Lundi
05/12/2011

Prolonger la correspondance

$F/\mathbb{Q}_p$ extension finie, $\mathcal{O}_F$ anneau d'entiers.
$G = GL_n(F)$. W_F groupe de Weil de F.
On note $W_F^{++} = \bigsqcup_{n \geq 1} I_F \mathrm{Frob}^n$. Rep à coeff dans $\mathbb{C}$.
$K = GL_n(\mathcal{O}_F)$

<u>Théorème 1 (Scholze)</u> $\forall \pi \in \mathrm{Irr}(G)$, $\exists\, \sigma(\pi) \in \mathrm{Rep}_n^{ss}(W_F)$ tq si $\mathrm{rec}(\pi) = \sigma(\pi)\left(\frac{n-1}{2}\right)$, alors

(a) $\forall h \in C_c^\infty(K)$, $\forall \tau \in W_F^{++}$

$$\mathrm{Tr}(f_{\tau,h} \mid \pi) = \mathrm{Tr}(h \mid \pi)\, \mathrm{Tr}(\tau \mid \mathrm{rec}(\pi)).$$

(b) Si π sous quotient de $i_P(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r)$, avec π_i irréductibles, $\sigma(\pi) = \sigma(\pi_1) \oplus \cdots \oplus \sigma(\pi_r)$.

<u>Remarque</u>: Si (σ, V) est une rep continue de dim finie de W_F, soit χ_σ son caractère, $(\sigma, V)^{ss}$ est déterminé par $\chi_\sigma|_{W_F^{++}}$. Ceci implique que $\sigma(\pi)$ est ~~b~~ uniquement défini.

Preuve: Soit $g \in \cancel{W_F}\ I_F \mathrm{Frob}$. Alors par continuité $\sigma(I_F)$ groupe fini, donc comme $h \mapsto \sigma(g) h \sigma(g)^{-1}$ permutation de $\sigma(I_F)$, il existe $m \geq 1$ tq $\sigma(g^m)$ commute à $\sigma(I_F)$, donc à $\sigma(W_F)$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ et V_α le sous-espace caractéristique de $\sigma(g^m)$, associé à α. Montrons que $\chi_\sigma|_{V_\alpha}$ ~~est~~ dépend uniquement de $\chi_\sigma|_{W_F^{++}}$. La projection p_α sur V_α est un polynôme en $\sigma(g^m)$. Donc

$\chi_\sigma(p_\alpha(g)\, g) = \chi_\sigma\left(\frac{1}{\alpha^n} (\cancel{g}^{nm} p_\alpha)(g)\right)$ et on utilise le fait que $W_F = W_F^{++} < g^m >$. $\square$

On va prouver le lemme suivant

Lemme 1 (Lemma 3.2) Supposons le thm 1 [illegible] pour $n' < n$, ainsi que les assertions suiv[antes]
(i) $P \subset G$ parabolique propre, $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$ une [rep] irréductible de son quotient de Levi, alors
$\forall h \in C_c^\infty(K)\ \forall \tau \in W_F^{++}\ \mathrm{Tr}(f_{\tau,h} \mid i(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r))$
$= \mathrm{Tr}(h \mid \pi_{\cdot})(-))\, \mathrm{Tr}(\tau \mid \mathrm{rec}(\frac{n-n_1}{2}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{rec}(\frac{n-n_r}{2}))$
(ii) Si $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$, de carré intégrable ou de [illegible] alors il existe $\mathrm{rec}(\pi) \in (\mathrm{Groth}(W_F) \otimes \mathbb{Q})_{\geq 0}$ [illegible] telle que
$\forall h\ \forall \tau\ \ \mathrm{Tr}(f_{\tau,h} \mid \pi) = \mathrm{Tr}(h \mid \pi)\, \mathrm{Tr}(\tau \mid \mathrm{rec}(\pi))$
(iii) Si $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$ cuspidale, alors
$\mathrm{Tr}(\mathrm{rec}(\pi) \in \mathrm{Groth}(W_F)_{\mathbb{Z}}$.
Alors le thm est vrai.

Remarque : Une fois ce lemme prouvé, on procède par récurrence en prouvant (i) — (iii)
(i) résulte de la décomposition des cycles é[vanescents] de $R_{\beta,m}$ lorsque H_β n'est pas connexe.
(ii) résulte de l'étude des cycles évanescents [des] modèles entiers de variétés de Shimura (l[e] gros du travail)
(iii) résulte de (ii) + correspondance de Ja[cquet-]Langlands.

1. Rappels sur la catégorie des représentations

Définition : Un segment est la donnée d'une rep[résentation] σ de $GL_{d(\sigma)}(F)$ et d'un entier $r \geq 1$. On lui as[socie] la rep cusp $\Delta = \sigma \otimes \sigma(1) \otimes \cdots \otimes \sigma(r-1)$ de $GL_{d(\sigma)r}$. On note $\Delta(\sigma, r) = [\sigma, \sigma(1), \ldots, \sigma(r-1)]$.

On dit que 2 segments Δ_1 et Δ_2 sont liés si $\Delta_1 \not\subset \Delta_2$, $\Delta_2 \not\subset \Delta_1$ et $\Delta_1 \cup \Delta_2$ est un segment. Si Δ_1 et Δ_2 sont liés on dit que Δ_1 précède Δ_2 si $\sigma_2 = \sigma_1(k)$ pour un $k>0$

Théorème 2 (Bernstein-Zelevinsky ~77-80).

- Si Δ est un segment, $i(\Delta)$ a un unique quotient irréductible $Q(\Delta)$, ainsi qu'un unique sous-objet irréd, $Z(\Delta)$.
- Les $Q(\Delta)$ sont de carré intégrable ess. et $\Delta \mapsto Q(\Delta)$ est une bijection.
- Si $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ sont des segments et que pour $i<j$, Δ_i ne précède pas Δ_j, alors $i(Q(\Delta_1) \otimes \cdots \otimes Q(\Delta_r))$ a un unique quotient irréductible noté $Q(\Delta_1, \ldots, \Delta_r)$.
  $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_r\} \longleftrightarrow Q(\Delta_1, \ldots, \Delta_r)$ bijection.
- $i(Q(\Delta_1), \ldots, Q(\Delta_r))$ irréd ssi 2 segment $\neq$ ne sont pas liés.

Théorème 3 (Jacquet, Langlands ~70 ≤ ≤ 80)

- Toute rep tempérée de G est isomorphe à une induite $i(Q(\Delta_1) \otimes \cdots \otimes Q(\Delta_r))$ avec $Q(\Delta_i)$ unitaire.
- Toute rep irréd de π est isom à
  $Q(\pi_1(x_1), \ldots, \pi_r(x_r))$ avec $x_1 > \cdots > x_r$
  π_i tempérée. unicité.
- Le groupe de Grothendieck est engendré par les $i(\pi\alpha)$, π tempérée et α non ramifiée.

Lemme 2 (densité de Kazhdan, 80) Soit $h \in C_c^\infty(G)$.
Supposons que $\mathrm{Tr}(h|\pi) = 0$ $\forall \pi$ tempérée, alors $\mathrm{Tr}(h|\pi) = 0$ $\forall \pi \in \mathrm{Irr}(G)$.

Preuve. π tempérée
$\Rightarrow$ $\pi \cong i_P^G(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r)$, π_i carré intégrable
[Posons] $h^P(p) = \delta_P(p)^{1/2} \int_K h(k^{-1}pk)\,dk$ pour $p \in P$ [est] une fonction lisse à support compact et [$\forall \pi'$], $\mathrm{Tr}(h|i_P^G(\pi')) = \mathrm{Tr}(h^P|\pi')$.

On en déduit que $\mathrm{Tr}(h^P \mid \pi') = 0$ $\forall \pi'$ de carré intégrable ~~sur~~.
Soit $H \subset K \cap P$ ouvert tq $h^P \in C_c^\infty(H\backslash P / H)$ alors
$\mathrm{Tr}(h^P \mid \pi') = \int_P h^P(p) \left(\sum \phi_{\check{v}_i, v_i}(p)\right) dp$

$\forall \nu : P \to \mathbb{C}$ caractère unitaire

on a $\sum_{\alpha \in P/P^0} \nu(\alpha) \int_{\alpha P^0} h^P(p) \tilde{\phi}(p)\, dp$

$\Rightarrow \int_{\alpha P^0} h^P(p) \tilde{\phi}(p)\, dp = 0 \quad \forall \alpha$

$\Rightarrow \mathrm{Tr}(h^P \mid \pi'(\chi)) = 0 \quad \forall \chi$ non ramifié.

$\Rightarrow \mathrm{Tr}(h \mid i(\pi'(\chi))) = 0 \quad \forall \chi$ nr.

$\Rightarrow \mathrm{Tr}(h \mid \pi) = 0 \quad \forall \pi \in \mathrm{Irr}(G)$. $\square$

2. Représentations de Speh

<u>Définition</u>. $d \mid n$, σ rep cuspidale de $GL_d(F)$, $n = dt$. La rep de Speh associée à (σ, t) est l'unique quotient irréd de $i(\sigma(\frac{t-1}{2}) \otimes \cdots \otimes \sigma(\frac{1-t}{2}))$
$u(\sigma, t) = Q(\sigma(\frac{t-1}{2}), \ldots, \sigma(\frac{1-t}{2}))$.

<u>Exemple</u>: si $d = 1$, $\sigma = 1$, $u(\sigma, n) = 1$, rep triviale.

<u>Proposition 1</u> Soit $d \mid n$, alors dans $\mathrm{Groth}_{\mathbb{Z}}(G)$
$u(\sigma, t) + (-1)^t Q(\Delta(\sigma, t))$ est une somme d'induites paraboliques propres.

Preuve: $\Delta = \Delta(\sigma, t)$. On fixe dans GL_n, un tore max, Borel, racines simples de façon standard. P parabolique standard correspondant à $GL_d \times \cdots \times GL_d$.
$N \subset P$ radical unipotent.
Lemme géométrique $\Rightarrow$

$$J_N\, i(\Delta) = \bigoplus_{w \in W^{P,P}} \sigma(\Delta)^w.$$

$W' = \mathfrak{S}_t$, on a une identification $W' \simeq \mathfrak{S}_t$

Partitionnons $\{1,\dots,n\}$ en t segments

$I_i = \{(i-1)d+1, \dots, id\}$, W^{BP} est le sous-groupe de W permutant les I_i et conservant l'ordre sur chaque I_i. D'où $\sigma(\Delta)^w = \sigma(w(1)) \otimes \dots \otimes \sigma(w(t))$.

On en conclut que $i(\Delta)$ possède un unique sous-objet simple $Z(\Delta)$ et $J_N(Z(\Delta)) = \sigma(\Delta)$.

~~De même $i(\Delta$~~

Les paraboliques contenant P correspondent aux $I \subset \{1,\dots,t\}$.

$$J_{N\cap M_I}\left(i_M^{M_I}(\Delta(\sigma))\right) = \bigoplus_{w\in W'_I} \sigma(\Delta)^w$$

, ainsi $i_M^{M_I}(\Delta(\sigma))$ a un unique sous-objet irréductible Z_I (et $J_{N\cap M_I}(Z_I) = \sigma(\Delta)$).

Il existe alors une suite exacte

$$0 \to \mathcal{M}(\sigma,t) \to \bigoplus_{\substack{I\subset\{1,\dots,t\}\\ |I|=t-1}} i_{P_I}^G(Z_I) \to \dots \to i_P^G(\sigma(\Delta)) \to Q(\Delta) \to 0$$

On déduit du lemme géométrique

$$J_N(i_{P_I}^G(Z_I)) = \bigoplus_{w\in (W')^I} \sigma(\Delta)^w$$

$(W')^I$ syst de rep de longueur minimale de $W'/(W')_I$

La propriété $(W')^I \cap (W')^J = (W')^{I\cup J}$ montre que $i_{P_I}^G(Z_I) \cap i_{P_J}^G(Z_J) = i_{P_{I\cup J}}^G(Z_{I\cup J})$. On utilise alors le résultat suivant

<u>Schneider-Stuhler</u> G groupe abélien, $G_1,\dots,G_m$ sous-groupes tels que

- $\forall A, B \subset \{1,\dots,m\}$

$$\Big(\sum_{i\in A} G_i\Big) \cap \bigcap_{j\in B} G_j = \sum_{i\in A}\Big(G_i \cap \bigcap_{j\in B} G_j\Big)$$

Alors le complexe

$$0 \to \bigcap_i G_i \to \bigoplus \dots \to \bigoplus_{i<j} G_i \cap G_j \to \bigoplus G_i \to G$$

est exact.

L'égalité $i_{P_I}(Z_I) \cap (i_J + i_K) = (i_{P_I} \cap i_K) + (i_{P_J} \cap i_K)$ est conséquence de la description des modules de Jacquet.

Proposition 2 (Schneider - Zink) π_0 cuspidal
Il existe une rep line irréd τ de K telle
si $\mathrm{Hom}_K(\tau, \pi) \neq 0$ avec π tempérée, alors
$\pi = Q(\pi_0 |\cdot|^{s_1} \otimes \cdots \otimes \pi_0 |\cdot|^{s_t})$ avec les s
imaginaires purs.
De plus $\mathrm{Hom}_K(\tau, \mu(\pi_0, t)) \neq 0$

Corollaire 1. Si $h \in C_c^\infty(G)$ est telle que $\forall$
tempéré non de carré intégrable on π Speh, on
$\mathrm{Tr}(h|\pi) = 0$. Alors $\mathrm{Tr}(h|\pi) = 0 \quad \forall \pi \in$
Preuve. $P \subset G$ parabolique propre, π' tempérée
$\mathrm{Tr}(h | i_P^G(\pi')) = \mathrm{Tr}(h^P(\pi')) = 0$. Donc par
$\mathrm{Tr}(h^P | \pi') = 0 \quad \forall \pi' \in \mathrm{Irr}(P)$. Donc $\mathrm{Tr}(h | i_P^G(\pi'))$
$\forall \pi'$. Par la proposition 1, $\mathrm{Tr}(h | Q(\Delta(\sigma, t$
$\forall \sigma, t$. Donc $\mathrm{Tr}(h|\pi) = 0 \quad \forall \pi$ tempérée,
$\forall \pi$. $\square$

Corollaire 2 $\exists h \in C_c^\infty(K)$ telle que
$\mathrm{Tr}(h|\pi) = 0$ si π tempérée $\neq Q(\sigma|\,|^{s_1} \otimes \cdots \otimes$
s_i imaginaire pur.
et $\mathrm{Tr}(h | \mu(\sigma, t)) \neq 0$.

3. Preuve du lemme 1
Soit $\tau \in W_F^{++}$. Définissons un élément f
centre de Bernstein de $\mathcal{M}(G)$.
$\pi \in \mathrm{Irr}(G)$, $\pi \in \mathcal{M}(\Omega)$, Ω classe d'in
Posons $\sigma(\pi) = \bigoplus \sigma(\pi_i)$ ou $\sigma(\pi) = \mathrm{rec}(\pi)(\frac{1-}{}$
si π cuspidale
Posons $1_\tau |_\pi = \mathrm{Tr}(\tau | ~~\mathrm{rec}(\pi)~~ . \sigma(\pi)(\frac{n-1}{2}))$.
1_τ est bien un élément du centre car
$\pi \mapsto \mathrm{Tr}(\tau | \sigma(\pi))$ est régulière.

On se restreint à une classe d'inertie Ω et on se ramène au cas cuspidal. Si $\pi' = \chi\pi(\chi)$ avec χ non ramifié. Soit $h \in C_c^\infty(K)$ tq $Tr(h|\pi) = 1$.

Alors $Tr(h|\pi') = 1$ et

$$Tr(\cdot \mid \sigma(\pi')(\tfrac{n-1}{2})) = \underbrace{Tr(f_{r,h} \mid \pi')}_{\text{régulière}}.$$

$$Tr(f \mid \underbrace{\sigma(\pi)(\tfrac{n-1}{2})}_{Tr(h|\pi)}) = Tr(1_n * h \mid \pi).$$

Il faut donc prouver $(*)_{h,\pi}$: ~~$Tr(\cdot \mid \sigma(\pi)(\tfrac{n-1}{2}))Tr(h)$~~

$$Tr(f_n * h|\pi) = Tr(f_{r,h}|\pi).$$

Vrai pour π cuspidal et π induite propre.
Par densité, il suffit de le prouver pour π de carré intégrable non cuspidale.

π_0 se cusp de GL_d pour $d|n$, $n = dt$.
Il suffit de prouver $(*)_{h, u(\pi_0,t)}$ par le ~~lemme~~ corollaire 1.
Soit h' pseudo coeff pour $u(\pi_0, t)$.
$(*)_{h',\pi}$ vrai sauf si π de carré intégrable.
Dans ce cas. $(*)_{h,\pi}$ vrai car

$Tr(h'|\pi) = 0$ et $Tr(1_{r,e_r}|\pi) = Tr(\cdot|rec(\pi))$

$$Tr(h'|\pi) = 0.$$

$\Rightarrow (*)_{h',\pi}$ OK pour $\pi = u(\pi_0, t)$.

$\Rightarrow Tr(\cdot \mid rec(\pi)) = Tr(\cdot \mid \sigma(\pi)(\tfrac{n-1}{2}))$.

$\Rightarrow (*)_{h,\pi}\ \forall h. \Rightarrow (*)_{h,\pi}\ \forall \pi.$ □

Appendice Idée de la prop 2.
Un type tempéré est un multi-segment
~~$\Delta_1, \ldots, \Delta_r$~~ $\mathcal{P} = \sum m_i \Delta_i$ avec $\sum m_i d(\Delta_i) = n$.
~~Il existe~~ Les représentations tempérées de type $\mathcal{P}$ sont les ~~quot~~ induites $i(\alpha(Q(\Delta_1) \otimes \cdots \otimes Q(\Delta_r)))$ avec α nr unitaire.

On note Irr_ρ l'ensemble des rep irréd de la forme $Q(\alpha(\Delta_1, -, \Delta_r), \alpha_{nr})$.
$\mathrm{Irr}_\rho \subset \mathcal{M}(D_\rho)$ où D_ρ est le type cuspidal $\sum_{\sigma, t} m_\rho(\sigma, t)\, t\, \sigma$.

On introduit un ordre sur les types tempérés de la façon suivante.
ρ est vu comme une fonction de

$$\mathcal{E} \longrightarrow \text{partitions}$$
$$\sigma \longmapsto \underbrace{(t \longmapsto m(\sigma, t))}_{\text{partition de } |\rho(\sigma)|}$$

Si P est une partition, on peut écrire P comme une suite d'entiers $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_r$.
Ordre $(l_1 \geq \dots \geq l_r) \geq (m_1 \geq \dots \geq m_s)$ si $l_1 \geq m_1$ et $l_1 + l_2 \geq m_1 + m_2$ ...
Exemple $(1, -, 1)$ minimale, $(l, 0, -, 0)$ maximale.
$\Rightarrow$ ordre sur les types tempérés.

<u>Théorème</u> (Schneider-Zink, 99) À tout type tempéré on peut associer une rep σ_ρ de K, irré tq si π tempérée de type ρ'

$$\sigma_{\rho'} \subset \pi, \quad \rho' \ngeq \rho.$$

si $\pi \in \mathrm{Irr}_\rho(G)$, $\sigma_\rho \hookrightarrow \pi$.