## Définitions et propriétés élémentaires

Def : Un groupe topologique $G$ est dit local. profini si chaque voisinage ouvert de l'identité contient un ss. grp compact ouvert.

Ex : $F$ corps local (ie de val. discrète et de corps résiduel fini)
$G = \mathbb{G}(F)$, $\mathbb{G}$ grp réd. $/F$

Def : $G$ grp local. profini, $V$ $\mathbb{C}$-ev. La rep $G \curvearrowright V$ est dite lisse si $\mathrm{Stab}\, v \leq G$ est ouvert $\forall v \in V$.

continuité par rapport à la topo discrète sur $V$

Rq : $G \curvearrowright V$ lisse $\iff$ continuité par rapport à la topo naturelle sur $V$

Rq : si $\dim V < \infty$, $V$ lisse $\iff$ continuité ... $\{1\}$ est le seul ss grp dans $U$

Demo : $\exists U$ voisinage $\ni 1$ $\cap$ $\{1\}$ est le seul ss grp dans $U$ ; $G \curvearrowright V$ agit par un caractère

Rq : $\dim V < \infty$, $G = GL_n(F)$, $V$ irred $\Rightarrow$ $G \curvearrowright V$ agit par un caractère

Demo : $V$ lisse de $\dim < \infty$ $\Rightarrow$ $\exists K \leq G$ o.c. qui fixe $V$ $\Rightarrow$ $gKg^{-1}$ aussi et ils engendrent $SL_n(F)$.

Def : $G \curvearrowright V$ lisse, $V$ admissible si $\dim_{\mathbb{C}} V^K < \infty$ $\forall K \leq G$ o.c.

Rq : $V$ irred. $\Rightarrow$ $V$ admiss

Def : $G \curvearrowright V$ lisse, $\tilde{V}$ la partie lisse de $V^*$

Rq : $V \hookrightarrow \tilde{\tilde{V}}$ avec égalité ssi $V$ admissible

Demo : $V = \bigcup V^K$ et $V^K \xrightarrow{\sim} \tilde{\tilde{V}}^K$ (car $\dim < \infty$)

## L'algèbre de Hecke

Def : $X$ espace topologique est local. profini si $X$ loc. compact, totalement ~~d...~~ discontinu et Hausdorff.

Def : $C^\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{C}$ loc. cste$\} \supseteq C_c^\infty(X) = S(X) = \{f : X \to \mathbb{C}$ loc cste à supp compact$\}$

Def : $S^*(X) = \{$formes linéaires sur $S(X)\} \supseteq S_c^*(X) = \{ \ldots$ à supp compact$\}$

supp $\mu$ = complémentaire du plus gd ensemble $Y \subseteq X$ tq supp $f \subseteq Y \Rightarrow \mu(f) = 0$

$\supseteq S_c^{*,\infty}(X) = \{ \ldots$ loc cste$\}$ si $G \curvearrowright X$

Def : $G$ loc. profini, $\mathcal{H}(G) = S_c^{*,\infty}(G)$ l'algèbre de Hecke. La multiplication est donnée par la convolution : $\mu * \nu\,(f) = \mu(g \mapsto \nu(f(\cdot\, g)))$

Rq : $\mu \in \mathcal{H}(G)$, supp $\mu$ compact $\Rightarrow$ $\mu$ bien défini sur $C^\infty(G) \supsetneq C_c^\infty(G)$.

Prop : $G$ unimodulaire, $H$ mesure de Haar sur $G$ $\Rightarrow$
$$\begin{aligned} C_c^\infty(G) &\to \mathcal{H}(G) \\ f &\mapsto H(f\,\cdot) \end{aligned}$$

Demo :
surjectivité : $h$ loc cste et à supp $S = \bigcup_{\text{fini}} g_i K$ $\Rightarrow$ $h = \sum a_i H(1_{g_i K})$.
fixe pour $K \leq G$ o.c.

Rq (lemme de séparation) : $\mathcal{H}(G)$ est semisimple, ie $h \in \mathcal{H}$ tq $h \cdot M = 0$ $\forall \mathcal{H}$-module $M$ alors $h = 0$.

## Modules de Hecke

Def : $M$ $\mathcal{H}$-module. Il est non dégénéré si $\mathcal{H} \cdot M = M$.

Prop : ($\mathcal{H}$-mod. non dégénérés) $\longleftrightarrow$ (Rep lisses)

Demo : $V$ lisse $\Rightarrow$ $V$ $\mathcal{H}$-mod. pour $h.v = h(c_v)$ avec $c_v : g \mapsto g.v \in C^\infty(G, V) = C^\infty(G, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} V$

$V = \bigcup V^K \rightsquigarrow V^K = e_K \cdot V$

$M$ non deg., $M = \mathcal{H} \cdot M$ : $g.m = g\tilde{h} \cdot \tilde{m}$ avec $\tilde{h}\tilde{m} = m$

## Modules projectifs et injectifs dans $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{H}$-mod non deg.)

Def : $P$ projectif si $\mathrm{Hom}(P, \cdot)$ exact

Thm : $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ a assez de modules projectifs

Demo : pour $M \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$, on cherche $P \twoheadrightarrow M$
$m \in M$ ; comme $\mathcal{H} \cdot M = M$ et $\mathcal{H} = \bigcup_{K \leq G \text{ o.c.}} e_K \mathcal{H}$ $\rightsquigarrow$ $\exists e_m$ tq $e_m \cdot m = m$

$\rightsquigarrow P = \bigoplus_{m \in M} \mathcal{H} \cdot e_m$ projectif car la mult. par $e_m$ est exacte.

Prop : $\mathrm{Hom}_G(V, \tilde{W}) = \mathrm{Hom}_G(W, \tilde{V})$.

Cor : $P$ proj $\Rightarrow$ $\tilde{P}$ injectif.

## Foncteurs adjoints

Def : $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ cat.'s, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Alors $G$ est adjoint à droite de $F$ (et $F$ adjoint à gauche de $G$) si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F\cdot, \cdot) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\cdot, G\cdot)$ comme des

foncteurs $A \times B \to \mathrm{Ens}$.
Rq. Alors $F$ est exact à gauche et $G$ à droite.
Restriction et induction
Déf. $H \leq G$ local. profini
(i) $\mathrm{Res}_H : \left| \begin{array}{l} \{G \text{ rep's lisses}\} \longrightarrow \{H \text{ rep's lisses}\} \\ (\sigma : G \to \mathrm{Aut}\, V) \longmapsto \sigma|_H \end{array} \right.$
(ii) $W$ $H$-rep lisse. Alors $\mathrm{Ind}_H^G W$ = partie lisse de $\{ f : G \to W \ / \ f(hg) = h f(g) \}$
$\circlearrowright G$ par translation à droite
$\supseteq \mathrm{ind}_H^G W = \{ \ldots$ à supp. compact mod $H \}$

Prop : (i) $\mathrm{Ind}_H^G$ adjoint à droite de $\mathrm{Res}_H$
(ii) $H \leq G$ ouvert $\Rightarrow \mathrm{ind}_H^G$ adjoint à gauche de $\mathrm{Res}_H$
Démo : $V$ $G$-rep, $W$ $H$-rep.
(i) $\mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{Ind}_H^G W) = \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[H]}(\mathbb{C}[G], W)) = \mathrm{Hom}_H(V, W)$
$(\ldots)$
(ii) $\mathrm{ind}_H^G W = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$
Prop : (i) $\mathrm{Ind}_H^G$ et $\mathrm{ind}_H^G$ exacts
(ii) $W$ admiss. $\Rightarrow \mathrm{ind}_H^G W$ admiss. si $H \backslash G$ compact
Lem. $K \leq G$ o.c. $\Rightarrow V \mapsto V^K$ exact.
Démo : $= \mathrm{Hom}_K(\mathbb{C}, \cdot)$ exact à gauche
on a : $V^K \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V^K$ $\Rightarrow V^K \cong V/V(K)$ ; $V(K) = V_K := V \otimes_{\mathbb{C}[G]} \mathbb{C}[K]$ exact à gauche
$H(1_K \cdot)$

Démo (Prop) :
(i) $\mathrm{Ind}_H^G W = \bigcup_{K \leq G \text{ o.c.}} (\mathrm{Ind}_H^G W)^K$ et $\varinjlim$ exact $\leadsto$ on se ramène à $(\mathrm{Ind}_H^G \cdot)^K$ exact.

$\mathrm{ind}_H^G W^K = \prod_{H \backslash G / K} W^{H \cap gKg^{-1}}$

Induction parabolique et foncteur de Jacquet
$G = \mathbb{G}(F)$ pour $\mathbb{G}$ grp réd $/F$
$P \leq G$ grp parabolique $P = M \ltimes N$
Ex : $G = \mathrm{GL}_n(F)$, $P = \begin{pmatrix} \mathrm{GL}_{n_1} & * \\ & \ddots \\ & & \mathrm{GL}_{n_r} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Ind}_P^G = \mathrm{ind}_P^G$

Rq. $P \backslash G$ propre $\Rightarrow P \backslash G$ compact
Déf. $V_N$ plus gd quotient sur lequel $N$ agit trivialement
$\circlearrowright M = P/N$
$J_N : (G\text{-rep's lisses}) \longrightarrow (M\text{-rep's lisses})$
Rq. $J_N$ exact.
Démo. $V_N = \underbrace{\varprojlim}_{\text{à flèches surjectives}} V_{N_i}$ avec $N = \bigcup_i N_i$ $N_i \leq N$ o.c. $\rightarrow$ exact car $V^{N_i}$ l'est pour $N_i \leq N$ o.c.

Prop : $\mathrm{Hom}_G(\cdot, \underbrace{\mathrm{ind}_P^G \circ \mathrm{infl}_M^P}_{\text{adjoint à droite de } J_N} \cdot) = \mathrm{Hom}_M(J_N \cdot, \cdot)$

Rq. $P \leq G$ non ouvert, $J_N$ a tout de même un adjoint à gauche : $\mathrm{ind}_P^G \circ \mathrm{infl}_M^P$
Normalisation
on veut : $\sigma$ $M$ rep lisse $\Rightarrow \mathrm{ind}_P^G \mathrm{infl}_M^P \sigma = \mathrm{ind}_P^G \mathrm{infl}_M^P \tilde{\sigma}$
~~Démo~~ ie $\mathrm{ind}_P^G \ldots \sigma \times \mathrm{ind}_P^G \ldots \tilde{\sigma} \longrightarrow \mathbb{C}$ $G$-équiv.
on veut
$\searrow \underbrace{C^\infty(P \backslash G, \mathbb{C})}_{\text{pas de mes de Haar sur } P \backslash G} \to \mathbb{C}$

La mesure de Haar sur $P$ donne une application $C^\infty(G, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Ind}_P^G \underbrace{\delta_P}_{\text{caractère unimodulaire de } P}$
$\exists$ forme linéaire $G$-équiv. sur $\mathrm{Ind}_P^G \delta_P$
si on définit $i_M^G \sigma = \mathrm{ind}_P^G \mathrm{infl}_M^P \sigma \otimes \delta_P^{1/2}$
on a $i_M^G \sigma \times i_M^G \tilde{\sigma} \longrightarrow \mathrm{ind}_P^G \delta_P \to \mathbb{C}$ $G$-équiv, et $\widetilde{i_M^G \sigma} = i_M^G \tilde{\sigma}$ en $G$-rep's