Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$: Bloc

Yongquan HU

3 novembre 2010

Notations

- $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ avec $Z \cong \mathbb{Q}_p^\times$ le centre.
- L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, avec $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers, ϖ une uniformisante fixée, et $k = \mathcal{O}/\varpi$ le corps résiduel.
- $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l\,fin}}_{G,\xi}(\mathcal{O})$ (resp. $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l\,fin}}_{G,\xi}(k)$) est la catégorie des G-représentations de torsion sur $\mathcal{O}$ (resp. sur k), localement de longueur finie et avec caractère central ξ, où $\xi : Z \to \mathcal{O}^\times$ est un caractère continue (resp. vu comme caractère dans $k^\times$).
- Par $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}[G],\xi}$ ou $\mathrm{Ext}^i_{k[G],\xi}$, on désigne les extensions dans la catégorie $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l\,fin}}_{G,\xi}(\mathcal{O})$ ou $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l\,fin}}_{G,\xi}(k)$, en particulier, avec caractère central.
- $\mathrm{Irr}_{G,\xi}(k)$ est l'ensemble de classes d'isomorphisme de k-représentations lisses irréductibles de G avec caractère central ξ.
- $\mathrm{Ban}^{\mathrm{adm}}_{G,\xi}(L)$ est la catégories des L-représentations de Banach admissibles unitaires de G avec caractère central ξ. Si $\Pi \in \mathrm{Ban}^{\mathrm{adm}}_{G,\xi}(L)$, on désigne par $\overline{\Pi}$ la semi-simplification de $\Theta \otimes_{\mathcal{O}} k$ pour n'importe quel $\mathcal{O}$-réseau Θ qui est G-stable ouvert et borné.

1 Décomposition de catégories et Blocs de $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

1.1 Décomposition de catégories

Définition 1.1. *Soient $\pi, \tau \in \mathrm{Irr}_{G,\xi}(k)$. On écrit $\pi \leftrightarrow \tau$ si $\pi = \tau$ ou $\mathrm{Ext}^1_{k[G],\xi}(\pi,\tau) \neq 0$ ou $\mathrm{Ext}^1_{k[G],\xi}(\tau,\pi) \neq 0$. On écrit $\pi \sim \tau$, et on dit que π* est équivalente à *τ, s'il existe une suite finie $\pi_1, \dots, \pi_n \in \mathrm{Irr}_{G,\xi}(k)$ satisfaisant aux conditions suivantes : $\pi = \pi_1$, $\tau = \pi_n$ et $\pi_i \leftrightarrow \pi_{i+1}$ si $1 \le i \le n-1$.*

On obtient ainsi une relation d'équivalence $\sim$. Une classe d'équivalence est dite un *bloc*.

Remarque 1.2. *Comme on a la suite exacte*

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{k[G],\xi}(\pi,\tau) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}[G],\xi}(\pi,\tau) \to \mathrm{Hom}_G(\pi,\tau),$$

et comme $\mathrm{Irr}_{G,\xi}(k) = \mathrm{Irr}_{G,\xi}(\mathcal{O})$, on pourrait définir la relation $\sim$ en considérant des extensions dans la catégorie $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l\,fin}}_{G,\xi}(\mathcal{O})$.

On a le résultat suivant général, même sans savoir la classification des blocs.

Proposition 1.3. *(Prop. 5.30 [5]) Soit $\mathfrak{B}$ un bloc fixé. La catégorie $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l\,fin}}_{G,\xi}(\mathcal{O})$ se décompose en une somme directe de sous-catégories :*

$$\mathrm{Mod}^{\mathrm{l\,fin}}_{G,\xi}(\mathcal{O}) \cong \mathrm{Mod}^{\mathrm{l\,fin}}_{G,\xi}(\mathcal{O})^{\mathfrak{B}} \oplus \mathrm{Mod}^{\mathrm{l\,fin}}_{G,\xi}(\mathcal{O})_{\mathfrak{B}},$$

où

- *$V \in \mathrm{Mod}^{\mathrm{l\,fin}}_{G,\xi}(\mathcal{O})^{\mathfrak{B}}$ si et seulement si tous les sous-quotients irréductibles de V appartiennent à $\mathfrak{B}$;*
- *$W \in \mathrm{Mod}^{\mathrm{l\,fin}}_{G,\xi}(\mathcal{O})_{\mathfrak{B}}$ si et seulement si aucun de sous-quotient irréductible de W n'appartient à $\mathfrak{B}$.*

De plus, la catégorie $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l\,fin}}_{G,\xi}(\mathcal{O})^{\mathfrak{B}}$ est indécomposable (i.e. elle n'est pas équivalente à une somme directe de deux sous-catégories non nulles).

Démonstration. Rappelons que si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux catégories abéliennes, alors les morphismes dans la somme directe $\mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2$ sont définis par

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1\oplus\mathcal{C}_2}((A_1,B_1),(A_2,B_2)) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A_1,A_2) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_2}(B_1,B_2). \tag{1}$$

Cela entraîne que $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l\,fin}}_{G,\xi}(\mathcal{O})^{\mathfrak{B}}$ est indécomposable, parce que si $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l\,fin}}_{G,\xi}(\mathcal{O})^{\mathfrak{B}} = \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2$, on aurait que : *soit $\pi \in \mathfrak{B}$ et on suppose que $\pi \in \mathcal{C}_1$, alors on a forcément $\pi \notin \mathcal{C}_2$ d'après (1) ; cela implique que $J_\pi \in \mathcal{C}_1$ car elle est indécomposable, où J_π est une enveloppe injective de π. Puis, encore d'après (1), on voit que $\tau \in \mathcal{C}_1$ pour tout τ irréductible tel que $\pi \leftrightarrow \tau$, et donc $\tau \in \mathcal{C}_1$ pour tout $\tau \in \mathfrak{B}$.* D'où une contradiction.

Pour la décomposition cherchée, soit $V \in \mathrm{Mod}^{\mathrm{l\,fin}}_{G,\xi}(\mathcal{O})$ et soit J_V une enveloppe injective de V dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l\,fin}}_{G,\xi}(\mathcal{O})$. Alors J_V se décompose en une somme directe d'objets injectifs $J_V = \oplus_{i\in I} J_i$, puis

$$J_V = (\oplus_{i\in I_1} J_i) \oplus (\oplus_{i\in I_2} J_i)$$

où $I_1 \subset I$ est le sous-ensemble des indices i tel que le G-socle de J_i appartiennent à $\mathfrak{B}$, et I_2 le complément de I_1 dans I. Soit p_1 (resp. p_2) la projection de J_V vers $\oplus_{i\in I_1} J_i$ (resp. $\oplus_{i\in I_2} J_i$). Alors en posant $V_1 = p_1(V)$ et $V_2 = p_2(V)$, on obtient une décomposition de V : $V = V_1 \oplus V_2$. Enfin, pour conclure on constate qu'il n'y a pas de morphisme entre V_1 et V_2. □

Soient

- $\mathfrak{C}(\mathcal{O})$ la catégorie anti-équivalente à $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l\,fin}}_{G,\xi}(\mathcal{O})$ par dualité de Pontryagin ;
- $\mathfrak{C}^{\mathfrak{B}}(\mathcal{O})$ celle anti-équivalente à $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l\,fin}}_{G,\xi}(\mathcal{O})^{\mathfrak{B}}$;
- $\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}(\mathcal{O})$ celle anti-équivalente à $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l\,fin}}_{G,\xi}(\mathcal{O})_{\mathfrak{B}}$.

Alors en prenant la dualité, on obtient :

Corollaire 1.4. *On a la décomposition $\mathfrak{C}(\mathcal{O}) \cong \mathfrak{C}^{\mathfrak{B}}(\mathcal{O}) \oplus \mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}(\mathcal{O})$.*

Théorème 1.5. *La catégorie $\mathrm{Ban}^{\mathrm{adm}}_{G,\xi}(L)$ se décompose en une somme directe de catégories :*

$$\mathrm{Ban}^{\mathrm{adm}}_{G,\xi}(L) \cong \bigoplus_{\mathfrak{B}} \mathrm{Ban}^{\mathrm{adm}}_{G,\xi}(L)^{\mathfrak{B}}$$

où $\Pi \in \mathrm{Ban}^{\mathrm{adm}}_{G,\xi}(L)^{\mathfrak{B}}$ si et seulement si tous les sous-quotients irréductibles de $\Theta \otimes_{\mathcal{O}} k$ appartiennent à $\mathfrak{B}$ (où Θ est un réseau G-stable ouvert borné, mais cette propriété ne dépend pas du choix de Θ).

Rappelons quelques résultats et notations avant la démonstration. Si $\Theta \subset \Pi$ est un $\mathcal{O}$-réseau G-stable ouvert et borné, alors la duale de Schickhof $\Theta^d := \mathrm{Hom}^{cont}_{\mathcal{O}}(\Theta, \mathcal{O})$ est un élément de $\mathfrak{C}(\mathcal{O})$ et on a un isomorphisme

$$\Pi \cong \mathrm{Hom}^{cont}_{\mathcal{O}}(\Theta^d, L).$$

Réciproquement, si $M \in \mathfrak{C}(\mathcal{O})$, alors la dualité $M^d := \mathrm{Hom}^{cont}_{\mathcal{O}}(M, L)$ appartient à $\mathrm{Ban}^{\mathrm{adm}}_{G,\xi}(L)$. Soit $(M^d)^0$ le boule unité de M^d.

Lemme 1.6. *On a $(M^d)^0 \otimes_{\mathcal{O}} k \cong (M \otimes_{\mathcal{O}} k)^\vee$. En particulier, π apparaît comme sous-quotient dans $\overline{M^d}$ si et seulement si π apparaît dans $(M \otimes_{\mathcal{O}} k)^\vee$.*

Démonstration du Théorème 1.5. Choisissons Θ un réseau G-stable de Π et π un sous-quotient irréductible de $\Theta \otimes k$. Soit $\mathfrak{B}$ le bloc de π. D'après le corollaire 1.4 on peut écrire $\Theta^d = (\Theta^d)^{\mathfrak{B}} \oplus (\Theta^d)_{\mathfrak{B}}$. Posons

$$\Pi^{\mathfrak{B}} := \mathrm{Hom}^{cont}_{\mathcal{O}}((\Theta^d)^{\mathfrak{B}}, L), \quad \Pi_{\mathfrak{B}} := \mathrm{Hom}^{cont}_{\mathcal{O}}((\Theta^d)_{\mathfrak{B}}, L)$$

qui sont des éléments de $\mathrm{Ban}^{\mathrm{adm}}_{G,\xi}(L)$. Comme $\Pi \cong \mathrm{Hom}^{cont}_{\mathcal{O}}(\Theta^d, L)$, on trouve que $\Pi = \Pi^{\mathfrak{B}} \oplus \Pi_{\mathfrak{B}}$. Le lemme ci-dessus nous dit que les sous-quotients irréductibles de $\overline{\Pi^{\mathfrak{B}}}$ coïncident avec les sous-quotients irréductibles de $((\Theta^d)^{\mathfrak{B}} \otimes_{\mathcal{O}} k)^\vee$, donc appartiennent à $\mathfrak{B}$. De même, aucun de sous-quotient irréductible de $\overline{\Pi_{\mathfrak{B}}}$ n'appartient à $\mathfrak{B}$. Puis, on construit par récurrence une suite de sous-espaces fermés G-stables Π_i de Π satisfaisant : $\Pi_{\mathfrak{B}} = \Pi_1$ et

$$\Pi_i \cong \Pi_i^{\mathfrak{B}_i} \oplus \Pi_{i+1},$$

avec $\Pi_i^{\mathfrak{B}_i} \neq 0$ et $\mathfrak{B}_i$ des blocs *distincts* l'un de l'autre. On peut donc conclure en utilisant le fait que la suite Π_i est stationnaire puisque Π est admissible. (*Démonstration* : l'inclusion $\Pi_i \hookrightarrow \Pi$ induit quotient $\Pi^d \to \Pi_i^d$. Les noyaux M_i forment une suite ascendante $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq \Pi^d$. Or Π^d est de type fini en tant que $\mathcal{O}[[H]]$-module qui est un anneau noethérien, où $H \subset G$ ouvert compact, la suite M_i est stationnaire.) □

Donnons une conséquence immédiate :

Corollaire 1.7. *Soit* $\Pi \in \mathrm{Ban}^{\mathrm{adm}}_{G,\xi}(L)$ *irréductible. Si* $\pi \in \mathfrak{B}$ *apparaît dans* $\overline{\Pi}$*, alors* $\pi' \in \mathfrak{B}$ *pour tout* $\pi' \in \overline{\Pi}$.

1.2 Blocs de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

Maintenant on donne la classification des blocs $\mathfrak{B}$ (pour $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$). Notons $P \subset G$ (resp. $\overline{P}$) le sous-groupe de Borel supérieur (resp. inférieur) et T le sous-groupe des matrices diagonales.

Théorème 1.8. *(Prop.5.38 [5]) Soit* $\pi \in \mathrm{Irr}_{G,\xi}(k)$ *absolument irréductible et soit* $\mathfrak{B}$ *le bloc de* π.

(i) si π *est supersingulière, alors* $\mathfrak{B} = \{\pi\}$ *;*

(ii) si $\pi \cong \mathrm{Ind}_P^G \chi_1 \otimes \chi_2\omega^{-1}$ *avec* $\chi_1\chi_2^{-1} \neq 1, \omega^{\pm 1}$ *(ici* ω *est le caractère cyclotomique modulo p), alors*

$$\mathfrak{B} = \{\mathrm{Ind}_P^G \chi_1 \otimes \chi_2\omega^{-1},\ \mathrm{Ind}_P^G \chi_2 \otimes \chi_1\omega^{-1}\};$$

(iii) si $\pi \cong \mathrm{Ind}_P^G \chi \otimes \chi\omega^{-1}$*, alors* $\mathfrak{B} = \{\pi\}$ *;*

(iv) sinon, i.e. soit $\pi \cong \eta \circ \det$*, soit* $\pi \cong \mathrm{Sp} \otimes \eta$*, soit* $\pi \cong (\mathrm{Ind}_P^G \omega \otimes \omega^{-1}) \otimes \eta$*, alors*

$$\mathfrak{B} = \{\eta, \mathrm{Sp} \otimes \eta, (\mathrm{Ind}_P^G \omega \otimes \omega^{-1}) \otimes \eta\}.$$

Démonstration. Étape 1. Se réduire au cas où $k = \bar{k}$. En fait, comme π est absolument irréductible, on peut supposer que k est le corps de définition de π. Il suffit donc de montrer :

(a) Si $\bar{\tau} \in \mathrm{Irr}_{G,\xi}(\bar{k})$ est telle que $\pi \otimes_k \bar{k} \sim \bar{\tau}$, alors k est aussi le corps de définition de $\bar{\tau}$. C'est-à-dire, il existe alors $\tau \in \mathrm{Irr}_{G,\xi}(k)$ absolument irréductible telle que $\tau \otimes_k \bar{k} \cong \bar{\tau}$. Cela suit Lemma 5.8 [5] (voir l'exposé de Ramla), où l'on a déterminé explicitement le corps de définition pour tout objet de $\mathrm{Irr}_{G,\xi}(\bar{k})$.

(b) Si $\tau \in \mathrm{Irr}_{G,\xi}(k)$ on a un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^i_{k[G],\xi}(\tau, \pi) \otimes_k \bar{k} \cong \mathrm{Ext}^i_{k[G],\xi}(\tau \otimes_k \bar{k}, \pi \otimes_k \bar{k}).$$

Pour cela, on montre que si $\pi \hookrightarrow J$ est une enveloppe injective de π dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l\ fin}}_{G,\xi}(k)$, alors $\pi \otimes_k \bar{k} \hookrightarrow J \otimes_k \bar{k}$ est une enveloppe injective dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l\ fin}}_{G,\xi}(\bar{k})$.

Étape 2. Supposons dans la suite que $k = \bar{k}$. Plusieurs cas du théorème, notamment ceux qui concernant les représentations non supersingulières, se déduisent rapidement en utilisant le foncteur des parties ordinaires d'Emerton (ce qui fera le sujet des exposés de Ramla et Olivier). Grossièrement, on peut définir un foncteur :

$$\mathrm{Ord}_P : \mathrm{Mod}^{\mathrm{l\ adm}}_{G,\xi}(k) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{l\ adm}}_{T,\xi}(k)$$

et les foncteurs dérivés $\mathbb{R}^i\mathrm{Ord}_P$ tels que :

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Ext}^1_{T,\xi}(U, \mathrm{Ord}_P V) \to \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U, V) \to \mathrm{Hom}_T(U, \mathbb{R}^1\mathrm{Ord}_P V) \\ \to \mathrm{Ext}^2_{T,\xi}(U, \mathrm{Ord}_P V) \to \mathrm{Ext}^2_{G,\xi}(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U, V). \end{aligned} \tag{2}$$

Ici et dans la suite, on écrit $\mathrm{Ext}^1_{G,\xi}$ (resp. $\mathrm{Ext}^1_{T,\xi}$) au lieu de $\mathrm{Ext}^1_{k[G],\xi}$ (resp. $\mathrm{Ext}^1_{k[T],\xi}$) pour simplifier (un peu) les notations.

Ces propriétés de $\mathbb{R}^i\mathrm{Ord}_P$, combinées avec le lemme ci-dessous, permettent de déterminer le groupe $\mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\tau, \pi)$ dans plusieurs cas. $\square$

Lemme 1.9. *Soit* $\psi : T \to k^\times$ *un caractère lisse. Alors* $\mathrm{Ext}^i_{T,\xi}(\psi, \chi) = 0$ *pour tout* $i \geq 0$ *si* $\psi \ncong \chi$*, et*

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{T,\xi}(\psi, \psi) = 2, \quad \dim \mathrm{Ext}^2_{T,\xi}(\psi, \psi) = 1.$$

Démonstration. On va montrer les énoncés duals, c'est-à-dire, $\mathrm{Ext}^i(\chi^\vee, \psi^\vee) = 0$ si $\chi \not\cong \psi$, et

$$\dim \mathrm{Ext}^1(\psi^\vee, \psi^\vee) = 2, \quad \dim \mathrm{Ext}^2(\psi^\vee, \psi^\vee) = 1.$$

Pour cela, on rappelle que $E := \mathrm{End}(P) \cong k[[x, y]]$ où $P \twoheadrightarrow \psi^\vee$ est une enveloppe projective et qu'on a la résolution projective de $\psi^\vee : 0 \to P \to P^{\oplus 2} \to P \to \psi^\vee \to 0$, qui est induite par

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & k[[x,y]] & \to & k[[x,y]] \oplus k[[x,y]] & \to & k[[x,y]] & \to & k & \to & 0. \\ & & f & \mapsto & (xf, yf) & & & & & & \\ & & & & (f, g) & \mapsto & yf - xg & & & & \end{array}$$

On peut aussi argumenter comme suite pour le premier énoncé : sur l'epsace $\mathrm{Ext}^i_{T,\xi}(\psi, \chi)$, on a deux moyens pour mettre l'action de T, soit via ψ soit via χ. Cela n'est possible que lorsque $\psi \cong \chi$. $\square$

Cependant, la méthode d'Emerton ne s'applique pas toujours, par exemple : le cas où π est supersingulière et τ est supersingulière ou un caractère. Dans la suite, on va montrer, suivant Paskunas, les théorèmes suivants :

Théorème 1.10. *Soient* $\pi, \tau \in \mathrm{Irr}_{G,\xi}(k)$ *dont au moins une est supersingulière. Si* $\tau \not\cong \pi$ *alors* $\mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\tau, \pi) = 0$.

Théorème 1.11. *Soit* π *supersingulière.*
(i) $\dim \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi, \pi) = 3$.
(ii) Soit V *une extension non triviale de* π *par* π*. Alors* $\dim \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi, V) \leq 3$ *(sera démontré la prochaine fois).*

Avant de donner les démonstrations, on explique comment les théorèmes permettent de déduire le théorème principal.

1.3 Stratégie de Paskunas (§5.8)

On sait que le foncteur de Colmez s'étend en un foncteur $\check{\mathbb{V}} : \mathfrak{C}(\mathcal{O}) \to \mathrm{Rep}_{\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}}(\mathcal{O})$. Soit π supersingulière et $Q = S = \pi^\vee$. Soit $\rho := \check{\mathbb{V}}(Q)$ qui est une représentation irréductible de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension 2. On sait que l'anneau universel des déformations de ρ est isomorphe à $R_\rho = \mathcal{O}[[x_1, \ldots, x_5]]$ et l'anneau universel des déformations ayant déterminant $\xi\epsilon$ (où $\epsilon =$ caractère cyclotomique) est isomorphe à $R^{\xi\epsilon}_\rho \cong \mathcal{O}[[x_1, x_2, x_3]]$. Soit $\widetilde{P} \twoheadrightarrow S$ une enveloppe projective dans $\mathfrak{C}(\mathcal{O})$ et posons $\widetilde{E} = \mathrm{End}_{\mathfrak{C}(\mathcal{O})}(\widetilde{P})$. D'après le théorème 5.48 [5], il existe une surjection

$$\widetilde{E}^{ab} \twoheadrightarrow R^{\xi\epsilon}_\rho$$

(notons que ρ est irréductible). Par le critère de commutativité (théorème 3.38 [5]), pour que la surjection

$$\widetilde{E} \twoheadrightarrow \widetilde{E}^{ab} \twoheadrightarrow \mathcal{O}[[x_1, x_2, x_3]]$$

soit un isomorphisme, il suffit que :

(a) $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$=3 (i.e. $d = 3$ et donc $r = 1$), où $\mathfrak{m}$ désigne l'idéal maximl de $E := \widetilde{E} \otimes k$;

(b) pour toute extension $V \in \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi, \pi)$, on a $\dim \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi, V) \leq \frac{r(r-1)}{2} + d = 3$.

Ces conditions sont exactement le théorème 1.11 (on va montrer (ii) la prochaine fois). En particulier $\widetilde{E}$ est commutatif, on peut conclure par le corollaire 4.41 [5] que : si $\Pi \in \mathrm{Ban}^{\mathrm{adm}}_{G,\xi}(L)$ est absolument irréductible, et si π apparaît dans $\overline{\Pi}$, alors

$$\overline{\Pi} \subseteq (Q^\vee)^{ss} = \pi.$$

2 Démonstration

2.1 Démonstration du Théorème 1.10

Notons $I_1 \subset G$ le pro-p-Iwahori. Rappelons que $\mathcal{H} := \mathrm{End}_G(\text{c-Ind}^G_{ZI_1}\xi)$ et $\mathcal{I} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_{G,\xi}(k) \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{H}}$ désigne le foncteur défini par

$$\mathcal{I}(\pi) := \pi^{I_1} \cong \mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}^G_{ZI_1}\xi, \pi).$$

On dispose d'une suite exacte (d'après Ollivier [3])

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(\mathcal{I}(\tau), \mathcal{I}(\pi)) \to \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\tau, \pi) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{I}(\tau), \mathbb{R}^1\mathcal{I}(\pi))$$
$$\to \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{H}}(\mathcal{I}(\tau), \mathcal{I}(\pi)) \to \mathrm{Ext}^2_{G,\xi}(\tau, \pi), \quad (3)$$

qui sera très importante dans la suite. On a tout d'abord le lemme suivant.

Lemme 2.1. *Si $\pi \not\cong \tau$, alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{I}(\tau), \mathcal{I}(\pi)) = 0$ et $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(\mathcal{I}(\tau), \mathcal{I}(\pi)) = 0$.*

Démonstration. Un théorème d'Ollivier [3] nous dit que, $\mathcal{I}$ et $\mathcal{T} := \text{c-Ind}_{ZI_1}^G \xi \otimes_{\mathcal{H}} *$ induisent une équivalence de catégories entre $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_{G,\xi}(k)^{I_1}$ (dont les objets sont les représentations de G engendrées par leurs I_1-invariants) et $\mathrm{Mod}_{\mathcal{H}}$. On en déduit que, puisque τ et π sont irréductibles (*en fait, il suffit que τ soit irréductible*),

$$0 = \mathrm{Hom}_G(\tau, \pi) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{I}(\tau), \mathcal{I}(\pi)).$$

Soit $M \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(\mathcal{I}(\tau), \mathcal{I}(\pi))$, alors $V := \mathcal{T}(M) \in \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\tau, \pi)$ puisque $\mathcal{T}\mathcal{I}(\tau) = \tau$ et $\mathcal{T}\mathcal{I}(\pi) = \pi$. Le point clef est que V est une représentation engendrée par ses I_1-invariants, i.e.

$$V = \langle G \cdot V^{I_1} \rangle.$$

En particulier, le morphisme $V^{I_1} \to \tau^{I_1}$ n'est pas nul, et donc surjectif puisque τ^{I_1} est irréductible comme $\mathcal{H}$-module. Après, en choisissant convenablement un relèvement v de $\bar{v} \in \tau^{I_1}$ et en utilisant les classifications de Barthel-Livné et Breuil, on montre que $\langle G \cdot v \rangle \subset V$ est isomorphe à τ. $\square$

La proposition suivante traite le terme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{I}(\tau), \mathbb{R}^1\mathcal{I}(\pi))$, et complète la preuve du théorème 1.10.

Proposition 2.2. *(i) Si π est supersingulière, alors $\mathbb{R}^1\mathcal{I}(\pi) \cong \mathcal{I}(\pi) \oplus \mathcal{I}(\pi)$.*

(ii) Si π est non supersingulière, alors $\mathbb{R}^1\mathcal{I}(\pi)$ n'admet pas $\mathcal{H}$-module supersingulier comme sous-quotient.

Remarque 2.3. *1. Lorsque π est non supersingulière, $\mathbb{R}^1\mathcal{I}(\pi)$ n'est pas forcément semi-simple comme $\mathcal{H}$-module. Voir le théorème 7.16 (iii) [1].*

2. Si $F/\mathbb{Q}_p$ est une extension finie non triviale et si π est une série principale, alors $\mathbb{R}^1\mathcal{I}(\pi)$ contient des $\mathcal{H}$-modules supersinguliers. Voir le théorème 7.16 (i) [1].

Démonstration. Il se démontre par un calcul longue ! L'idée est la suivante : on a tout d'abord un isomorphisme d'espaces vectoriels (où $Z_1 := I_1 \cap Z$)

$$\mathbb{R}^1\mathcal{I}(\pi) \cong H^1(I_1/Z_1, \pi) \cong \mathrm{Ext}^1_{I_1/Z_1}(\mathbb{1}, \pi)$$

et puis on détermine explicitement toutes les I_1/Z_1-extensions de $\mathbb{1}$ par π. Par exemple, lorsque π est une série principale, on peut écrire (par la décomposition de Markey)

$$\pi|_{I_1} \cong \mathrm{Ind}_P^G \chi|_{I_1} \cong \mathrm{Ind}_{I_1 \cap P}^{I_1} \mathbb{1} \oplus \mathrm{Ind}_{I_1 \cap \bar{P}}^{I_1} \mathbb{1}.$$

Par le lemme de Shapiro, on a

$$\mathrm{Ext}^1_{I_1/Z_1}(\mathbb{1}, \mathrm{Ind}_{I_1 \cap P}^{I_1} \mathbb{1}) \cong \mathrm{Ext}^1_{I_1 \cap P/Z_1}(\mathbb{1}, \mathbb{1}) \cong \mathrm{Hom}(I_1 \cap P/Z_1, \overline{\mathbb{F}}_p),$$

qui est un espace de dimension 2. Cela permet de montrer que $\dim \mathbb{R}^1\mathcal{I}(\pi) = 4$. Puis, il faut regarder l'action de $\mathcal{H}$ sur $\mathbb{R}^1\mathcal{I}()\pi$ qui est plus subtile. $\square$

2.2 Démonstration du théorème 1.11(i)

Supposons désormais π est supersingulère, i.e. $\pi \cong \pi(r, 0, \eta)$ avec $0 \leq r \leq p-1$ (notation usuelle). On suppose de plus que $\eta = 1$ est trivial pour simplifier les notations. L'outil principal pour montrer le théorème 1.11(i) est encore la suite exacte (3). Déterminons d'abord $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(\mathcal{I}(\pi), \mathcal{I}(\pi))$.

Lemme 2.4. *(i) Si $0 < r < p-1$, alors $\dim \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(\mathcal{I}(\pi), \mathcal{I}(\pi)) = 2$.*

(ii) Si $r \in \{0, p-1\}$, alors $\dim \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(\mathcal{I}(\pi), \mathcal{I}(\pi)) = 1$.

Démonstration. Notons $\sigma_r := \mathrm{Sym}^r k^2$ la représentation irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ vue comme une représentation lisse de $KZ := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times$ comme d'habitude. D'après Breuil, on a un G-isomorphisme $\pi \cong \text{c-Ind}_{KZ}^G(\sigma_{p-1-r} \otimes \det^r)/T$ et le K-socle de π est

$$\mathrm{soc}_K \pi \cong \sigma_r \oplus (\sigma_{p-1-r} \otimes \det^r).$$

Posons $V_1 := \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma_r/T^2$ et $V_2 := \text{c-Ind}_{KZ}^G(\sigma_{p-1-r} \otimes \det^r)/T^2$. Alors $V_1, V_2 \in \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi, \pi)$. On a également que $V_1, V_2 \in \mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_{G,\xi}(k)^{I_1}$.

(i) Si $0 < r < p-1$, alors $V_1 \not\cong V_2$. Ce fait se voit en examinant leurs K-socles :

$$\mathrm{soc}_K V_1 \cong \sigma_r \oplus \sigma_r \oplus (\sigma_{p-1-r} \otimes \det^r), \quad \mathrm{soc}_K V_2 \cong \sigma_r \oplus (\sigma_{p-1-r} \otimes \det^r) \oplus (\sigma_{p-1-r} \otimes \det^r).$$

(*Remarque* : V_1 contient la série principale de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$: $\sigma_r - \sigma_{p-1-r} \otimes \det^r$ qui n'est pas scindée, tandis que V_2 contient $\sigma_{p-1-r} \otimes \det^r - \sigma_r$.)
Puis, on vérifie que $\mathcal{I}(V_1)$ et $\mathcal{I}(V_2)$ forment une base de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(\mathcal{I}(\pi), \mathcal{I}(\pi))$.

(ii) Dans ce cas, σ_{p-1} est injective comme représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$, d'où

$$\mathrm{Ext}^1_K(\sigma_{p-1}, \sigma_0) = \mathrm{Ext}^1_K(\sigma_0, \sigma_{p-1}) = 0.$$

Cela montre $\mathcal{I}(V_1) \cong \mathcal{I}(V_2)$ comme $\mathcal{H}$-module, donc $V_1 \cong V_2$ comme G-représentations.

□

Remarque : Pour montrer le théorème 1.11(ii), on aura aussi besoin de distinguer deux cas selon la valeur de r.

Proposition 2.5. *Supposons $r \in \{0, p-1\}$. Le morphisme*

$$\alpha : \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi, \pi) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{I}(\pi), \mathbb{R}^1\mathcal{I}(\pi))$$

défini dans (3) est surjectif.

Démonstration. D'après une construction de Paskunas, il existe une injection G-équivariante $\pi \hookrightarrow \Omega$, où Ω est une représentation lisse de G avec caractère central ξ telle que $\Omega|_K$ soit une enveloppe injective de $\mathrm{soc}_K \pi$. En appliquant le foncteur $\mathcal{I}(\cdot)$ à la suite exacte

$$0 \to \pi \to \Omega \to \Omega/\pi \to 0, \tag{4}$$

on trouve que

$$0 \to \mathcal{I}(\pi) \to \mathcal{I}(\Omega) \to \mathcal{I}(\Omega/\pi) \to \mathbb{R}^1\mathcal{I}(\pi) \to \mathbb{R}^1\mathcal{I}(\Omega) = 0,$$

où la dernière égalité découle du fait que Ω est injectif.

Fait : on a $\mathcal{I}(\pi) = \mathcal{I}(\Omega)$ et par conséquent $\mathcal{I}(\Omega/\pi) \cong \mathbb{R}^1\mathcal{I}(\pi)$.
Preuve : Comme $\mathrm{soc}_K \pi \cong \sigma_0 \oplus \sigma_{p-1}$ et comme $I_1 \supset K_1 := \mathrm{Ker}(K \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p))$, on voit que

$$\Omega^{I_1} \cong \left(\mathrm{Inj}_K \sigma_0 \oplus \mathrm{Inj}_K \sigma_{p-1}\right)^{I_1} = \left(\mathrm{Inj}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)} \sigma_0 \oplus \sigma_{p-1}\right)^{I_1/K_1}.$$

Or, σ_r est injective comme représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ d'où $\mathrm{Inj}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)} \sigma_{p-1} \cong \sigma_{p-1}$, et

$$\mathrm{Inj}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)} \sigma_0 \cong \sigma_0 \text{ --- } \sigma_{p-3} \otimes \det \text{ --- } \sigma_0,$$

ce qui entraîne que $(\mathrm{Inj}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)} \sigma_0)^{I_1} = \sigma_0^{I_1}$. On en déduit que $\Omega^{I_1} = (\mathrm{soc}_K \pi)^{I_1} = \pi^{I_1}$.

Le *fait* précédent nous donne les isomorphismes (car $\pi = \langle G \cdot \pi^{I_1} \rangle$) :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{I}(\pi), \mathbb{R}^1\mathcal{I}(\pi)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{I}(\pi), \mathcal{I}(\Omega/\pi)) \cong \mathrm{Hom}_G(\pi, \Omega/\pi).$$

D'autre part, de (4) on obtient une suite exacte en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_G(\pi, *)$:

$$0 \to \mathrm{Hom}_G(\pi, \pi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_G(\pi, \Omega) \to \mathrm{Hom}_G(\pi, \Omega/\pi) \to \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi, \pi).$$

Somme toute, on obtient une injection

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{I}(\pi), \mathbb{R}^1\mathcal{I}(\pi)) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi, \pi)$$

qui fournit une section de α. La proposition est donc démontrée. □

Conclusion

(a) Si $r \in \{0, p-1\}$, le théorème 1.11(i) découle alors du lemme 2.4, de la proposition précédente et de la suite exacte (3).

(b) Supposons que $0 < r < p-1$. Dans ce cas, α n'est plus surjective, et la démonstration du théorème est assez retournée, se divisant en deux étapes :

– Montrer que $\dim \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi,\pi) \leq 3$. L'argument est brièvement la suivante : on a une suite exacte naturelle
$$0 \to \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma_r \xrightarrow{T} \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma_r \to \pi \to 0$$
qui induit
$$0 \to \mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma_r, \pi) \to \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi,\pi) \to \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma_r, \pi).$$
La réciprocité de Frobenius donne l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma_r, \pi) \cong \mathrm{Hom}_K(\sigma_r, \pi)$. En outre, comme le foncteur de restriction $\underline{\mathrm{Rep}}_{G,\xi} \to \underline{\mathrm{Rep}}_{K,\xi}$ preserve les objects injectifs ([2]), on a l'isomorphisme $\mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma_r, \pi) \cong \mathrm{Ext}^1_{K,\xi}(\sigma_r, \pi)$. L'égalité voulue résulte donc du théorème suivant (que n'allons pas montrer) :

Théorème 2.6. *(Prop 10.10 [4]) On a* $\dim \mathrm{Ext}^1_{K,\xi}(\sigma_r, \pi) \leq 2$.

– Montrer que $\dim \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi,\pi) \geq 3$. La preuve de Paskunas utilise l'argument de Kisin, pour montrer que l'image du morphisme (induit par le foncteur de Colmez)
$$\mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi,\pi) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}}(\rho,\rho)$$
contient le sous-espace des extensions ayant déterminant $\xi\epsilon$. Ce dernier étant de dimension 3 et le morphisme ci-dessus étant injectif d'après Colmez, on déduit que $\dim \mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi,\pi) \geq 3$. Voir l'appendice de [4] pour le détail.

Remarque. Comme on sait déjà deux classes d'extensions V_1, V_2 de $\mathrm{Ext}^1_{G,\xi}(\pi,\pi)$ (lemme 2.4), on donne ici comment construire l'autre classe.
Fait : Supposons $0 < r \leq p-3$. Il existe une extension de K-représentations, avec caractère central, dont la filtration par K-socle est :
$$W := \sigma_r — \sigma_{p-3-r} \otimes \det — \sigma_r.$$
De plus, on a $W \nsubseteq \pi$. En fait, π contient seulement la sous-représentation $W_1 := \sigma_r — \sigma_{p-3-r} \otimes \det$.

Soit Ω une représentation lisse de G avec caractère central, qui contient π comme sous-G-représentation et telle que $\Omega|_K$ soit une enveloppe injective de π. Soit V_3 la sous-G-représentation de Ω engendrée par W, i.e. $V_3 := \langle G \cdot W \rangle$. Alors on peut montrer que modulo π, $\langle G \cdot \sigma_r \rangle \subset \Omega/\pi$ est irréductible isomorphe à π, ce qui fait que V_3 donne une extension (non-scindée) de π par π. Comme $V_3^{I_1} = \pi^{I_1}$ (car $W^{I_1} = \sigma_3^{I_1}$ est de dimension 1), on voit que V_3 n'est pas objet de $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_{G,\xi}(k)^{I_1}$, donc n'est pas contenue dans l'espace $kV_1 \oplus kV_2$.
Pour conclure, on remarque que π contient toujours un poids σ_r avec $0 \leq r \leq p-3$.

Références

[1] C. Breuil & V. Paskuans, *Towards a modulo p Langlands correspondence for* GL_2, prépublication.

[2] M. Emerton & V. Paskunas, *On effaceability of certain δ-functors*, Astérisque 331, 2010.

[3] R. Ollivier, *Le foncteur des invariants sous l'action du pro-p-Iwahori de* $\mathrm{GL}(2,F)$, Crelle 635, 2009.

[4] V. Paskunas, *Extensions for supersingular representations of* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Astérisque 331, 2010.

[5] V. Paskunas, *The image of Colmez Montreal functor*, Astérisque 331, 2010.