Extensions de représentations supersingulières

Yongquan HU

10 novembre 2010

Introduction

Le but de cet exposé est de montrer le théorème suivant.

Théorème 0.1. *Soit π une représentation irréductible supersingulière de $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $k = \overline{\mathbb{F}}_p$ avec caractère central $\xi : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$ et soit $V \in \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi, \pi)$ une extension non triviale de π par π. Alors*

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi, V) \leq 3.$$

Remarquons que l'on a la suite exacte longue

$$\mathrm{Hom}_G(\pi,\pi) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_G(\pi,V) \to \mathrm{Hom}_G(\pi,\pi) \to \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi,\pi) \to \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi,V) \to \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi,\pi) \to \mathrm{Ext}^2_{G,\xi}(\pi,\pi)$$

qui nous donne que $\mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi, V)$ est de dimension ≥ 2 puisque $\dim \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi,\pi) = 3$. De plus cette dernière égalité signifie que le théorème n'est pas trivial.

La stratégie de la démonstration est la suivante :

1. Se réduire à montrer l'énoncé pour V dans un sous-espace R de dimension 2 de $\mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi,\pi)$.
2. Traiter le cas régulier (i.e. $0 < r < p-1$ si $\pi = \pi(r, 0, \eta)$).
3. Définir R et montrer le résultat dans le cas Iwahori (i.e. $r \in \{0, p-1\}$).

1 Réduction

Soient a une classe d'extension dans $\mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi,\pi)$ et V_a l'extension correspondante :

$$0 \to \pi \to V_a \xrightarrow{\alpha} \pi \to 0. \tag{1}$$

Soit $\partial_1 : \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi,\pi) \to \mathrm{Ext}^2_{G,\xi}(\pi,\pi)$ le morphisme naturel induit en appliquant $\mathrm{Hom}_G(\pi, *)$ à la suite exacte (1). Explicitement, si $b \in \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi,\pi)$ et si $0 \to \pi \xrightarrow{\beta} V_b \to \pi \to 0$ est l'extension correspondante, alors $\partial_1(b)$ correspond, via l'équivalence de Yoneda, à la suite exacte suivant :

$$0 \to \pi \to V_a \xrightarrow{\beta\circ\alpha} V_b \to \pi \to 0.$$

On écrira dans la suite $\partial_1(b) := a \circ b$ pour souligner la dépendance de ∂_1 en a.

De même, soit $\partial_2 : \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi,\pi) \to \mathrm{Ext}^2_{G,\xi}(\pi,\pi)$ le morphisme naturel induit en appliquant $\mathrm{Hom}_G(*, \pi)$ à la suite (1), alors $\partial_2(b) := b \circ a$ correspond à

$$0 \to \pi \to V_b \to V_a \to \pi \to 0.$$

Ces notations sont compatible puisqu'on a évidemment $\partial_1(b) = \partial_2(a)$ lorsque $a = b$.

Proposition 1.1. *On a $a \circ a = 0$. Par conséquent $a \circ b = -b \circ a$.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que

$$a \in \mathrm{Im}\big(\mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi, V_a) \to \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi,\pi)\big),$$

i.e. qu'il existe une G-représentation X de longueur 3, unisérielle, dont la filtration par le G-socle est

$$X \cong \pi \overset{a}{-} \pi \overset{a}{-} \pi.$$

On va montrer l'énoncé dual : pour toute extension $a^\vee$ de $S := \pi^\vee$ par S dans la catégorie duale $\mathfrak{C}(\mathcal{O})$, il existe un élément $X^\vee$ de longueur 3 unisérielle de la forme :

$$X^\vee \cong S \overset{a^\vee}{-} S \overset{a^\vee}{-} S.$$

On peut voir $a^\vee$ comme une déformation de S dans $k[\epsilon] = k[x]/x^2$, donc il correspond à un morphisme d'anneaux d'après le théorème 3.25 [3] :

$$\phi \in \mathrm{Hom}(\widetilde{E}, k[x]/x^2) \cong \mathrm{Hom}(E, k[x/x^2]),$$

où $\widetilde{E} = \mathrm{End}(\widetilde{P})$ et $E = \widetilde{E} \otimes k$, avec $\widetilde{P} \twoheadrightarrow S$ une enveloppe projective dans $\mathfrak{C}(\mathcal{O})$. Le lemme 1.2 ci-dessous montre que le morphisme naturel $\mathrm{Hom}(E, k[x]/x^3) \to \mathrm{Hom}(E, k[x]/x^2)$ est surjectif. On peut donc relever ϕ en un morphisme $\phi' : E \to k[x]/x^3$, qui donnera une déformation $X^\vee$ de S dans $k[x]/x^3$. Alors $X^\vee$ vérifie la condition demandée puisque d'une part $X^\vee \cong a^\vee \pmod{x^2}$ d'autre part $X^\vee$ contient le sous-module $(x)X^\vee$ qui est isomorphe à $a^\vee$. □

Lemme 1.2. *(i)* $E^{ab} \cong k[[x_1, x_2, x_3]]$.
(ii) Le morphisme $\mathrm{Hom}(E, k[x]/x^3) \to \mathrm{Hom}(E, k[x]/x^2)$ *est surjectif.*

Démonstration. Evidemment il suffit de montrer (i). Rappelons qu'on a une surjection $E^{ab} \twoheadrightarrow k[[x_1, x_2, x_3]]$. Or, on sait que $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 3$ où $\mathfrak{m}$ désigne l'idéal maximal de E^{ab}, le morphisme est donc un isomorphisme. □

Lemme 1.3. *Soit a une classe d'extension fixée dans* $\mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi, \pi)$. *Alors*

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi, V_a) \le 3 \Longleftrightarrow \dim \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(V_a, \pi) \le 3.$$

Démonstration. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \dim \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi, V_a) \le 3 & \Longleftrightarrow & \dim \mathrm{Ker}\partial_1 \le 1 \\ & \Longleftrightarrow & a \circ b \neq 0,\ \forall b \notin ka \ \ \text{(prop. 1.1)} \\ & \Longleftrightarrow & b \circ a \neq 0,\ \forall a \notin kb \ \ \text{(prop. 1.1)} \\ & \Longleftrightarrow & \dim \mathrm{Ker}\partial_2 \le 1 \\ & \Longleftrightarrow & \dim \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(V_a, \pi) \le 3. \end{array}$$

□

Corollaire 1.4. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) pour tout $a \in \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi, \pi)$, *on a* $\dim \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi, V_a) \le 3$ *;*

(ii) il exite un sous-espace R de $\mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi, \pi)$ *tel que* $\forall a \in R$, *on ait*

$$\textit{soit} \quad \dim \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi, V_a) \le 3, \quad \textit{soit} \ \dim \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(V_a, \pi) \le 3.$$

Démonstration. L'implication (i)$\Rightarrow$ (ii) suit le lemme 1.3. Supposons (ii) et montrons que $\mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi, V_a) \le 3$ pour tout a. D'après le lemme 1.3, on peut supposer que $a \notin R$. Si $\mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi, V_a) > 3$, alors $\dim \mathrm{Ker}\partial_1 > 1$ et il existe $b \notin ka$ tel que $a \circ b = 0$, ou de manière équivalente $b \circ a = 0$ par la proposition 1.1. On doit avoir $b \notin R$, car $b \circ c \neq 0$ pour tout $b \in R$ et tout $c \notin kb$. Puis, comme R est de codimension 1 dans $\mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi, \pi)$, il existe $\lambda \in k$ tel que $b' := b - \lambda a$ appartient à R, et on a alors $b' \circ a = 0$ avec $a \notin kb'$, ce qui est impossible. □

2 Le cas regulier

Écrivons $\pi \cong \pi(r,0,\eta)$ avec $0 \leq r \leq p-1$ et $\sigma_r = \mathrm{Sym}^r\overline{\mathbb{F}}_p^2$. On suppose que $\eta = 1$ pour simplifier. Rappelons que $\mathrm{soc}_K\pi = \sigma_r \oplus (\sigma_{p-1-r} \otimes \det^r)$ et que $\mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi,\pi)$ contient

– dans le cas regulier, un sous-espace de dimension 2

$$R = \{V_1 = \text{c-Ind}_{KZ}^G\sigma_r/T^2,\ V_2 = \text{c-Ind}_{KZ}^G(\sigma_{p-1-r} \otimes \det^r)/T^2\};$$

– dans le cas Iwahori, un sous-espace de dimension 1 : $\{V_1 = \text{c-Ind}_{KZ}^G\sigma_2/T^2 \cong \text{c-Ind}_{KZ}^G\sigma_{p-1}/T^2\}$.

En appliquant $\mathrm{Hom}_G(*,\pi)$ à la suite (dans tous les deux cas)

$$0 \to \text{c-Ind}_{KZ}^G\sigma_r \xrightarrow{T^2} \text{c-Ind}_{KZ}^G\sigma_r \to V_1 \to 0,$$

on trouve

$$\mathrm{Hom}_G(V_1,\pi) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_{KZ}^G\sigma_r,\pi) \to \mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_{KZ}^G\sigma,\pi) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(V_1,\pi) \to \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\text{c-Ind}_{KZ}^G\sigma,\pi).$$

Or, on dispose de l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_{KZ}^G\sigma_r,\pi) \cong \mathrm{Hom}_K(\sigma_r,\pi)$ par réciprocité de Frobenius, et l'isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\text{c-Ind}_{KZ}^G\sigma_r,\pi) \cong \mathrm{Ext}^1_{K,\xi}(\sigma_r,\pi)$$

puisque la restriction $\underline{\mathrm{Rep}}_{G,\xi} \to \underline{\mathrm{Rep}}_{K,\xi}$ preserve les objets injectifs. On déduit alors la suite exacte suivante :

$$0 \to \mathrm{Hom}_K(\sigma_r,\pi) \to \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(V_1,\pi) \to \mathrm{Ext}^1_{K,\xi}(\sigma_r,\pi).$$

Pour notre but, sachant que $\dim \mathrm{Hom}_K(\sigma_r,\pi) = 1$, il reste à contrôler la dimension de l'espace $\mathrm{Ext}^1_{K,\xi}(\sigma_r,\pi)$.

Théorème 2.1. *(i) Dans tous les deux cas, Il existe une décomposition K-équivariante $\pi \cong \pi_r \oplus \pi_{p-1-r}$, telle que*

$$\mathrm{soc}_K\pi_r \cong \sigma_r, \quad \mathrm{soc}_K\pi_{p-1-r} \cong \sigma_{p-1-r} \otimes \det^r.$$

(ii) On a $\dim \mathrm{Ext}^1_{K,\xi}(\sigma_r,\pi_r) = \dim \mathrm{Ext}^1_{K,\xi}(\sigma_r,\pi_{p-1-r}) = 1$. Donc

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{K,\xi}(\sigma_r,\pi) = 2.$$

Démonstration. (i) Voir la proposition 4.12 [2]. Il correspond au fait que $\mathrm{soc}_K\pi \cong (\sigma_r \oplus \sigma_{p-1-r} \otimes \det^r)$.

(ii) Par symétrie, il suffit de considérer l'espace $\mathrm{Ext}^1_{K,\xi}(\sigma,\pi_r)$ avec $\sigma \in \{\sigma_r, \sigma_{p-1-r} \otimes \det^r\}$. Le point clef de la preuve est de montrer l'existence d'une sous-représentation W_r de π_r telle que le morphisme naturel

$$\mathrm{Ext}^1_{K,\xi}(\sigma,W_r) \to \mathrm{Ext}^1_{K,\xi}(\sigma,\pi_r)$$

soit un isomorphisme, et après de déterminer la dimension de $\mathrm{Ext}^1_{K,\xi}(\sigma,W_r)$. Ici, on se contentera de construire explicitement W_r :

– si $r = 0$, alors $W_r = \sigma_0 - \sigma_{p-3} \otimes \det$;

– si $0 < r < p-3$, alors $W_r = \sigma_r - \sigma_{p-3-r} \otimes \det^r$;

– si $r = p-2$, alors $W_r = \sigma_{p-2}$;

– si $r = p-1$, alors $W_r = \sigma_{p-1} - \sigma_{p-3} \otimes \det$.

□

Le théorème nous permet de conclure dans le cas regulier. Dans le cas Iwahori, on doit trouver une autre classe d'extension V dans $\mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi,\pi)$ telle que $\mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi,V)$ soit de dimension ≤ 3.

Remarque 2.2. *Lorsque $r = p-1$, on a en fait l'isomorphisme :*

$$\mathrm{Ext}^1_{K,\xi}(\sigma_{p-1},\sigma_{p-1}) \cong \mathrm{Ext}^1_{K,\xi}(\sigma_{p-1},W_{p-1}),$$

autrement dit, l'extension non triviale $0 \to \pi_{p-1} \to * \to \sigma_{p-1} \to 0$ est induite par l'extension $0 \to \sigma_{p-1} \to e \to \sigma_{p-1} \to 0$. Ce fait sera utilisé au §3.

3 Le cas Iwahori

On suppose que $r \in \{0, p-1\}$, i.e. on est dans le cas Iwahori. Rappelons que l'espace $\mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi, \pi)$ est de dimension 3, contenant une classe d'extension $V_1 = \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma_0 / T^2 \cong \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma_{p-1}/T^2$. Explicitement, les deux autres classes se décrivent comme suite :

– $V_2|_K \cong (\pi_0 - \pi_{p-1}) \oplus (\pi_{p-1} - \pi_0)$.

– $V_3|_K \cong (\pi_0 - \pi_0) \oplus (\pi_{p-1} - \pi_{p-1})$.

On pose $R = \{V_1, V_2\}$. On a montré le résultat pour V_1 et par le même argument, en appliquant $\mathrm{Hom}_G(*, V_2)$ à la suite

$$0 \to \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma_{p-1} \xrightarrow{T} \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma_{p-1} \to \pi \to 0$$

on trouve

$$0 \to \mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma_{p-1}, V_2) \to \mathrm{Ext}^1_G(\pi, V_2) \to \mathrm{Ext}^1_G(\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma_{p-1}, V_2).$$

Autrement dit, on obtient la suite exacte :

$$\mathrm{Hom}_K(\sigma_{p-1}, V_2) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi, V_2) \to \mathrm{Ext}^1_{K,\xi}(\sigma_{p-1}, V_2).$$

Comme $\mathrm{Hom}_K(\sigma_{p-1}, V_2) = \mathrm{Hom}_K(\sigma_{p-1}, \pi)$ est de dimension 1, pour notre but, il reste à montrer que

$$\dim \mathrm{Ext}^1_K(\sigma_{p-1}, V_2) = \dim \mathrm{Ext}^1_K(\sigma_{p-1}, V_2^+) + \dim \mathrm{Ext}^1_K(\sigma_{p-1}, V_2^-) = 2$$

où on a écrit $V_2^+ \cong \pi_0 - \pi_{p-1}$ et $V_2^- = \pi_{p-1} - \sigma_0$ de telle sorte que $V_2|_K = V_2^+ \oplus V_2^-$. Le théorème 2.1(ii) assure que

$$\dim \mathrm{Ext}^1_K(\sigma_{p-1}, V_2^-) \leq 2,$$

il suffit donc de montrer :

Proposition 3.1. $\mathrm{Ext}^1_{K,\xi}(\sigma_{p-1}, V_2^+) = 0$.

Démonstration. En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_K(\sigma_{p-1}, *)$ à la suite exacte $0 \to \pi_0 \to V_2^+ \to \pi_{p-1} \to 0$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}_K(\sigma_{p-1}, \pi_0) \to \mathrm{Hom}_K(\sigma_{p-1}, V_2^+) \to \mathrm{Hom}_K(\sigma_{p-1}, \pi_{p-1}) \\ \to \mathrm{Ext}^1_{K,\xi}(\sigma_{p-1}, \pi_0) \to \mathrm{Ext}^1_{K,\xi}(\sigma_{p-1}, V_2^+) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Ext}^1_{K,\xi}(\sigma_{p-1}, \pi_{p-1}). \end{aligned}$$

et une analyse facile sur les dimensions donne que ϕ est injectif. Supposons $\mathrm{Ext}^1_{K,\xi}(\sigma_{p-1}, V_2^+) \neq 0$ et soit $0 \to V_2^+ \to E \to \sigma_{p-1} \to 0$ une extension non triviale. Le fait que ϕ est injectif se traduit à dire que la suite induite modulo π_0 :

$$0 \to \pi_{p-1} \to E/\pi_0 \to \sigma_{p-1} \to 0$$

est non scindée. On a remarqué (rem. 2.2) l'isomorphisme $\mathrm{Ext}^1_{K,\xi}(\sigma_{p-1}, \sigma_{p-1}) \cong \mathrm{Ext}^1_{K,\xi}(\sigma_{p-1}, \pi_{p-1})$, c'est-à-dire E/π_0 contient une sous-représentaiton e qui est isomorphe à l'unique extension non triviale de σ_{p-1} par σ_{p-1}. Prenant l'image réciproque de e dans E, on obtient enfin une K-extension de la forme $0 \to \pi_0 \to * \to e \to 0$ qui, d'après le théorème 2.1, contient une sous-représentation dont la filtration par le K-socle est de la forme

$$\sigma_0 - \sigma_{p-3} \otimes \det - e.$$

Enfin, comme $\mathrm{Ext}^1_{K,\xi}(\sigma_{p-1}, \sigma_0) = 0$, le résultat se déduira de la proposition suivante. □

Proposition 3.2. *Il n'existe pas de K-représentation de longueur 3, unisérielle, avec la filtration par K-socle de la frome :*

$$\sigma_{p-3} \otimes \det - \sigma_{p-1} - \sigma_{p-1}.$$

3.1 Demonstration de 3.2

Notons $H = \{\left(\begin{smallmatrix} [\lambda] & 0 \\ 0 & [\mu] \end{smallmatrix}\right),\ \lambda, \mu \in \mathbb{F}_p^\times\}$, $U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $U^s = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ p\mathbb{Z}_p & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et I le sous-groupe d'Iwahori. Soit α le caractère lisse de I donné par

$$\alpha(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)) := ad^{-1}.$$

Tout caractère χ de I étant trivial sur I_1, le pro-p-sous-groupe d'Iwahori, on peut le voir comme caractère de H qui est isomorphe à I/I_1.

Lemme 3.3. *Soient χ, χ' deux caractères lisses de I.*

(i) On a $\mathrm{Ext}^1_{HU}(\chi', \chi) = 0$ si $\chi' \neq \chi\alpha^{-1}$, et

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{HU}(\chi\alpha^{-1}, \chi) = 1.$$

(ii) On a $\mathrm{Ext}^1_{HU^s}(\chi', \chi) = 0$ si $\chi' \neq \chi\alpha$, et

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{HU^s}(\chi\alpha, \chi) = 1.$$

Démonstration. Il suffit de montrer (i), (ii) étant analogue. En tant que caractères de U, on a $\chi \cong \chi' \cong \mathbb{1}$, donc

$$\mathrm{Ext}^1_U(\chi', \chi) \cong \mathrm{Ext}^1_U(\mathbb{1}, \mathbb{1}) \cong \mathrm{Hom}(U, k) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p, k)$$

d'où $\dim \mathrm{Ext}^1_U(\chi', \chi) = 1$. Comme H est un groupe fini d'ordre premier à p, cela implique qu'il existe (pour χ fixé) un unique caractère χ' tel que $\mathrm{Ext}^1_{HU}(\chi', \chi)$ soit non nul. Puis, en utilisant la formule suivante :

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & b(d/a) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

on trouve facilement que $\chi' = \chi\alpha^{-1}$. □

Corollaire 3.4. *(i) On a $\mathrm{Ext}^1_{HU}(\mathbb{1}, \sigma_{p-1}) = 0$.*

(ii) On a $\dim \mathrm{Ext}^1_{HU}(\mathbb{1}, \sigma_{p-3} \otimes \det) \leq 1$ (en fait $= 1$).

Démonstration. (i) La représentation σ_{p-1} admet la base canonique $\{X^{p-1}, X^{p-2}Y, \ldots, XY^{p-2}, Y^{p-1}\}$. Le sous-espace M de σ_{p-1} engendré par les vecteurs $\{X^{p-1}, X^{p-2}Y, \ldots, XY^{p-2}\}$ est stable par HU et donne une suite exacte de HU-représentation

$$0 \to M \to \sigma_{p-1} \to \mathbb{1} \to 0.$$

De plus, on vérifie que M est de multiplicité 1, donc

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{HU}(\mathbb{1}, M) \leq 1$$

d'après le lemme 3.3 (i). Maintenant, soit E une extension dans $\mathrm{Ext}^1_{HU}(\mathbb{1}, \sigma_{p-1})$, on a alors

$$0 \to M \to E \to \mathbb{1} \oplus \mathbb{1} \to 0$$

qui est forcément scindée, d'où l'énoncé.

(ii) On vérifie que $\sigma_{p-3} \otimes \det$ est de multiplicité 1 comme représentation de H, donc l'énoncé suit le lemme 3.3 (i). □

Lemme 3.5. *(Lemma 6.18 [3]) Soit e une extension non triviale de σ_{p-1} par σ_{p-1}. Alors la suite induite*

$$0 \to \sigma_{p-1}^U \to e^U \to \sigma_{p-1}^U \to 0$$

est exacte. De plus, on peut choisir une base $\{v, w\}$ pour e^U vérifiant la condition

$$\left(\begin{smallmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)w - w = v. \tag{2}$$

Démonstration. Si la suite du lemme n'est pas exacte, i.e. si $\dim e^U = 1$, alors on aurait une extension de HU-représentations

$$0 \to \sigma_{p-1}|_U \to e' \to \sigma_{p-1}^U \to 0.$$

Or, σ_{p-1}^U est de dimension 1 isomorphe à $\mathbb{1}$ comme HU-représentation, donc le résultat suit le corollaire 3.4 (i).

Soit w un vecteur de e fixé par U qui n'est pas dans la sous-représentation σ_{p-1} de e. Alors w engendre e sous l'action de K puisque e est non scindée. Cela implique que w n'est pas fixé par I_1, car sinon $\langle K \cdot w\rangle$ serait une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$. Par ailleurs, on remarque que w est fixé par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ p^2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, parce que σ_{p-1} est triviale sur $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et qu'on a $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ p^2 & 1 \end{smallmatrix}\right)-1 = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{smallmatrix}\right)-1\right)^p$ dans $k[G]$.

Posons $v := \left(\begin{smallmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)w - w$. Par la formule suivante

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)= \left(\begin{smallmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & b/(1+p) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \tag{3}$$

on voit que v est fixé par U. Comme e^U est de dimension 2, il suffit de vérifier que v est non nul. Si $v = 0$, alors w est fixé par le groupe $\left(\begin{smallmatrix} 1+p\mathbb{Z}_p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ puisque $\left(\begin{smallmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ l'engendre topologiquement. Dans ce cas, w ne peut pas être fixé par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{smallmatrix}\right)$, car on a vu qu'il n'est pas fixé par I_1. Posons $v' := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{smallmatrix}\right)w - w \neq 0$. Alors v' appartient à σ_{p-1} (le sous-représentation de e). En utilisant le fait que w est fixé par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ p^2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, on trouve de la formule :

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{smallmatrix}\right)= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \frac{p}{1+pb} & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1+pb & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+pb} \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & \frac{b}{1+pb} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

que v' est fixé par U, donc appartient à kv. Cela donne une contradiction en tenant compte de l'action de H puisque $kv \cong \mathbb{1}$ et $kv' \cong \alpha^{-1}$ (lemme 3.3). On obtient donc $v \neq 0$. $\square$

Lemme 3.6. *Soit $0 \to \sigma_{p-3} \otimes \det \to \epsilon \to \sigma_{p-1} \to 0$ une extension non triviale, alors $\epsilon^U = (\sigma_{p-3} \otimes \det)^U$ est de dimension 1.*

Démonstration. La démonstration est un peu différente que celle du lemme 3.5. Soit $v \in \epsilon^U$ un vecteur relevant $\bar{v}$ une base de $\in \sigma_{p-1}^U$. Par l'équation (3), le vecteur $\left(\begin{smallmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)v - v$, qui appartient à $\sigma_{p-3} \otimes \det$, est fixé par U de caractère $\mathbb{1}$ sous l'action de H. Or, un tel vecteur n'existe pas puisque $(\sigma_{p-3} \otimes \det)^U$ est de dimension 1 isomorphe à α^{-1}. On en déduit que $\left(\begin{smallmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)v - v = 0$, i.e. v est fixé par le groupe $\left(\begin{smallmatrix} 1+p\mathbb{Z}_p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Par ailleurs, v n'est pas fixé par I_1 (sinon $\epsilon = \langle K \cdot v\rangle$ serait une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$), par conséquent n'est pas fixé par U^s. Autrement dit, si on pose $x := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{smallmatrix}\right)v - v$, alors x est un vecteur non nul dans $\sigma_{p-3} \otimes \det$. Comme dans la preuve du lemme 3.5, on voit que v est fixé par U, et donc fixé par I_1 puisque $(\sigma_{p-3} \otimes \det)^U = (\sigma_{p-3} \otimes \det)^{I_1}$. Soit maintenant $M = kx \oplus kv$ le sous-espace de dimension 2 de ϵ. Tout ce qui précède montre que M est une I-représentation, et on en déduit par réciprocité de Frobenius un morphisme K-équivariant :

$$\mathrm{Ind}_I^K M \twoheadrightarrow \epsilon.$$

Or, en prenant $r_0 = 2$ dans le lemme 11.8 [1], on voit que $\mathrm{Ind}_I^K M$ n'admet pas ϵ comme quotient. En fait, l'unique K-quotient de $\mathrm{Ind}_I^K M$ ayant $\sigma_{p-3} \otimes \det$ pour socle est isomorphe à

$$\sigma_{p-3} \otimes \det - (\sigma_0 \oplus \sigma_{p-1})$$

qui est de longueur 3. Cette contradiction permet de conclure. $\square$

Démonstration de 3.2. Soit X une K-représentation dont la filtration par le socle est de la forme

$$X \cong \sigma_{p-3} \otimes \det - \sigma_{p-1} - \sigma_{p-1}.$$

Notons $\epsilon \cong \sigma_{p-3} \otimes \det - \sigma_{p-1}$ la sous-représentation de X et $e \cong \sigma_{p-1} - \sigma_{p-1}$ le quotient de X. D'une part, la suite exacte

$$0 \to \epsilon \to X \to \sigma_{p-1} \to 0$$

implique que $\dim X^U \leq 2$ puisque $\dim \epsilon^U = 1$ par le lemme 3.6. D'autre part, on a la suite exacte induite par X :

$$0 \to \sigma_{p-3} \otimes \det \to * \to e^U \to 0$$

qui implique que $\dim X^U \geq 2$, puisque $\dim \mathrm{Ext}^1_{HU}(\mathbb{1}, \sigma_{p-3} \otimes \det) \leq 1$ d'après le corollaire 3.4 et que $e^U \cong \mathbb{1} \oplus \mathbb{1}$ par le lemme 3.5. Ainsi l'espace X^U est de dimension 2 et admet une base $\{x, w\}$ telle que $x \in \sigma_{p-3} \otimes \det$ et $w \notin \epsilon$. Puis, considérons l'image $\bar{w}$ de w dans le quotient e. L'équation (2) montre que $\left(\begin{smallmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\bar{w} - \bar{w} \neq 0$ dans e, autrement dit, le vecteur

$$v := \left(\begin{smallmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)w - w$$

est non nul et n'appartient pas à $\sigma_{p-3} \otimes \det$. Or, la formule (3) montre que v est fixé par U, ce qui donne une contradiction car v appartient certainement à ϵ. $\square$

Références

[1] C. Breuil, *Representations of Galois and of* GL_2 *in characteristic* p, Cours à l'université de Columbia, 2007.

[2] V. Paskunas, *Extensions for supersingular representations of* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Astérisque 331, 2010.

[3] V. Paskunas, *The image of Colmez Montreal functor*, Astérisque 331, 2010.