver que le morphisme est injectif. Pour cela, il suffit de remarquer les isomorphismes naturels (de A-modules profini)

$$\begin{aligned} &\mathfrak{m}_A^i/\mathfrak{m}_A^{i+1}\widehat{\otimes}_A A/\mathfrak{m}_A = \mathfrak{m}_A^i/\mathfrak{m}_A^{i+1} \\ &\mathfrak{m}_A^i/\mathfrak{m}_A^{i+1}\widehat{\otimes}_A A/\mathfrak{m}_A\widehat{\otimes} M = \mathfrak{m}_A^i/\mathfrak{m}_A^{i+1} \otimes_A M/\mathfrak{m}_A M = \mathfrak{m}_A^i/\mathfrak{m}_A^{i+1} \otimes_{A/\mathfrak{m}} M/\mathfrak{m}_A M \end{aligned}$$

de telle sorte que l'on peut conclure via le lemme 4.10 (voir [6], lemme 3.24 pour plus de détails).

Ainsi, pour tout $b \in \widetilde{E}$, l'on pourra définir $\phi(b) \in A$ comme l'image inverse, via l'isomorphisme $A \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathscr{O})}(\widetilde{P}, M)$, de $\psi \circ b$. On vérifie aussitôt que ϕ est un morphisme d' $\mathscr{O}$ algèbres et la continuité de ϕ est triviale d'après la définition de la topologie canonique sur $\widetilde{E}$ et le fait que M soit de $\mathfrak{C}(\mathscr{O})$-longueur finie (lemme 4.10). De plus, l'isomorphisme ϕ respecte (tautologiquement) les structures d' $\widetilde{E}$-anneaux pseudocompacts sur A et $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathscr{O})}(\widetilde{P}, M)$. L'on peut maintenant utiliser le lemme 4.12 pour disposer d'un morphisme continu et $A[G]$-équivariant (donc, dans $\mathfrak{C}(A)$)

$$A\widehat{\otimes}_{\widetilde{E}}\widetilde{P} \overset{\iota^{-1}}{\to} M.$$

Grâce à la commutativité du diagramme 3, on vérifie que ι est bien l'isomorphisme cherché. □

Theorem 4.15. *Avec les notations précédentes, l'on a un isomorphisme fonctoriel (en A)*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\widetilde{E}, A)/\sim_{A^\times} \overset{\sim}{\to} \mathrm{Def}_Q(A)$$

(où l'on désigne par $\sim_{A^\times}$ la relation d'équivalence évidente donnée par la conjugaison par $A^\times$ sur le A-module $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\widetilde{E}, A)$).

Proof. Étant donné un objet $(A, \mathfrak{m}_A) \in \mathfrak{A}$, soit $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\widetilde{E}, A)$ comme dans le lemme 4.14. L'isomorphisme résiduel $\widetilde{E}/\widetilde{\mathfrak{m}} \to A/\mathfrak{m}_A$ induit, par composition, un isomorphisme

$$\alpha_\phi : A/\mathfrak{m}_A\widehat{\otimes}_A A\widehat{\otimes}_{\phi,\widetilde{E}}\widetilde{P} \to Q$$

(c'est la composée des flèches "en bas et à droite" du diagramme (3)), de telle sorte que la couple $(A\widehat{\otimes}_{\phi,\widetilde{E}}\widetilde{P}, \alpha_\phi)$ est une déformation de Q à A.

On se propose de démontrer que cette construction définit l'isomorphisme fonctoriel de l'enoncé. Le lemme 4.14 montre exactement que la flèche *fonctorielle* ainsi construite

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\widetilde{E}, A) \to \mathrm{Def}_Q(A)$$

est surjective.

Soient $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathfrak{A}}}(\widetilde{E}, A)$ tels que l'on ait un isomorphisme dans $\mathfrak{C}(A)$

$$\beta : A\widehat{\otimes}_{\phi_1,\widetilde{E}}\widetilde{P} \to A\widehat{\otimes}_{\phi_2,\widetilde{E}}\widetilde{P}$$

de telle sorte que le diagramme

$$\begin{tikzcd} A/\mathfrak{m}_A\widehat{\otimes}_A A\widehat{\otimes}_{\phi_1,\widetilde{E}}\widetilde{P} \arrow[r, "\alpha_{\phi_1}"'] & Q \\ A/\mathfrak{m}_A\widehat{\otimes}_A A\widehat{\otimes}_{\phi_2,\widetilde{E}}\widetilde{P} \arrow[u, "id_{A/\mathfrak{m}_A}\otimes\beta"] \arrow[ur, "\alpha_{\phi_2}"'] & \end{tikzcd} \tag{4}$$

soit commutatif.

Pour $i \in \{1,2\}$ soit $\psi_i : \widetilde{P} \to A/\mathfrak{m}_A\widehat{\otimes}_A A\widehat{\otimes}_{\phi_i,\widetilde{E}}\widetilde{P}$ le morphisme évident; il s'agit d'un morphisme dans $\mathfrak{C}(\mathscr{O})$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \widetilde{P} \arrow[r] \arrow[d] & Q \\ A\widehat{\otimes}_{\phi_1,\widetilde{E}}\widetilde{P} \arrow[r] & A/\mathfrak{m}_A\widehat{\otimes}_A A\widehat{\otimes}_{\phi_1,\widetilde{E}}\widetilde{P}. \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{5}$$

La commutativité des diagrammes 4 et 5 ainsi que la preuve du lemme 4.14 nous permet de déduire le diagramme commutatif naturel

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, dotted] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathscr{O})}(\widetilde{P}, A\widehat{\otimes}_{\phi_1,\widetilde{E}}\widetilde{P}) \arrow[d, "\beta\circ\_", "\wr"'] \\ A \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathscr{O})}(\widetilde{P}, A\widehat{\otimes}_{\phi_1,\widetilde{E}}\widetilde{P}) \end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales (isomorphismes) sont définies par $a \mapsto a\psi_i$; en particulier ψ_i est un générateur libre de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathscr{O})}(\widetilde{P}, \widehat{\otimes}_{\phi_1,\widetilde{E}}\widetilde{P})$. Comme β est un isomorphisme, l'on déduit l'existence de $u \in A^\times$ tel que l'on ait $u\psi_1 = \beta \circ \psi_2$. Une manipulation élémentaire à l'aide du diagramme commutatif ci-dessus nous donne l'égalité

$$\phi_2(b)u = u\phi_1(b)$$

pour tout $b \in \widetilde{E}$, ce que l'on voulait.

Il nous reste à montrer que si $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathfrak{A}}}(\widetilde{E}, A)$ vérifient $\phi_2 = u\phi_1 u^{-1}$ pour $u \in A^\times$ alors l'on dispose d'un isomorphisme de déformations

$$\beta : A\widehat{\otimes}_{\phi_1,\widetilde{E}}\widetilde{P} \to A\widehat{\otimes}_{\phi_2,\widetilde{E}}\widetilde{P}.$$

Pour cela, l'on note que la commutativité de

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}^\times \arrow[r] \arrow[d] & A^\times \arrow[d] \\ (\mathscr{O}/(\varpi))^\times \arrow[r, "\sim"] & (A/\mathfrak{m}_A)^\times \end{tikzcd}$$

et le fait que $\mathscr{O} \to \mathrm{Z}(A)$ nous permettent de supposer que $u \in 1 + \mathfrak{m}_A$. Cela permet de vérifier que le morphisme

$$\begin{aligned} \beta : A\widehat{\otimes}_{\phi_1,\widetilde{E}}\widetilde{P} &\to A\widehat{\otimes}_{\phi_2,\widetilde{E}}\widetilde{P} \\ a\widehat{\otimes}p &\mapsto au\widehat{\otimes}p \end{aligned}$$

est bien un isomorphisme de déformations. □

On en déduit immediatement

Corollary 4.16. *Soit $A \in \mathfrak{A}^{ab}$. Alors l'on a un isomorphisme (fonctoriel en A)*

$$\mathrm{Def}_Q(A) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathfrak{A}}}(\widetilde{E}^{ab}, A)$$

où $\widetilde{E}^{ab} \in \widehat{\mathfrak{A}}^{ab}$ est un représentant de la restriction du foncteur $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathfrak{A}}}(\widetilde{E}, \bullet)$ à la catégorie $\widehat{\mathfrak{A}}^{ab}$.

Digression "catégoriale". On se propose d'introduire deux lemmes du parfum "catégorial", qui joureont un rôle important pour les exemples de la section 5.

Soit $F : \mathfrak{A} \to \mathrm{Sets}$ un foncteur. Si $(A, \mathfrak{m}_A) \in \mathfrak{A}$ et $u \in A^\times$ la conjugaison par u induit un automorphisme (dans $\mathfrak{A}$) $ad(u) : A \to A$, de telle sorte que l'on a un automorphisme (dans Sets) $F(ad(u)) : F(A) \to F(A)$.

On dira que F est *stable par conjugaison* si $F(ad(u)) = id_{F(A)}$ pour tout objet $(A, \mathfrak{m}_A) \in \mathfrak{A}$ et toute unité $u \in A^\times$. D'après le théorème 4.15 on voit aussitôt que Def_Q est stable par conjugaison.

Si $(R, \mathfrak{m}_R) \in \widehat{\mathfrak{A}}$ on désigne par $h_R \in \mathrm{Fct}_{\mathfrak{A},\mathrm{Sets}}$ le foncteur $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathfrak{A}}}(R, \bullet)$. On écrit $F_R(A)$ pour dèsigner l'ensemble des classes de $A^\times$-conjugaison des éléments de $h_R(A)$, de telle sorte que l'on a un épimorphisme $h_R \Rightarrow F_R$ dans la catégorie $\mathrm{Fct}_{\mathfrak{A},\mathrm{Sets}}$.

Le lemme qui suit montre que F_R joue le rôle de l'immersion de Yoneda pour les foncteurs stables par conjugaison. Plus précisément

Lemma 4.17. *Soit* $F : \mathfrak{A} \to \mathrm{Sets}$ *un foncteur stable par conjugaison.*

On dispose d'une bijection fonctorielle (en R)

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fct}}(F_R, F) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} F(R/\mathfrak{m}_R^n)$$

qui associe à $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fct}}(F_R, F)$ *la limite du système projectif (filtrant) donné par* $\eta_{R/\mathfrak{m}_R^n}(R \twoheadrightarrow R/\mathfrak{m}_R^n)$.

Proof. La preuve est une variante de Yoneda. D'abord, l'on montre que si $R_n \in \mathfrak{A}$ l' épimorphisme naturel $h_{R_n} \Rightarrow F_R$ induit un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fct}}(F_{R_n}, F) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fct}}(h_{R_n}, F)$$

ce qui nous donne, par Yoneda, un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fct}}(F_{R_n}, F) \,\widetilde{F}\, (R_n).$$

Si l'on spécialise au cas $R_n \overset{\text{def}}{=} R/\mathfrak{m}_R^n$, la conclusion suit des isomorphismes naturels

$$\varprojlim_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fct}}(h_{R_n}, F) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fct}}(\varinjlim_{n\in\mathbf{N}} h_{R_n}, F)$$

et du fait que le morphisme naturel (fonctoriel en $T \in \mathfrak{A}$)

$$\varinjlim_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(R_n, T) \to \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathfrak{A}}}(\varprojlim_{n\in\mathbf{N}} R_n, T)$$

est bijectif (noter que $\mathfrak{m}_T$ est nilpotent, de telle sorte que le morphisme naturel est surjectif et l'injectivité est triviale). □

On déduit

Lemma 4.18. *Soient* $R, S \in \widehat{\mathfrak{A}}$ *et soit* $\eta : F_R \Rightarrow F_S$ *un isomorphisme (naturel de foncteurs).*

Alors l'on a un isomorphisme, unique à conjugaison par un élément de $R^\times$ *près, un isomorphisme* $S \to R$ *dans* $\widehat{\mathfrak{A}}$.

Proof. La preuve est détaillée dans [6], lemme 3.30. Remarquons d'ailleurs que le morphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathfrak{A}}}(S, R)/\sim_{R^\times} \to \varinjlim_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathfrak{A}}}(S, R/\mathfrak{m}_R^n)/\sim_{(R/\mathfrak{m}_R^n)^\times}$$

est bijectif car $(R/\mathfrak{m}_R^{n+1})^\times \twoheadrightarrow (R/\mathfrak{m}_R^n)^\times$ est surjective et R est séparé (et, bien évidemment, $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathfrak{A}}}(S, R) = \varinjlim_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathfrak{A}}}(S, R/\mathfrak{m}_R^n)$). □

5. Exemples

On se propose de calculer l'anneau de déformation universel pour (le dual de Pontryagin) des caractères de $\mathbf{Q}_p^\times$. Pour fixer les idées, on va prendre $\mathfrak{C}(\mathscr{O}) = \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro\,aug}}(\mathscr{O})$.

Lemma 5.1. *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupe profini, avec un ensemble fini de génerateurs (topologiques); soit* $Q = \mathscr{O}/(\varpi)$ *(muni de l'action augmentée triviale de G).*

Si $\mathcal{G}(p)$ *désigne le pro-p quotient maximal de* $\mathcal{G}$ *alors l'on a un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathrm{Def}_Q(A) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathfrak{A}}}(\mathscr{O}[[\mathcal{G}(p)^{op}]], A)/\sim_{A^\times}.$$

On a un résultat similaire avec $\mathcal{G}(p)^{ab}$ *en lieu de* $\mathcal{G}(p)^{op}$ *si A est commutatif.*

Proof. D'abord, on construit une flèche

$$\mathrm{Def}_Q(A) \to \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathfrak{A}}}(\mathscr{O}[[\mathcal{G}(p)^{op}]], A)/\sim_{A^\times}.$$

Soit (M, α) une classe de A-déformation de Q . Comme M est A-plat, il est topologiquement libre sur A (voir [7], exposé VII_B, 0.3.8). Comme $A/\mathfrak{m}_A \widehat{\otimes}_A M$ est de dimension 1 sur $A/\mathfrak{m}_A$ l'on déduit que M est un A-module libre de rang 1. Fixons $v \in M$ de telle sorte que l'on ait $\alpha(1 \widehat{\otimes} v) = 1_k$; ceci implique que v est un génerateur libre de M, de telle sorte que pour tout $g \in \mathcal{G}$ il existe, unique, $a_g \in A$ tel que l'on ait

$$gv = a_g v.$$

L'on vérifie que cela définit un morphisme continu (qui dépend du choix de l'élément $v \in M$)

$$\mathcal{G}^{op} \to A^\times;$$

le fait que Q soit munie de l'action triviale de $\mathcal{G}$ montre qu'il se factorise à travers l'injection $1 + \mathfrak{m}_A \hookrightarrow A^\times$.

Comme A est une $\mathscr{O}$-algèbre locale artinienne, finie sur $\mathscr{O}$, l'on voit que $1 + \mathfrak{m}_A$ est un p-groupe, de telle sorte que l'on obtient un morphisme continu

$$\mathcal{G}(p)^{op} \to A^\times.$$

D' après la propriété universelle de l'algèbre du groupe complétée (voir [9], §7.1), l'on obtient un morphisme continu

$$\mathscr{O}[[\mathcal{G}(p)^{op}]] \to A.$$

Notons que ce morphisme ne dépend pas du choix de $v \in M$, à conjugaison par un élément de $1 + \mathfrak{m}_A$ près. D'ailleurs, il ne dépend pas du choix du choix du représentant de la classe de (M, α), à conjugaison par un élément de $A^\times$ près, de telle sorte que la correspondence ainsi définie nous donne une flèche

$$\mathrm{Def}_Q(A) \to \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathfrak{A}}}(\mathscr{O}[[\mathcal{G}(p)^{op}]], A)/\sim_{A^\times}.$$

Pour la flèche réciproque, considérons un morphisme $\phi : \mathscr{O}[[\mathcal{G}(p)]]^{op} \to A$ dans $\widehat{\mathfrak{A}}$. Comme $\mathscr{O}[[\mathcal{G}(p)]]$ est trivialement un module profini sur $\mathscr{O}[[\mathcal{G}(p)]]^{op}$ (et sur $\mathscr{O}[[\mathcal{G}]]$), on peut considerer $A \widehat{\otimes}_{\phi, \mathscr{O}[[\mathcal{G}(p)]]^{op}} \mathscr{O}[[\mathcal{G}(p)]]$ qui est un objet de $\mathfrak{C}(A)$. Comme le morphisme ϕ est local et l'idéal maximal de $\mathscr{O}[[\mathcal{G}(p)]]$ est (topologiquement) engendré par les éléments $(g-1)$ pour $g \in \mathcal{G}(p)$, l'on voit aisément que l'on a un isomorphisme naturel dans $\mathfrak{C}(k)$:

$$A/\mathfrak{m}_A \widehat{\otimes}_A A \widehat{\otimes}_{\phi, \mathscr{O}[[\mathcal{G}(p)]]^{op}} \mathscr{O}[[\mathcal{G}(p)]] \xrightarrow{\sim} k.$$

Enfin, $A \widehat{\otimes}_{\phi, \mathscr{O}[[\mathcal{G}(p)]]^{op}} \mathscr{O}[[\mathcal{G}(p)]]$ est un A-module libre de rang 1, donc plat sur A et notons que la flèche ainsi construite

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathfrak{A}}}(\mathscr{O}[[\mathcal{G}(p)^{op}]], A) \to \mathrm{Def}_Q(A)$$

se factorise à travers la projection $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathfrak{A}}}(\mathscr{O}[[\mathcal{G}(p)^{op}]], A) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathfrak{A}}}(\mathscr{O}[[\mathcal{G}(p)^{op}]], A)/\sim_{A^\times}$, ce qui donne le résultat. □

Remark 5.2. *Notons que l'on aurait pu vérifier que la flèche*

$$\mathrm{Def}_Q(A) \to \mathrm{Hom}^{\mathscr{C}^0}_{Gp}(\mathcal{G}, 1 + \mathfrak{m}_A)/\sim_{A^\times}$$

(construite dans la première partie de la preuve) est en fait bijective. *Il s'agit de construire la flèche réciproque, qui associe à un morphisme continu de groupes $f : \mathcal{G} \to 1 + \mathfrak{m}_A$ la déformation (M_f, α_f) définie de la manière suivante: $M = A$ en tant que A-module, muni de l'action (continue) de $\mathcal{G}$ définie par f, et α_f étant l'isomorphisme résiduel $\mathscr{O}/(\varpi) \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{m}_A$.*

Lemma 5.3. *Soit $G = \mathbf{Q}_p^\times$ et $\chi : \mathbf{Q}_p^\times \to k^\times$ un caractère (continu).*
Si $p > 2$ alors

$$\mathrm{Def}_{\chi^\vee}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathfrak{A}}}(\mathscr{O}[[X,Y]], A)/\sim_{A^\times}.$$

Proof. Si $\widetilde{\chi} : G \to \mathscr{O}^\times$ est un rélèvement de χ, on a un isomorphisme

$$\begin{aligned}\mathrm{Def}_1(A) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Def}_{\chi^\vee}(A)\\ (M,\alpha) &\longmapsto (M\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}}\widetilde{\chi}^\vee, \alpha\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}} id)\end{aligned}$$

ce qui nous permet de supposer que $(\chi)^\vee$ est triviale. En utilisant les propriétés universelles de la complétion pro-p $\widehat{\mathcal{G}}^p$ de G, de l'algèbre du groupe complétée, ainsi que le fait que tout morphisme continu d'un pro-p-groupe vers $A^\times$ se factorise à travers $1 + \mathfrak{m}_A$, l'on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{Gp}^{\mathscr{C}^0}(\mathcal{G}, 1+\mathfrak{m}_A) &= \mathrm{Hom}_{Gp}^{\mathscr{C}^0}(\widehat{\mathcal{G}}^p, 1+\mathfrak{m}_A)\\ &= \mathrm{Hom}_{Gp}^{\mathscr{C}^0}(\widehat{\mathcal{G}}^p, A^\times)\\ &= \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathfrak{A}}}(\mathscr{O}[[\widehat{\mathcal{G}}^p]], A).\end{aligned}$$

L'on conclut, grâce à la remarque 5.2, qu'on dispose d'une bijection naturelle

$$\mathrm{Def}_1(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathfrak{A}}}(\mathscr{O}[[\widehat{\mathcal{G}}^p]], A)/\sim_{A^\times}$$

et grâce aux isomorphismes naturels

$$\mathscr{O}[[\mathbf{Z}_p^2]] \cong \mathscr{O}[[\mathbf{Z}_p]]\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}}\mathscr{O}[[\mathbf{Z}_p]] \cong \mathscr{O}[[X]]\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}}\mathscr{O}[[Y]] \cong \mathscr{O}[[X,Y]]$$

on est ramené à démontrer que la completion pro-p de G est $\mathbf{Z}_p^2$. Pour cela, l'on remarque que $G = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/(p-1) \times \mathbf{Z}_p$ (topologiquement); comme G est abélien, l'on a un isomorphisme (de groupes topologiques)

$$G \cong \coprod \mathbf{Z} \coprod \mathbf{Z}/(p-1) \coprod \mathbf{Z}_p$$

(produits et co-produits finis coïncident pour les groupes abéliens), de telle sorte que $\widehat{\mathcal{G}}^p = \widehat{\mathbf{Z}}^p \times \mathbf{Z}_p = \mathbf{Z}_p^2$, comme on le voulait. □

L'exemple qui suit résume les résultats prinipaux de l'exposé:

Lemma 5.4. *Soit $G = \mathbf{Q}_p^\times$ $\chi : G \to k^\times$ un caractère continu et $S \stackrel{\text{def}}{=} \chi^\vee$.*

Si $p > 2$ alors l'on a des isomorphismes canoniques $\widetilde{E} \cong \mathscr{O}[[X,Y]]$ et $E \cong k[[X,Y]]$. De plus, $\widetilde{P}$ est un $\widetilde{E}$-module libre de rang 1, donc, en particulier, sans $\mathscr{O}$-torsion.

Proof. D'après le lemme 5.3, le lemme 4.18 et le théorème 4.15 il suffit de vérifier que $Q \stackrel{\text{def}}{=} S$ jouit des propriétés (H0),...,(H5). Comme Q est un objet irréductible dans $\mathfrak{C}(k)$, les propriétés (H0), (H1), (H2), (H5) sont vérifiées de manière triviale.

La propriété (H3) est vérifiée grâce à l'argument classique suivant. Soit $\tau \in \mathrm{Rep}_G^{sm}$ un objet irréductible et

$$0 \to \chi \to V \to \tau \to 0 \tag{6}$$

une suite exacte dans Rep_G^{sm}. Pour tout $g \in G$, l'application

$$\begin{aligned}\phi_g : V &\to V\\ v &\mapsto gv - \chi(g)v\end{aligned}$$

est un morphisme dans Rep_G^{sm} (car G est commutatif). Si $\phi_g = 0$ pour tout $g \in G$, la suite est trivialement scindée car G agit sur V par le caractère χ.

Sinon, l'on dispose d'un monomorphisme $V/\chi \hookrightarrow V$. Lorsque $\chi \not\cong \tau$, l'exactitude de la suite (6) montre que la flèche composée $V/\chi \hookrightarrow V \to \tau$ est un isomorphisme, d'où un scindage.

La propriété (H4) suit des isomorphismes

$$\mathrm{Ext}^1_G(\chi,\chi) \cong \mathrm{Ext}^1_G(1,1) \cong \mathrm{Hom}^{\mathscr{C}^0}_{Gps}(G,k) = \mathrm{Hom}^{\mathscr{C}^0}_{Gps}(\mathbf{Z},k)^2$$

qui est de dimension 2.

Enfin, l'on a

$$\widetilde{E}\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}}\mathscr{O}/(\varpi) = \mathscr{O}[[X,Y]]\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}}\mathscr{O}/(\varpi) = (\mathscr{O}/(\varpi))[[X,Y]]$$

et, comme Q est de dimension 1 sur k et $\widetilde{P}$ est topologiquement libre, l'on conclut que $\widetilde{P}$ est un $\widetilde{E}$-module libre de rang 1. □

On déduit aisément

Corollary 5.5. *Soit* $S' \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{C}(k))$.

i) *si* $S' \ncong \chi^\vee$ *alors* $\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{C}(k)}(\chi^\vee, S') = 0$ *pour tout* $n \in \mathbf{N}$;

ii) *si* $S' \cong \chi^\vee$ *alors*

$$\dim(\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{C}(k)}(\chi^\vee, S') = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \geqslant 3 \\ 1 & \text{si} \quad n = 2 \\ 2 & \text{si} \quad n = 1. \end{cases}$$

Proof. Il s'agit d'appliquer le foncteur exacte $\bullet\widehat{\otimes}P$ à la suite exacte de E-modules pseudocompacts:

$$0 \to k[[X,Y]] \xrightarrow{\phi_1} k[[X,Y]]^2 \xrightarrow{\phi_2} k[[X,Y]] \to k \to 0$$

où l'on définit $\phi_1(f) \stackrel{\text{def}}{=} (Xf, YF)$ et $\phi_2(f,g) \stackrel{\text{def}}{=} Yf - Xg$. L'on obtient ainsi une résolution projective de $\chi^\vee$

$$0 \to P \to P^2 \to P \to \chi^\vee \to 0$$

ce qui permet de conclure. □

References

1 [Alp] Alperin, *Local representation theory*

2 [DDMS] Dixon, Du Sautoy, Mann, Segal, *p-Adic Analytic Groups*

3 [Eme] Emerton, M. *Ordinary parts-I*

4 [Gab] Gabriel, *Des catégories abeliénnes*

5 [Pass] Passman, *A course in ring theory*

6 [Pask] Paskunas, *The image of Colmez's Motreal functor*

7 [SGA3] Demazure, Grothendieck, *Séminaire de géométrie algébrique 3-I*

8 [Shap] Shapira, P., Kashiwara, M *Categories and sheaves*

9 [Wil] Wilson *Profinite groups*

Stefano Morra stefano.morra@inwind.it
Université de Versailles, 45 Avenue des États-Unis, 78035 Versailles, France